Josef Polák

Goniometrické řešení kubické rovnice

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 5, 287–297

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149117

GONIOMETRICKÉ ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE

Josef Polák

Příspěvek je inspirován článkem Daga Hrubého *Řešení kvadratické rovnice* v čísle 3 (99) ročníku 24 (2016) Učitele matematiky, v němž se autor zabýval zejména goniometrickým řešením kvadratické rovnice (tj. jejím řešením pomocí vhodných goniometrických substitucí). Přitom pro kvadratickou rovnici v normovaném tvaru použil postup, se kterým se setkal v německy psané učebnici: Josef Gajdeczka *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen* z r. 1891 (Wien: F. Tempsky) a pro kvadratickou rovnici v obecném tvaru užil postup uvedený v české sbírce úloh: Karel Šilháček *Středoškolská algebra v 1000 řešených příkladech* z r. 1946 (Praha: Česká grafická unie). Poznamenejme, že obdobné postupy goniometrického řešení kvadratické rovnice byly podrobně probírány již dříve v českých středoškolských učebnicích (Machovec, 1886), (Taftl, 1887) a v dalších středoškolských i vysokoškolských učebnicích algebry vydaných na konci 19. století a v první polovině 20. století (včetně uvedení předpokladů těchto postupů a jejich zdůvodnění). Probírání goniometrického řešení kvadratických rovnic v těchto učebnicích bylo motivováno tím, že je výhodné oproti algebraickému řešení (podle vzorce) v případech, kdy kvadratická rovnice má koeficienty s velkým počtem číslic (tj. velká celá čísla nebo desetinná čísla o větším počtu desetinných míst) a pak její goniometrické řešení je vhodnější z hlediska logaritmicky prováděných výpočtů (pomocí tabulek či logaritmického pravítka). Jako ilustrativní příklady v těchto učebnicích jsou proto vesměs volena goniometrická řešení kvadratických rovnic, jejichž koeficienty jsou desetinná čísla s více desetinnými místy. V citovaném článku však uvedená motivace není zmíněna a goniometrické řešení kvadratických rovnic je ilustrováno jen na příkladech kvadratických rovnic s celými jednocifernými koeficienty (přímo zadaných v tomto tvaru nebo v ekvivalentním tvaru), jež jsou podstatně jednodušeji řešitelné algebraicky. Při výpočtech užitím kalkulátorů ovšem tato motivace ztratila zásadní smysl. Goniometrické řešení kvadratické rovnice má přesto dosud svůj význam v souvislosti s goniometrickým řešením kubických rovnic.

Algebraické řešení kubických rovnic

Vyjdeme ze základních poznatků o algebraickém řešení kubických rovnic (viz (Polák, 2014) str. 193–196):

Každou *kubickou rovnici* s komplexními (speciálně reálnými) koeficienty a neznámou $z \in \mathbb{C}$

$$a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0 \qquad (a_3 \neq 0) \tag{4}$$

lze vydělením koeficientem a_3 převést na normovaný tvar

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0. \tag{5}$$

Užitím lineární substituce $z = x - \frac{a}{3}$ se rovnice (5) zjednoduší na *kubickou rovnici v redukovaném tvaru* (tj. bez kvadratického členu)

$$x^3 + px + q = 0, \tag{6}$$

kde $p = b - \frac{1}{3}a^2$, $q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$.
Řešení rovnice (6) lze získat tak, že v ní neznámou x vyjádříme ve tvaru součtu dvou pomocných neznámých u, v, tj. ve tvaru

$$x = u + v. \tag{7}$$

Po dosazení do rovnice (6) dostáváme

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

a po úpravě

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Tato rovnice bude jistě splněna, položíme-li zároveň

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad uv = -\frac{p}{3}. \tag{8}$$

Umocníme-li druhou rovnici na třetí, dostáváme odtud soustavu rovnic

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}. \tag{9}$$

Je-li $p \neq 0$, nemůže být žádné z čísel u, v rovné nule. Lze tedy např. číslo v vyjádřit ve tvaru $v = -\frac{p}{3u}$ a po dosazení do první rovnice (9) plyne odtud ekvivalentní rovnice

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \quad \text{čili} \quad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{10}$$

Položíme-li v druhé rovnici (10)

$$y = u^3, \tag{11}$$

dostáváme kvadratickou rovnici nazývanou *kvadratická rezolventa* kubické rovnice (6):

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{12}$$

Obdobně se odvodí, že tatáž kvadratická rovnice platí, položíme-li

$$y = v^3. \tag{11'}$$

Diskriminant kvadratické rezolventy (12) je

$$D_2 = q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27} = 4D, \quad \text{kde} \quad D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}. \tag{13}$$

Kořeny kvadratické rezolventy (12) jsou

$$y_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm (\sqrt{D})_1, \tag{14}$$

kde $(\sqrt{D})_1$ je jedna (základní) hodnota druhé odmocniny z D v oboru $\mathbb{C}$. Na základě vztahů (7), (11) a (11') pak plyne, že kořeny kubické rovnice (6) lze vyjádřit ve tvaru

$$x_k = u_k + v_k = (\sqrt[3]{y_1})_k + (\sqrt[3]{y_2})_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{15}$$

kde $\left(\sqrt[3]{y_1}\right)_k$ a $\left(\sqrt[3]{y_2}\right)_k$ jsou sobě příslušné k-té hodnoty třetích odmocnin z y_1 a y_2 v oboru $\mathbb{C}$, přičemž podle (8) mezi příslušnými hodnotami u_k a v_k platí vztah

$$v_k = -\frac{p}{3u_k}. \tag{16}$$

Zvolíme-li za u_1 a v_1 libovolné příslušné hodnoty třetích odmocnin z y_1 a y_2 v oboru $\mathbb{C}$ (označené indexem 1):

$$u_1 = (\sqrt[3]{y_1})_1 = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + (\sqrt{D})_1}\right)_1,$$

$$v_1 = (\sqrt[3]{y_2})_1 = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - (\sqrt{D})_1}\right)_1,$$

pak pro další sobě příslušné hodnoty u_2 a v_2, u_3 a v_3 platí:

$$u_2 = \left(\sqrt[3]{y_1}\right)_2 = \varepsilon u_1, \quad v_2 = \left(\sqrt[3]{y_2}\right)_2 = \varepsilon^2 v_1$$

a

$$u_3 = \left(\sqrt[3]{y_1}\right)_3 = \varepsilon^2 u_1, \quad v_3 = \left(\sqrt[3]{y_2}\right)_3 = \varepsilon v_1,$$

kde

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

takže $\varepsilon^3 = 1$.

Ze vztahů (15) a (16) tak vyplývají pro kořeny kubické rovnice (6) tzv. *Cardanovy vzorce*:

$$\begin{gathered}
x_1 = u_1 + v_1 = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + (\sqrt{D})_1}\right)_1 + \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - (\sqrt{D})_1}\right)_1, \\
v_1 = -\frac{p}{3u_1}, \\
x_2 = u_2 + v_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \\
x_3 = u_3 + v_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1,
\end{gathered} \tag{17}$$

kde

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{18}$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{19}$$

Z Cardanových vzorců (17) pro kořeny x_1, x_2, x_3 kubické rovnice (6) lze odvodit vztah

$$\left[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\right]^2 = -108D, \tag{20}$$

kde výraz $D_3 = -108D$ se nazývá *diskriminant kubické rovnice* (6).

Užitím vztahu (20) se pro kubickou rovnici (6) s reálnými koeficienty provede snadno důkaz významné věty:

Věta o diskusi řešení kubické rovnice s reálnými koeficienty. Pro kubickou rovnici (6) s reálnými koeficienty p, q a $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ platí:

a) Je-li $D > 0$, pak kubická rovnice (6) má jeden reálný kořen x_1 a dva komplexně sdružené kořeny x_2, x_3.
b) Je-li $D < 0$, pak kubická rovnice (6) má tři reálné různé kořeny x_1, x_2, x_3.
c) Je-li $D = 0$, pak kubická rovnice (6) má tři reálné kořeny x_1, x_2, x_3, z nichž jeden je dvojnásobný, resp. trojnásobný.

V následujících příkladech 1, 2, 3 vyřešíme užitím Cardanových vzorců kubické rovnice, které jsme v knize (Polák, 2014) na str. 196 řešili pomocí odhadu jejich jednoho reálného kořene.

Příklad 1. Užitím Cardanových vzorců řešte kubickou rovnici

$$x^3 + x + 10 = 0.$$

Řešení. $p = 1$, $q = 10$, $D = \frac{1}{27} + \frac{100}{4} = \frac{676}{27} > 0$, a tedy daná kubická rovnice má jeden reálný kořen x_1 a dva komplexně sdružené kořeny x_2, x_3, které vypočteme užitím Cardanových vzorců (17):

$$x_1 = u_1 + v_1,$$

kde

$$u_1 = \left(\sqrt[3]{-5 + \left(\sqrt{\tfrac{676}{27}}\right)_1}\right)_1 = \left(\sqrt[3]{-5 + \tfrac{26}{9}\sqrt{3}}\right)_1 = -1 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$v_1 = \left(\sqrt[3]{-5 - \left(\sqrt{\tfrac{676}{27}}\right)_1}\right)_1 = \left(\sqrt[3]{-5 - \tfrac{26}{9}\sqrt{3}}\right)_1 = -1 - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

(jak ověříme umocněním čísel $-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ a $-1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ na třetí), a tedy

$$x_1 = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -2,$$

$$x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = 1 + 2\mathrm{i}, \quad x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Příklad 2. Užitím Cardanových vzorců řešte kubickou rovnici

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Řešení. $p = -7$, $q = 6$, $D = \frac{(-7)^3}{27} + \frac{36}{4} = -\frac{100}{27} < 0$, a tedy rovnice má tři různé reálné kořeny x_1, x_2, x_3, které vypočteme užitím Cardanových vzorců (17):

$$x_1 = u_1 + v_1,$$

kde

$$u_1 = \left(\sqrt[3]{-3 + \left(\sqrt{-\tfrac{100}{27}}\right)_1}\right)_1 = \left(\sqrt[3]{-3 + \mathrm{i}\tfrac{10\sqrt{3}}{9}}\right)_1 = -\tfrac{3}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$

$$v_1 = \left(\sqrt[3]{-3 - \left(\sqrt{-\tfrac{100}{27}}\right)_1}\right)_1 = \left(\sqrt[3]{-3 - \mathrm{i}\tfrac{10\sqrt{3}}{9}\sqrt{3}}\right)_1 = -\tfrac{3}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{6}$$

(což ověříme umocněním čísel $-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}$ a $-\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}$ na třetí),

$$x_1 = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6} = -3,$$

a tedy

$$x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = 1, \quad x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = 2.$$

Příklad 3. Užitím Cardanových vzorců řešte kubickou rovnici

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0.$$

Řešení. $p = -\frac{3}{4}$, $q = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}{27} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0$, a tedy rovnice má podle Cardanových vzorců (17) jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný kořen:

$$x_1 = u_1 + v_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)_1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 = -\frac{1}{2}.$$

Při řešení kubické rovnice (6) v příkladech 1 a 2 se nám podařilo třetí odmocniny u_1, v_1 vyjádřit jako určité reálné, resp. imaginární číslo. Takové jejich vyjádření není však často jednoduché, anebo není vůbec možné (např. pro kubickou rovnici $x^3 - 10x + 5 = 0$, u níž $p = -10$, $q = 5$, $D = -\frac{3325}{108} < 0$, která má tři různé reálné kořeny, viz příklad 5). Obecně platí, že pro kubickou rovnici (6) s reálnými koeficienty, u níž je $D < 0$, a tedy má tři různé reálné kořeny, jsou pro jejich určení Cardanovy vzorce nejsložitější a nejméně vhodné. Je totiž možné dokázat (viz (Schwarz, 1947), (Schwarz, 1968)), že obecně tyto reálné kořeny dané Cardanovými vzorci nelze vyjádřit jen pomocí reálných odmocnin. Tento případ byl proto nazván latinsky *casus irreducibilis* (ireducibilní případ, tj. nepřeveditelný či nezjednodušitelný případ). V tomto případě však namísto algebraického řešení kubické rovnice (6) užitím Cardanových vzorců lze odvodit pomocí goniometrického řešení její kvadratické rezolventy velmi jednoduché goniometrické řešení kubické rovnice.

Goniometrické řešení kubických rovnic

Goniometrické řešení kubické rovnice s reálnými koeficienty pro případ D < 0 (tj. casus irreducibilis). V tomto případě kubické rovnice (6) ze vztahu (13) pro $D < 0$ vyplývá, že je nutně $p < 0$. Kořeny kvadratické rezolventy (12) kubické rovnice (6) jsou pak podle (14) tvaru

$$y_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}. \tag{21}$$

Komplexní číslo y_1 vyjádříme v goniometrickém tvaru rovností

$$-\frac{q}{2}+\mathrm{i}\sqrt{-D}=r\left(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\right),\ \text{kde } r>0, 0<\varphi<\pi. \tag{22}$$

Z této rovnosti plynou pro r a φ dvě rovnosti

$$r\cos\varphi=-\frac{q}{2},\quad r\sin\varphi=\sqrt{-D}. \tag{23}$$

Jejich umocněním a sečtením dostáváme

$$r^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2-D \text{ čili } r^2=-\frac{p^3}{27}, \text{ a tedy } r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}. \tag{24}$$

Po dosazení do první rovnosti (24) získáváme pro φ goniometrickou rovnici

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}, \tag{25}$$

která má jediné řešení splňující podmínku $0<\varphi<\pi$.
Kořeny kvadratické rezolventy (12) kubické rovnice (6) pak podle (21) a (22) jsou v goniometrickém tvaru

$$y_1=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\left(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\right),\ y_2=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\left(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi\right). \tag{26}$$

Ze vztahů pro příslušná u_k, v_k $(k=1,2,3)$ podle (15), (16):

$$y_1=u_k^3,\quad y_2=v_k^3\quad(k=1,2,3) \tag{27}$$

dále vyplývá na základě Moivreovy věty:

$$\begin{aligned} u_k&=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2(k-1)\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2(k-1)\pi}{3}\right),\\ v_k=\bar{u}_k&=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2(k-1)\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2(k-1)\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Podle Cardanových vzorců (17) užitím vztahů (28) dostáváme výsledné vzorce pro goniometrické vyjádření kořenů x_1, x_2, x_3 kubické rovnice (6):

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\\ x_2 &= u_2 + v_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\\ x_3 &= u_3 + v_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Příklad 4. Řešte goniometricky kubickou rovnici z příkladu 2

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Řešení. $p = -7$, $q = 6$, $D = -\frac{100}{27} < 0$ *(casus irreducibilis)*. Při goniometrickém řešení sestavíme goniometrickou rovnici (25) pro neznámou φ (splňující podmínku $0° < \varphi < 180°$):

$$\cos\varphi = -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}},$$

jež má řešení $\varphi \doteq 147°19'11' \Rightarrow \frac{\varphi}{3} \doteq 49°6'24''$ a $\cos\frac{\varphi}{3} \doteq 0{,}654\,65$.

Hodnotu $\cos\frac{\varphi}{3}$ lze vypočítat i přesně užitím vzorce $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$: $\cos\frac{\varphi}{3}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{3} - 3\right) = -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$, odkud $\cos\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ a $\sin\frac{\varphi}{3} = \sqrt{\frac{4}{7}}$.

Podle vzorců (29) jsou kořeny dané kubické rovnice:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} = 2,\\ x_2 &= 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120°\right) = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\cos 120° - \right.\\ &\qquad\left. - \sin\frac{\varphi}{3}\sin 120°\right) = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{7}} = -3,\\ x_3 &= 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240°\right) = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\cos 240° - \right.\\ &\qquad\left. - \sin\frac{\varphi}{3}\sin 240°\right) = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = 1. \end{aligned}$$

Příklad 5. Řešte goniometricky kubickou rovnici

$$x^3 - 10x + 5.$$

Řešení. $p = -10$, $q = 5$, $D = -\frac{3325}{108} < 0$ *(casus irreducibilis)*, $\cos\varphi = -\frac{3}{4}\sqrt{0{,}3} \Rightarrow \varphi \doteq 114°15'$, a tedy $\frac{\varphi}{3} \doteq 38°5' \Rightarrow \Rightarrow \cos\frac{\varphi}{3} \doteq 0{,}787$. Kořeny dané kubické rovnice jsou podle vzorců (29):

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{10}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \doteq 2{,}874,$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{10}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) \doteq -3{,}387,$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{10}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) \doteq 0{,}513.$$

Vzorce (29) lze obdobně odvodit i pro *goniometrické řešení kubické rovnice* (6) *s reálnými koeficienty pro případ* $D = 0$, kdy $\cos\varphi = 1$, a tedy $\varphi = 0°$.

Příklad 6. Řešte goniometricky kubickou rovnici

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Řešení. $p = -3$, $q = -2$, $D = -1 + 1 = 0$, $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0°$, kořeny dané kubické rovnice jsou podle vzorců (29):

$$x_1 = 2 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$x_2 = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

$$x_3 = 2 \cdot 1 \cdot \cos 240° = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

V literatuře, např. (Láska – Hruška, 1934), (Jarník – Šisler, 1961), lze nalézt též postup *goniometrického řešení kubické rovnice* (6) *s reálnými koeficienty pro případ* $D > 0$. Jeho odvození i struktura jsou však podstatně složitější, a tedy méně výhodné než pro $D < 0$, resp. $D = 0$.

Literatura

[1] Machovec, F. (1886). *Algebra pro vyšší třídy škol středních.* Praha: F. Tempský.

[2] Taftl, E. (1887). *Algebra pro vyšší třídy středních škol.* Praha: Nakl. JČM.

[3] Láska, V. & Hruška, V. (1934). *Teorie a prakse numerického počítání.* Praha: Nakl. JČSMF.

[4] Schwarz, Š. (1947). *O rovnicích* (2. vydání). Praha: Nakl. JČSMF.

[5] Kořínek, V. (1953). *Základy algebry.* Praha: Nakl. ČSAV.

[6] Jarník, J. & Šisler, M. (1961). *Jak řešit rovnice a jejich soustavy.* Praha: SNTL.

[7] Schwarz, Š. (1968). *Základy náuky o riešení rovníc* (2. dopl. vydání). Bratislava: Vyd. SAV.

[8] Swätokrižny, P., Dlouhý, Z. & Hruša, K. (1978). *Aritmetika a algebra pre pedagogické fakulty. II. Algebra.* Bratislava: SPN.

[9] Stanovský, D. (2009). *Základy algebry.* Praha: MATFYZPRESS.

[10] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. Konkrétní didaktika matematiky.* Plzeň: Nakl. Fraus.

Abstract

The article explains the importance and procedure of the trigonometric solving of cubic equations. Practical usage of this method of their solution is illustrated by appropriate examples. The topic of the article may be interesting and useful for teaching mathematics at secondary schools in seminars as well as for the interest activity of students.

Josef Polák
Šimerova 11
301 00 Plzeň
e-mail: polak@kma.zcu.cz