Vlastimil Dlab
Obsah a obvod obdélníků

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 4, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149335

Obsah a obvod obdélníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Cílem tohoto článku je nabídnout základním a středním školám jednoduše formulovanou otázku, jejíž řešení a rozbor by mohl přispět k výuce matematiky. Budeme zkoumat vztah mezi obvodem a obsahem obdélníku. Proč? Chceme se věnovat otázce, kterou Liping Ma, profesorka university Berkeley (původem Číňanka), nadhodila ve své proslulé knize *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* [2] určené učitelům matematiky a věnovala jí celou čtvrtou kapitolu. Její kniha byla přeložena Jiřím Rákosníkem do češtiny s názvem *Znát a učit elementární matematiku* [3]. Každá škola by měla mít tuto knihu ve své knihovně. Zevrubná recenze Jindřicha Bečváře v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie [1] zdůrazňuje nejen obsah, ale též historickou důležitost této publikace.

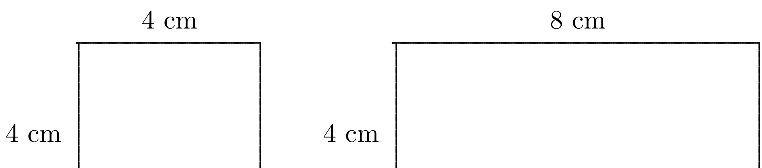
Článek rozdělíme podle náročnosti na dvě části.

1. část

Liping Ma ve své knize ([2], [3]) popisuje následující školní příhodu. Žákyně přijde do hodiny matematiky celá rozzářená, oznamuje, že objevila výsledek, který nebyl v hodině matematiky probírán. Vysvětluje, že nalezla následující tvrzení:

$$\textit{Jestliže obvod obdélníku vzroste, vzroste též jeho obsah.} \tag{1}$$

Své tvrzení podpořila následujícím obrázkem (viz [3], str. 102):



obvod = 16 cm   obvod = 24 cm

obsah = 16 cm^2 obsah = 32 cm^2

Liping Ma se ve své knize ptá 23 amerických učitelů a 72 čínských učitelů:

Jak byste té žákyni odpověděli?

Reakcím učitelů věnuje celou kapitolu, více než 20 stránek! Někteří uvěřili bez jakéhokoliv zaváhání, že tvrzení je správné. Jiní požadovali čas, aby mohli nahlédnout do učebnic. Shrňme zde velice stručně, k jakému výsledku profesorka Ma dospěla: Pouze jedna americká učitelka (z 23 zúčastněných) podala správnou odpověď a vysvětlení:

Tvrzení je neplatné!

Poznamenejme ještě, že ze 72 zúčastněných čínských učitelů tento správný výsledek odvodilo 50. Tuto statistiku poukazující na nedostatečnou kvalifikaci řady učitelů zde nebudeme diskutovat. Uvědomme si jenom (a to je jeden z cílů profesorky Ma), jak negativní dopad má dnešní stav výuky matematiky na žáky – a jak posléze vede k obavám, až strachu z tohoto předmětu.

Studiu vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníku předešleme poznámku, že velikost obvodu a obsahu daného obdélníku budeme vždy popisovat ve stejných (zvolených) jednotkách, ať už jsou to centimetry, metry či kilometry (tedy cm a cm^2, m a m^2 či km a km^2) a nebudeme je zmiňovat. Připomeňme, že naše formulace zahrnují i případ degenerovaných obdélníků, tj. případ, kdy délka jedné strany obdélníku je nulová.

Vztah mezi obvodem a obsahem obdélníku podáme odpovědí na tuto velmi přirozenou otázku:

Existuje obdélník, který má libovolně velký obvod
a zároveň libovolně malý obsah? (2)

Kladná odpověď ukazuje zcela rázným způsobem, že tvrzení (1) neplatí. Podložme tvrzení z otázky (2) několika příklady.

Uvažujme obdélníky, jejichž strany jsou uvedeny v prvních pěti řádcích následující tabulky. Již zde vidíme, že tvrzení (1) je neplatné (k tomu stačí porovnat libovolné dva z těchto řádků) a že hodnoty příslušných obvodů a obsahů naznačují kladnou odpověď na otázku (2).

Délky stran obdélníku **x** a **y**	Obvod $\mathcal{P}$	Obsah $\mathcal{S}$
4 a 4	16	16
8 a 1	18	8
16 a $\frac{1}{4}$	32,5	4
32 a $\frac{1}{16}$	64,125	2
64 a $\frac{1}{64}$	128,03125	1
……	……	……
$\frac{N}{2}$ a $\frac{2\varepsilon}{N}$	$N + \frac{4\varepsilon}{N} > N$	ε
……	……	……
$\frac{N+\sqrt{N^2-16\varepsilon}}{4}$ a $\frac{N-\sqrt{N^2-16\varepsilon}}{4}$	N	ε

Řádek, který v tabulce následuje, kladnou odpověď na otázku (2) potvrzuje. Zde můžeme za N zvolit libovolně velké číslo a za ε libovolně malé číslo. Strany obdélníku, který má obvod rovný (přesně) N a obsah rovný (přesně) ε jsou udány v posledním řádku.

Tento řádek popisuje obdélník o stranách x a y, $x \geq y \geq 0$, které jsou řešením soustavy dvou rovnic

$$2(x+y) = N \quad \text{a} \quad xy = \varepsilon.$$

Jelikož $xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$, x a y jsou řešením soustavy

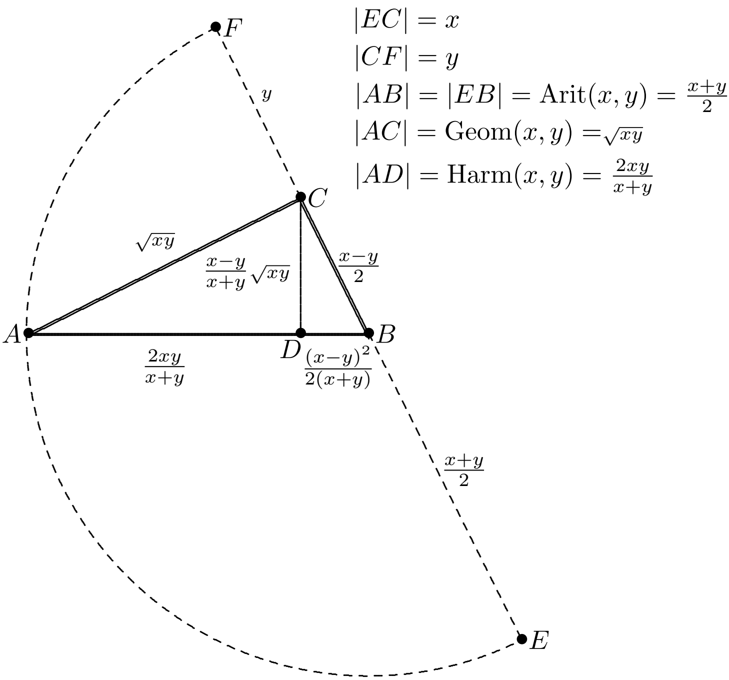
$$x + y = \frac{N}{2} \quad \text{a} \quad x - y = \frac{\sqrt{N^2 - 16\varepsilon}}{2}.$$

Řešení bezprostředně ukazují, že obsah $\mathcal{S}$ $(= \varepsilon)$ a obvod $\mathcal{P}$ $(= N)$ každého obdélníku splňuje vztah

$$\mathcal{S} \leq \left(\frac{\mathcal{P}}{4}\right)^2.$$

Rovnost $\mathcal{S} = \left(\frac{\mathcal{P}}{4}\right)^2$ nastává v případě, že obdélník je čtvercem.

Poznámka. Připomeňme si zde, že obsah obdélníku se rovná čtverci geometrického průměru $\mathrm{Geom}(x, y) = \sqrt{xy}$ jeho stran, tj. geometrický průměr stran obdélníku udává stranu čtverce o stejném obsahu. Obvod obdélníku se rovná čtyřnásobku aritmetického průměru $\mathrm{Arit}(x,y) = \frac{x+y}{2}$ jeho stran. Harmonický průměr stran obdélníku $\mathrm{Harm}(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$ udává čtyřnásobek podílu jeho obsahu a obvodu a je tedy rovný nejvýše čtvrtině obvodu. Vztahy mezi těmito veličinami geometricky ilustruje obr. 1.



Obr. 1: Aritmetický, geometrický a harmonický průměr

Podobným způsobem, jakým jsme popsali vztah mezi obsahem a obvodem obdélníku, můžeme též vyjádřit vztah mezi obsahem a úhlopříčkou obdélníku. Odpověď na otázku

Jestliže úhlopříčka obdélníku vzroste, vzroste též jeho obsah?

je záporná. Platí obecnější tvrzení:

Existuje obdélník, který má libovolně dlouhou úhlopříčku
a zároveň libovolně malý obsah.

K důkazu nám opět může posloužit jednoduchá tabulka, která vyjadřuje vztahy těchto veličin pro několik obdélníků. V posledním řádku tabulky jsou N a ε libovolná kladná čísla (tedy i libovolně velké N a libovolně malé ε).

Délky stran obdélníku x a y	úhlopříčka u	Obsah $\mathcal{S}$
4 a 3	5	12
8 a 1	$8 < u < 9$	8
16 a $\frac{1}{4}$	$16 < u < 17$	4
32 a $\frac{1}{16}$	$32 < u < 33$	2
64 a $\frac{1}{64}$	$64 < u < 65$	1
......	......	......
$N > 1$ a $\frac{\varepsilon}{N}$	$u > N$	ε

Uveďme též následující výrazy pro strany obdélníku, jestliže známe délku úhlopříčky u a obsah $\mathcal{S}$ obdélníku:

$$x = \frac{\sqrt{u^2 + 2\mathcal{S}} + \sqrt{u^2 - 2\mathcal{S}}}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{\sqrt{u^2 + 2\mathcal{S}} - \sqrt{u^2 - 2\mathcal{S}}}{2}.$$

Přesvědčte se, že ekvivalentní výrazy pro strany obdélníku jsou

$$x = \sqrt{\frac{u^2 + \sqrt{u^4 - 4\mathcal{S}^2}}{2}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{\frac{u^2 - \sqrt{u^4 - 4\mathcal{S}^2}}{2}}.$$

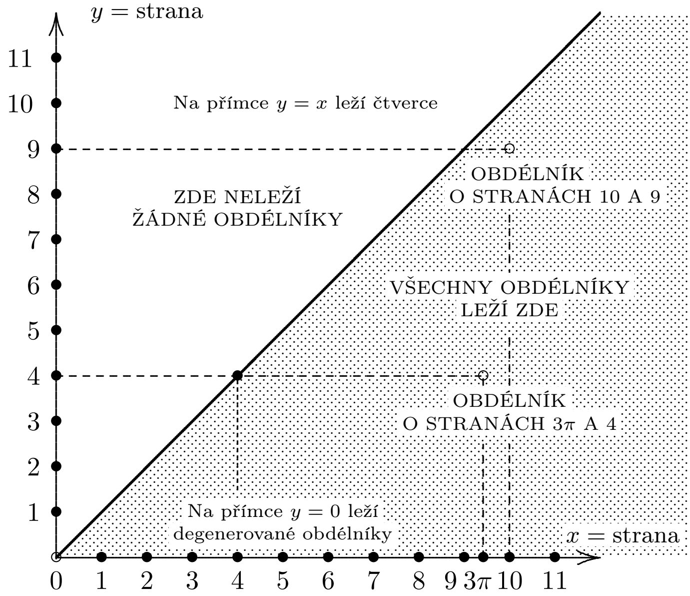
Úhlopříčka u a obsah $\mathcal{S}$ obdélníku splňují tedy vždy vztah $\mathcal{S} \leq \frac{u^2}{2}$. Rovnost $\mathcal{S} = \frac{u^2}{2}$ nastává právě tehdy, když obdélník je čtvercem.

Cvičení. Předešlé úvahy můžeme aplikovat na pravoúhlé trojúhelníky. Formulujte příslušná tvrzení.

2. část

V této druhé části doplníme popis vztahů mezi stranou x, úhlopříčkou u, obsahem $\mathcal{S}$ a obvodem $\mathcal{P}$ obdélníku a znázorníme tyto vztahy geometricky v rovině s kartézskou soustavou souřadnic.

Základním jednoznačným popisem obdélníku je udání jeho stran x a y s podmínkou $x \geq y \geq 0$. Poznamenejme, že rovnost $x = y$ značí, že obdélník je čtvercem, zatímco rovnost $y = 0$ popisuje degenerovaný obdélník, tj. „zdvojenou“ stranu x (obvod je tedy v tomto případě $2x$). Geometricky popíšeme tuto situaci obrázkem 2. Množina všech obdélníků je v jednoznačném [1] vztahu s body roviny, které leží ve vyšrafované oblasti, včetně hraničních polopřímek (tak, jak je to v obrázku popsáno).



Obr. 2: Obdélníky určené stranami x a y

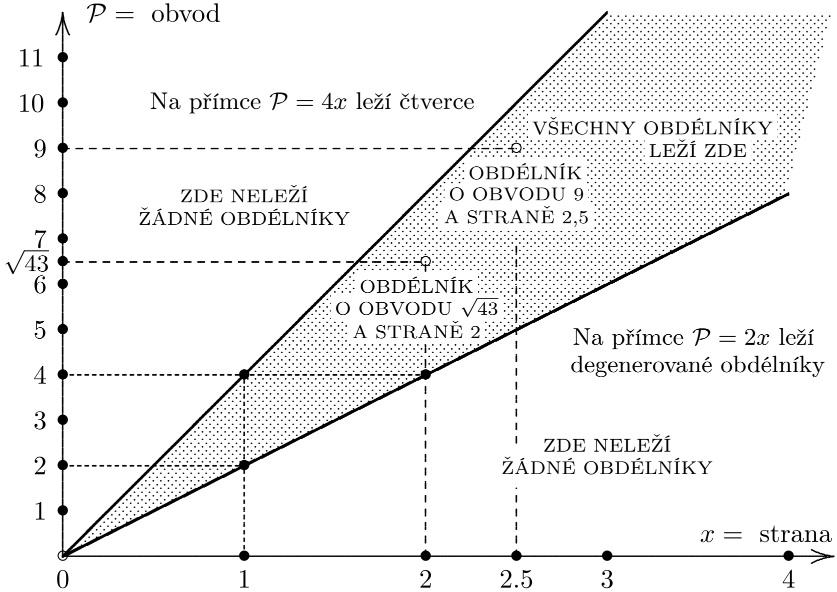
Vztah mezi stranou a obvodem obdélníku je též jednoduchý, lineární. Každému obdélníku o (delší) straně x a obvodu $\mathcal{P}$ odpovídá druhá strana

$$y = \frac{\mathcal{P} - 2x}{2},$$

a tedy $\mathcal{P} \geq 2x$. Jelikož $y \leq x$, platí $\mathcal{P} \leq 4x$. Dvojice $(x, \mathcal{P})$, které odpovídají obdélníkům o straně x a obvodu $\mathcal{P}$ můžeme zobrazit v rovině s pravoúhlými souřadnicemi x a $\mathcal{P}$: jsou to všechny body prvního kvadrantu, které leží na polopřímkách $\mathcal{P} = 2x$, $\mathcal{P} = 4x$ a mezi nimi, jak ukazuje obrázek 3. Oblast obdélníků je opět vyšrafovaná. Poznamenejme, že jednotky jsou zvoleny na souřadných osách x a $\mathcal{P}$ různě.

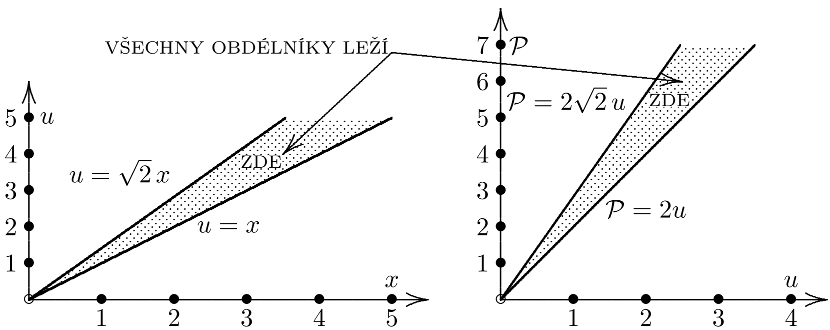
---

[1] Právě kvůli této jednoznačnosti předpokládáme, že $x \geq y$.



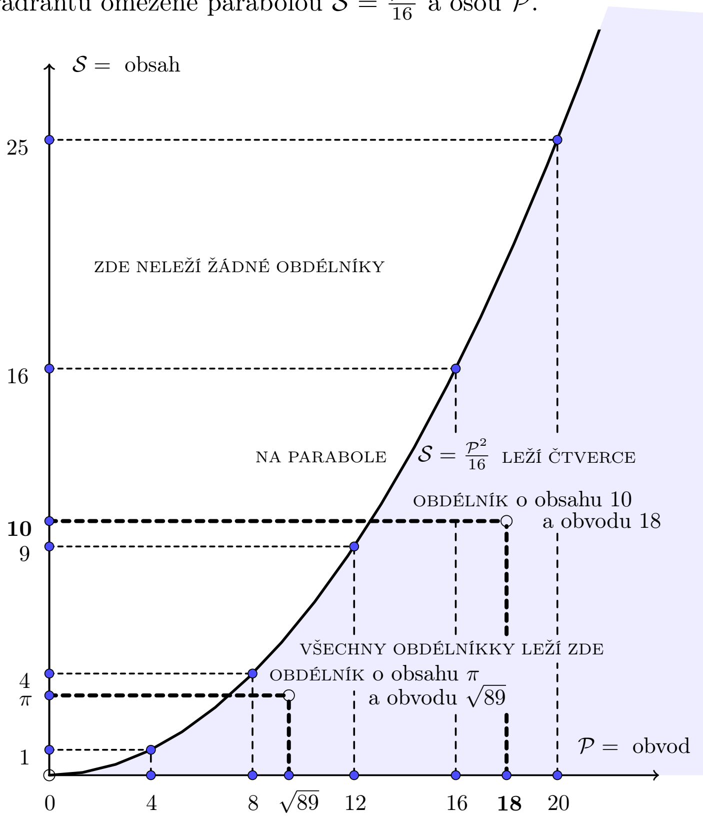
Obr. 3: Obdélníky $(x, \mathcal{P})$ určené stranou a obvodem

Cvičení. Podobně můžeme vyobrazit všechny obdélníky určené stranou x a úhlopříčkou u nebo úhlopříčkou u a obvodem $\mathcal{P}$. Odvoďte příslušná omezení a vysvětlete obr. 4, který tato omezení ilustruje.



Obr. 4: Obdélníky (x, u) a $(u, \mathcal{P})$

Závěrem uveďme geometrické znázornění vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníku, odvozeném v první části tohoto článku. Obr. 5 popisuje celou situaci graficky: Všechny obdélníky jsou jednoznačně znázorněny body $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ (vyjadřujícími obvod a obsah) ležícími v oblasti prvního kvadrantu omezené parabolou $\mathcal{S} = \frac{\mathcal{P}^2}{16}$ a osou $\mathcal{P}$.



Obr. 5: Obdélníky určené svým obvodem a obsahem

Literatura

[1] Bečvář, J.: Recenze knihy Znát a učit elementární matematiku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 66 (2021), č. 2, s. 142–146.

[2] Ma, L.: *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Lawrence Erlbum Associates, Mahwah, New Jersey, 1999.

[3] Ma, L.: *Znát a učit elementární matematiku*. Edice Galileo, roč. sv. 77, Academia, Praha, 2021 (český překlad J. Rákosník).