Vlastimil Dlab

# Poznámka o dělitelnosti čísel

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 96 (2021), No. 4, 9–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149337

# Poznámka o dělitelnosti čísel

*Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu*

Možná vás už někdo „překvapil“ tvrzením, že

číslo $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$, kde $p$ je prvočíslo větší než 3,

je dělitelno 24. (viz např. [1] nebo [2]).

Jednoduchá tabulka

| $p$ | $p^2$ | $p^2 - 1$ |
|---|---|---|
| 5 | 25 | $24 = 24 \times 1$ |
| 7 | 49 | $48 = 24 \times 2$ |
| 11 | 121 | $120 = 24 \times 5$ |
| 13 | 169 | $168 = 24 \times 7$ |
| 17 | 289 | $288 = 24 \times 12$ |
| ... | ... | ... |
| 277 | 76729 | $76728 = 24 \times 3197$ |
| ... | ... | ... |

nás ujistí a napoví nám, že tvrzení má souvislost s tím, že každé prvočíslo $p > 2$ má tvar

$$p = 6k - 1, \text{ anebo } p = 6k + 1, \text{ pro vhodné číslo } k.$$

Tato vlastnost je bezprostředním důsledkem toho, že každé prvočíslo $p > 2$ je číslo liché, tedy tvaru $p = 2k+1$, a proto obě čísla $p-1$ a $p+1$ jsou sudá a jedno z nich musí být dokonce násobkem 4. Jelikož v posloupnosti $p-1$, $p$, $p+1$ musí být též jedno číslo dělitelné 3 (a prvočíslo $p$ to být nemůže), součin $(p-1)(p+1)$ je násobkem čísla 24.

Podobná úvaha může být nyní rozšířena pro každé prvočíslo $p > 5$ na součin

$$a_p = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2) = (p^2-1)(p^2-4).$$

V posloupnosti $p-2$, $p-1$, $p$, $p+1$, $p+2$ je jedno z čísel dělitelno 5 a dvě jsou dělitelná 3. Tedy $a_p$ je pro každé $p>5$ dělitelno 360.

Dokázali jsme tak první dvě tvrzení této věty:

**Věta 1.** *Nechť $p$ je prvočíslo.*

*(i) Je-li $p>3$, je $p^2-1$ celočíselným násobkem $24 = 4\cdot 3! = 4!$.*

*(ii) Je-li $p>5$, je $a_p = (p^2-1)(p^2-4)$ celočíselným násobkem čísla $360 = 3\cdot 5!$.*

*(iii) Je-li $p>7$, je $b_p = (p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)$ celočíselným násobkem $40320 = 8\cdot 7! = 8!$.*

*(iv) Je-li $p>7$, je $c_p = (p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)(p^2-16)$ celočíselným násobkem $1814400 = 5\cdot 9!$.*

*Důkaz* tvrzení (i)–(iv) a tvrzení týkajících se podobných výrazů je založen na známém faktu, který je zřejmým důsledkem toho, že kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

je celé číslo. Pro každé celé kladné číslo $n$ součin $k$ po sobě jdoucích čísel

$$n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) \text{ je dělitelný číslem } k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k. \quad (*)$$

Dokažme nyní tvrzení (iii) a (iv) věty 1.

(iii) Tvrzení $(*)$, které aplikujeme pro $n=p-3$ a $k=7$, doplníme poznatkem, že jeden z činitelů součinu

$$pb_p = (p-3)(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$$

je násobkem čísla 8, a že tedy $b_p$ je násobkem čísla 128. Připomeňme, že čísla $p$ a 40320 jsou nesoudělná, tudíž 40320 dělí $b_p$.

(iv) Zde aplikujeme tvrzení $(*)$ pro $n=p-4$ a $k=9$ a zjistíme, že dva činitelé součinu

$$pc_p = (p-4)(p-3)(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$$

jsou násobky čísla 5 a že tedy $c_p$ je násobkem čísla 25. Opět zdůrazněme, že čísla $p$ a 1814400 jsou nesoudělná, tudíž 1814400 dělí $c_p$.

Článek zakončeme několika úkoly:

**Cvičení.** Zdůvodněte, že

(1) $(p^2-1)(p^2-9)$ je celočíselným násobkem 1920 pro každé prvočíslo $p>5$.

(2) $(p^2-1)(p^2-25)$ je celočíselným násobkem 1152 pro každé prvočíslo $p>5$.

(3) $(p^2-1)(p^2-9)(p^2-25)$ je celočíselným násobkem 322560 pro každé prvočíslo $p>7$.

(4) $(p^2-1)(p^2-25)(p^2-49)$ je celočíselným násobkem 414720 pro každé prvočíslo $p>7$.

Zdůrazněme ještě roli, jakou hrají v našich úvahách malá prvočísla pro součiny blízkých činitelů. Můžeme je totiž snadno identifikovat jako dělitele daných součinů:

$$24=2^3\cdot 3,\quad 360=2^3\cdot 3^2\cdot 5,\quad 40320=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7,$$
$$1814400=2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7,\quad 1920=2^7\cdot 3\cdot 5,\quad 1152=2^7\cdot 3^2,$$
$$322560=2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7,\quad 414720=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5.$$

Všimněme si též, že uvedení společní dělitelé příslušných součinů jsou co do velikosti optimální. O tom se v jednotlivých případech snadno přesvědčíme vhodnou volbou malých prvočísel. Tak např. v případě věty 1(ii) $a_{11}=14040=360\cdot 3\cdot 13$ a $a_{13}=27720=360\cdot 7\cdot 11$. Je tedy 360 optimální. Podobně v případě cvičení (1) je součin pro $p=13$ roven $1920\cdot 2\cdot 7$ a pro $p=23$ je roven $1920\cdot 11\cdot 13$. Je tedy 1 920 optimální. Přesvědčte se, že v případě cvičení (3) stačí pro důkaz optimality 322 560 zvolit $p=11$ a $p=23$.

Nakonec poznamenejme, že výsledky této poznámky jsou zobecněny v článku [3] touto větou:

**Věta 2.** *Nechť $p$ je prvočíslo splňující $p>2n+1$. Potom je součin*

$$(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)\dots(p^2-n^2)$$

*dělitelný číslem $2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)!=[2(n+1)]!$, je-li $n$ liché, a číslem $(n+1)\cdot(2n+1)!=\frac{1}{2}\cdot[2(n+1)]!$, je-li $n$ sudé.*

Literatura

[1] https://www.youtube.com/watch?v=ZMkIiFs35HQ

[2] https://math.stackexchange.com/questions/855/for-any-prime-p-3-why-is-p2-1-always-divisible-by-24

[3] Dlab, V., Pospíchal, T.: Divisibility of certain products. *College Math. Journal.*

# Nekonečna

*Martin Dvořák, IST Austria, Klosterneuburg*
*Jonáš Havelka, MFF UK, Praha*

Článek vychází ze studijního textu M&M [1]. Korespondenční seminář M&M se věnuje převážně matematice, fyzice a informatice.

V rámci korespondenčního semináře M&M navrhujeme různá témata, nad kterými můžou účastníci (převážně středoškoláci) bádat, a k nim zveřejňujeme studijní texty a doprovodné úlohy. Nejlepší řešitelé bývají dvakrát ročně zváni na soustředění.

## Hilbertův hotel

Představme si, že spravujeme hotel[1)], kde je nekonečně mnoho jednolůžkových pokojů. COVID-19 ustupuje, takže nám konečně bylo umožněno otevřít, což způsobilo obrovský zájem, tudíž máme všechny pokoje obsazené. Abychom se v hotelu vyznali, očíslovali jsme pokoje čísly $\{1, 2, 3, \ldots\}$ tak, že každé číslo je využito právě jednou a každý pokoj má právě jedno číslo. Tedy máme tolik pokojů, kolik je přirozených čísel. Tento počet (tedy naše nekonečno) označme[2)] jako $\aleph_0$.

Najednou nám na vchodové dveře zaklepe nový host. Nejprve ho chceme odmítnout, vždyť přece máme všechny pokoje obsazené, ale pak

1) S tímto myšlenkovým experimentem přišel v přednášce „O nekonečnu“ roku 1924 německý matematik David Hilbert, jemuž v matematice vděčíme za mnoho poznatků. Viz: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel

2) Symbol $\infty$ se obecně pro nekonečný počet nepoužívá, protože jak uvidíme dále, není nekonečno jako nekonečno. Symbol $\aleph$ (alef, první písmeno hebrejské abecedy) jsme nevybrali náhodně, o tom tu však nechceme vyprávět. Zvídavé jen odkážeme na: https://en.wikipedia.org/wiki/Aleph_number