

Carlo F. Barenghi; Ladislav Skrbek  
Kvantová bouře v mrazivém poháru

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 66 (2021), No. 3, 168–172

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149220>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://dml.cz>

# Kvantová bouře v mrazivém poháru

*Carlo F. Barenghi, Ladislav Skrbek*

*Abstrakt.* Kvantová turbulence, projevující se zejména klubkem kvantovaných vírů, vzniká v kvantových tekutinách, jejichž neobyčejné vlastnosti vysvětluje spíše kvantová než klasická fyzika. Popíšeme dvě nedávno identifikované limitní formy trojrozměrné kvantové turbulence a dvojrozměrnou turbulenci, až donedávna matematickou idealizaci, která se stala experimentální realitou.

Renesanční génius Leonardo da Vinci, vnímavý pozorovatel přírody, si jako první povšiml, že turbulence sestává z vírů různé velikosti a intenzity, a věrně je ve svém slavném nákresu zobrazil. Tato úroveň invence a porozumění turbulentnímu proudění však nebyla dlouho následována; teprve koncem 19. století Osborne Reynolds dospěl ke shodnému závěru a předložil jej pozornosti fyziků.

I přes obrovský pokrok od Reynoldsových časů je turbulence stále výzvou: jde o multiškálový jev, při kterém jsou současně excitovány miliardy stupňů volnosti, které vzájemně interagují. Další komplikací tohoto statistického problému jsou značné fluktuace rychlostního pole proudění v čase a prostoru – je fakticky nediferencovatelné. Byla dokonce zpochybňována i sama matematická podstata řešení Navierových–Stokesových pohybových rovnic a tento problém byl v roce 2000 vybrán Clayovým matematickým ústavem jako jeden ze sedmi problémů tisíciletí, za jejichž vyřešení je vypsána odměna jeden milion dolarů (k dnešnímu dni je vyřešen pouze jediný, tzv. *Poincarého domněnka*).

Mnohem později se vynořil nový aspekt turbulence: kvantová turbulence (QT) [2], neboli turbulence v kvantových tekutinách. Základní vlastnosti kvantových tekutin vyplývají spíše ze zákonitostí kvantové fyziky než klasické Newtonovy fyziky a projevují se typicky při velmi nízkých teplotách (nižších než typická kritická teplota daného systému). Existuje celá řada kvantových tekutin, nicméně zde se omezíme na supratekuté fáze  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He-B}$  a Boseovy–Einsteinovy kondenzáty (BEC – malé obláčky extrémně chladných plynů, uvězněné v magneto-optických pastích) při teplotách v řádech jednotek kelvinů (K), milikelvinů (mK) a mikrokkelvinů ( $\mu\text{K}$ ).

První důležitou vlastností těchto kvantových tekutin je supratekutost, což je absence vazkosti, neboli schopnost proudit za určitých podmínek zcela bez tření. Termín supratekutost vznikl analogicky k supravodivosti – schopnosti bezodporového přenosu elektrického náboje v supravodičích. Supratekutost je důsledkem tvaru disperzní relace mezi energií a hybností elementárních excitací: dokud pohybující se objekt nepřekročí

---

Článek je se svolením převzat z časopisu Europhysics News. Z anglického originálu *Quantum storm in a cold cup*, Europhysics News 52 (2021), 25–27 přeložil Ladislav Skrbek.

---

Prof. CARLO F. BARENGHI, Joint Quantum Centre (JQC) Durham – Newcastle, School of Mathematics, Statistics and Physics, Newcastle University, Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, Velká Británie, e-mail: [Carlo.Barenghi@newcastle.ac.uk](mailto:Carlo.Barenghi@newcastle.ac.uk),

Prof. RNDr. LADISLAV SKRBEK, DrSc., Katedra fyziky nízkých teplot, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2, e-mail: [Ladislav.Skrbek@mff.cuni.cz](mailto:Ladislav.Skrbek@mff.cuni.cz)



Obr. 1. Velmi studený pohár supratekutého  ${}^4\text{He}$  o teplotě pod 2,2 K. Kapalné  ${}^4\text{He}$  je příkladem kvantové tekutiny s neobvyčejnými fyzikálními vlastnostmi, jež jsou obrazem spíše kvantové než klasické fyziky. Kapička supratekutiny viditelná vně poháru dole vznikne díky existenci supratekutého proudění přes horní okraj poháru prostřednictvím velmi tenkého supratekutého filmu, kterým supratekuté  ${}^4\text{He}$  smáčí pevné povrchy, tedy i vnitřní a vnější stěnu nádoby

kritickou rychlost, nemůže ztrácet energii předáním tekutině, která se pro takový objekt jeví jako fyzikální vakuum. Druhou důležitou vlastností je to, že v limitě velmi nízké teploty můžeme celý objem kvantové tekutiny popsat pomocí makroskopické komplexní vlnové funkce  $\Psi$ . Při nenulové teplotě existuje kromě této supratekuté složky ještě normální složka, která se v supratekutém heliu v rámci tzv. dvousložkového modelu chová jako běžná vazká tekutina. Jednoznačnost funkce  $\Psi$  a zákonitosti kvantové mechaniky vedou k tomu, že vířivost (definovaná jako  $\text{rot } \mathbf{v}$ , kde  $\mathbf{v}$  je rychlostní pole proudění supratekutiny) je omezena do tenkých vírových nití – jader kvantovaných vírů; cirkulační kvantum je  $\kappa = h/m$ , kde  $h$  je Planckova konstanta a  $m$  hmotnost relevantního bosonu (např. atomu  ${}^4\text{He}$  nebo Cooperova páru  ${}^3\text{He}$  atomů). Osa víru, kde je  $\Psi$  potlačena, představuje lineární topologický defekt (fáze vlnové funkce  $\Psi$  není definována), je obklopena tenkou válcovou oblastí potlačené supratekuté hustoty, v případě  ${}^4\text{He}$  o velmi malém poloměru  $a_0 = 10^{-10}$  m. Tato vlastnost je v ostrém kontrastu s běžnými vazkými tekutinami, kde vířivost není tvarově ani velikostně omezena.

### Klasická turbulence

S cílem uchopit základní vlastnosti klasické trojrozměrné (3D) turbulence vazkých tekutin zavedli fyzici koncept homogenní izotropní turbulence (HIT) nezávislé na poloze a orientaci. Blízkým příkladem HIT je turbulentní proudění ve větrném tunelu o průměru  $D$  po odečtení střední rychlosti proudění. Statisticky stabilní stav HIT je podmíněn nepřetržitým přísunem energie na jednotkovou hmotnost tekutiny  $\varepsilon$  na velké délkové škále  $M < D$ , kde  $M$  je např. perioda mřížky větrného tunelu a  $D$  jeho rozměr. Tento energetický tok kompenzuje ztráty  $\frac{dE}{dt} = -\varepsilon$  turbulentní kinetické energie  $E$  způsobené kinematickou vazkostí tekutiny  $\nu$ . Důsledkem nelineárních procesů však nejprve dochází k téměř bezeztrátovému přesunu energie k menším a menším délkovým škálám (tento mechanismus přenosu energie nese název Richardsonova kaskáda) až po disipační délkovou škálu  $\eta$  (Kolmogorovova disipační délka), kde dochází k přeměně kinetické energie na teplo. Jednoduchá rozměrová analýza vede ke vztahu  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ . Mezi  $M$  a  $\eta$  existuje inerciální oblast délkových škál, kde vazkost nehraje roli a rozdělení kinetické energie mezi škálami je úměrné jejich velikosti v mocnině  $5/3$  (Kolmogorovův zákon), pokud pro jednoduchost pomineme tzv. intermitentní korekce.

## Kvantová turbulence

QT lze poměrně lehce generovat v supratekuté fázi  $^4\text{He}$ , supratekuté fázi  $^3\text{He-B}$  a v atomových BEC. Uvažujme teploty tak nízké, že normální složka v podstatě neexistuje. QT pak představuje klubko vírových nití (viz obr. 2), které unášejí jedna druhou a při kolizích dochází k jejich přepojování. Není přítomna vazkost, neexistuje tudíž ani disipační délková škála  $\eta$ . Nicméně analogicky s klasickými tekutinami můžeme definovat kvantovou délkovou škálu  $l_Q$  záměnou  $\nu$  za rozměrově shodné kvantum cirkulace  $\kappa$  [7]. Na délkových škálách delších než  $l_Q$  částečná polarizace vírových nití umožňuje protahování turbulentních vírů, sestávajících z mnoha nití, což je nutnou podmínkou existence Richardsonovy kaskády. A opravdu, experimenty a numerické simulace na těchto škálách vykazují Kolmogorovovo energetické spektrum, jak je pozorováno v klasické 3D turbulenci. Na délkových škálách menších než  $l_Q$  není polarizace vírových nití možná. Kvantování cirkulace brání klasickému protahování jednotlivých vírových nití. Na těchto škálách se QT od klasické turbulence podstatně odlišuje. V souladu s tím jsou i naměřená statistická rozdělení rychlostí QT, která mají tvar přibližně Gaussova rozdělení na škálách delších než  $l_Q$ , zatímco u rychlostí na délkových škálách menších než  $l_Q$  se jedná o mocninné funkce [1], [5].



Obr. 2. Zobrazení malého numericky generovaného vírového klubka vírových nití v  $^4\text{He}$ , které jsou zobrazeny jako tlusté barevné trubice s cílem zdůraznění trojrozměrnosti QT (ve skutečnosti jsou nitě cca 10 000 krát tenčí než je střední vzdálenost mezi nimi). Povšimněme si šroubovicových struktur na vírových nitích (Kelvinovy vlny) a vysokého stupně propletenosti klubka

Klasická Richardsonova energetická kaskáda sice nemůže pokračovat za  $l_Q$ , avšak přenos energie na ještě menší délkové škály je možný podél jednotlivých vírových nití. Z obr. 2 je patrná existence Kelvinových vln, podobných vlnám na zahradní hadici. Nelineární interakce Kelvinových vln generuje kratší a kratší vlnové délky, vzniká tak kaskáda Kelvinových vln, která nemá klasickou analogii. Po průchodu touto kaskádou je kinetická energie disipována buď emisí zvukových kvant – fononů ( $^4\text{He}$ ) nebo excitacemi vázaných stavů v jádrech kvantovaných vírů ( $^3\text{He-B}$ ). Jinými slovy, jak v klasické, tak v kvantové turbulenci dochází k přesunu kinetické energie dodané na velké škále  $M$  k malým škálám, kde je následně přeměněna na teplo.

Kvantová délková škála  $l_Q$  v QT je důsledkem zákonitostí kvantové mechaniky (v kvaziklasické limitě nulové Planckovy konstanty vymizí). Její existence, spolu s  $M$  a  $\eta$ , pozvedly problém QT na kvalitativně novou úroveň. Je-li totiž  $l_Q$  větší nebo srovnatelná s  $M$ , klubko vírových nití zůstává víceméně neuspořádané, bez možnosti částečné polarizace, proto neexistuje Richardsonova kaskáda ani inerciální oblast délkových škál. Pro tento režim QT, který byl identifikován jak v supratekutém heliu, tak i v systémech atomových BEC, se vžil název Vinenova turbulence. Jejím charakteristickým znakem je to, že se pro dostatečně dlouhé časy  $t$  celková délka vírových nití v jednotkovém objemu rozpadá nepřímo úměrně času  $t$ , tedy nikoli jako  $t^{-3/2}$ , což je časový rozpad pozorovaný u Kolmogorovovy QT v analogii s klasickou turbulencí [7].

Při nenulových teplotách se kvantové tekutiny chovají jako dvoukapalinové systémy sestávající ze supratekuté a normální vazké složky, což přináší vnitřní tření omezující pohyb vírových nití. U atomových BEC kondenzátů je střední volná dráha excitací tvořících normální složku dlouhá, avšak v  $^4\text{He}$  při teplotách nad 1 K dostatečně krátká na to, abychom zde normální složku mohli považovat za Navierovu–Stokesovu tekutinu, která sama o sobě může vykazovat turbulentní proudění. Tím se otevírají nové scénáře a již je studována bohatá škála různých forem turbulentního kvantového proudění. Navíc lze některá kvantová proudění (např. tepelný protiproud normální a supratekuté složky  $^4\text{He}$ , důležitý pro praktické kryogenní aplikace) excitovat současně na velkých a malých škálách. Nedávno publikovaný přehledový článek [7] popisuje fenomenologii současného stavu poznání širokého spektra turbulentních kvantových proudění supratekutého helia.

Jestliže jsou vlastnosti supratekutého helia v experimentu pevně dány teplotou a tlakem, fyzikální vlastnosti atomových BEC (typ a síla meziatomových interakcí, tvar, velikost a dokonce rozměr systému) mohou být experimentátory do značné míry laděny. Atomové kondenzáty však bohužel zřídka sestávají z více než milionu atomů, jsou tedy poměrně malé: poměr  $D/a_0$ , charakterizující počet stupňů volnosti, dosahuje typicky hodnot 10–20, což je nesrovnatelné s ohromujícím poměrem  $D/a_0$  řádu  $10^{10}$  dosažitelným u supratekutého  $^4\text{He}$ . Nehledě na malou velikost BEC jsou v nich již experimentálně prokázány zárodky turbulentního škálování [6] a BEC se tak stávají ideálními objekty studia přechodu od chaosu k turbulenci.

## Dvojrozměrná kvantová turbulence

Rozměr atomových BEC může být v jednom směru natolik omezen, že jeho tloušťka je srovnatelná s  $a_0$  a stane se tak dvojrozměrným systémem. Při redukci v jednom směru pro stejný počet atomů poměr  $D/a_0$  (tudíž i počet vírových nití v systému)

narůstá a může být mnohem větší než v 3D případě. BEC proto nabízejí možnost studia skutečně dvojrozměrné turbulence, která byla donedávna považována za matematickou idealizaci.

Ve 2D turbulenci existuje (v ostrém kontrastu s 3D Richardsonovou kaskádou) inverzní energetická kaskáda od malých délkových škál k velkým, která vede ke vzniku velkých koherentních vírových struktur – příkladem je velká rudá skvrna Jupiteru. Jazykem diskretních vírů je tento jev zohledněn Onsagerovým modelem 2D vírového plynu. V plošně omezeném 2D systému (jakým je 2D BEC) není počet možných stavů monotónně rostoucí funkcí energie, ale po dosažení maxima se zmenšuje. Tato vlastnost je příčinou toho, že pro dostatečně velkou energii se teplota stává formálně zápornou, víry stejné orientace se shlukují a vytvářejí velké shluky kladné a záporné vířivosti, což již bylo laboratorně prokázáno [4].

## Závěr

Turbulence tekutin dosud byla tradičním předmětem zájmu vědců a inženýrů v oblastech dynamiky tekutin, geofyziky a astrofyziky. To se nyní mění. Jsou studovány nové formy turbulentního kvantového proudění v supratekutém heliu, objevují se další nové formy turbulentních proudění v jedno- a vícekomponentních BEC, v systémech polaritonů, kvantových ferokapalinách a v modelech raného vesmíru. Kvantová turbulence, vykazující univerzalitu koncepce energetických kaskád a přepojování kvantovaných vírů, dnes představuje rychle se rozvíjející obor fyziky.

## L i t e r a t u r a

- [1] BAGGALEY, A. W., BARENGHI, C. F.: *Quantum turbulent velocity statistics and quasi-classical limit*. Phys. Rev. E 84 (2011).
- [2] BARENGHI, C. F., SKRBK, L., SREENIVASAN, K. R.: *Introduction to quantum turbulence*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 111 (2014), 4647–4652.
- [3] COOPER, R. G., MESGARNEZHAD, M., BAGGALEY, A. W., BARENGHI, C. F.: *Knot spectrum of turbulence*. Scientific Reports 9 (2019).
- [4] JOHNSTONE, S. P., GROSZEK, A. J., STARKEY, P. T., BILLINGTON, C. J., SIMULA, T. P., HELMERSON, K.: *Evolution of large-scale flow from turbulence in a two-dimensional superfluid*. Science 364 (2019), 1267–1271.
- [5] LA MANTIA, M., SKRBK, L.: *Quantum, or classical turbulence?* Europhys. Lett. 105 (2014).
- [6] NAVON, N., GAUNT, A. L., SMITH, R. P., HADZIBABIC, Z.: *Emergence of a turbulent cascade in a quantum gas*. Nature 539 (2016), 72–75.
- [7] SKRBK, L., SCHMORANZER, D., MIDLIK, Š., SREENIVASAN, K. R.: *Phenomenology of quantum turbulence in superfluid helium*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 118 (2021).