

Učitel matematiky

Irena Budínová

Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: čtverec a obdélník

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 5, 272–286

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149116>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**VYTVÁŘENÍ PŘEDSTAV ZÁKLADNÍCH
GEOMETRICKÝCH POJMŮ U ŽÁKŮ
PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY:
ČTVEREC A OBDÉLNÍK**

IRENA BUDÍNOVÁ

V prvním dílu seriálu o vytváření představ geometrických pojmů na 1. stupni ZŠ (Učitel matematiky, ročník 25, číslo 2) jsme vycházeli z van Hieleho úrovně geometrického myšlení. Podle van Hieleho teorie by během 3. až 4. ročníku mělo u žáků docházet k přechodu od úrovně vizualizace k úrovni analýzy. Již mnohokrát v minulosti byla prokázána platnost této teorie s určitými korekcemi, které souvisejí s individualitou žáka. Jednou z těchto korekcí je fakt, že žák nepřechází mezi jednotlivými úrovněmi skokově, ale po určitou dobu se pohybuje na pomezí vizualizace a analýzy (např. Clements et al., 1999; Hannibal & Clements, 2000; Arnas Aktas & Aslan, 2010).

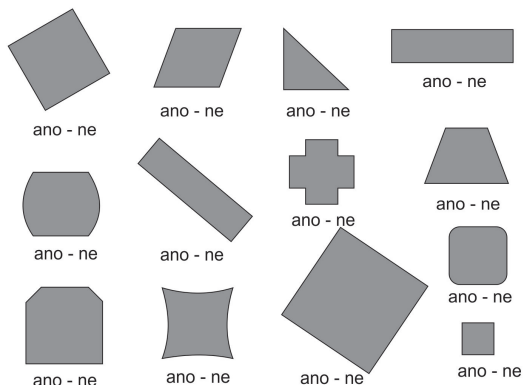
Seznámili jsme se se zadáním testu rozvoje geometrického myšlení pro žáky 4. ročníku ZŠ a s výsledky Úlohy 1. Na výsledcích jsme viděli, že žáci často vnímají základní geometrické útvary prototypicky a nezvažují jejich vlastnosti. V druhém dílu se budeme zabývat rozvojem představ o pojmech čtverec a obdélník.

Výzkum vytváření představ o čtverci a obdélníku u žáků 4. ročníku

Cílem druhé části seriálu je sledovat vývoj představ žáků o pojmech čtverec a obdélník, případně čtyřúhelník. Budeme hledat nesprávné představy typické pro žáky 4. ročníku ZŠ. Pět úloh

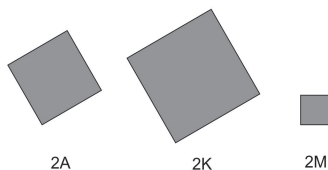
testu se týkalo pojmů čtverec a obdélník, jedna úloha se vztahovala k pojmu čtyřúhelník.

Úloha 2. Je útvar na obrázku čtverec? Odpověď zakroužkuj.



Obr. 1: Obrázek k Úloze 2

Výsledky úlohy 2 – případy čtverců. Mezi útvary je třikrát model čtverce (obr. 2). Jednotlivé případy se liší orientací a velikostí. To jsou jedny z nejčastějších atributů, podle kterých se žáci rozhodují, zda se o daný útvar jedná či ne.



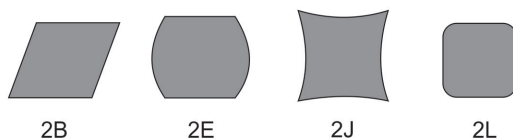
Obr. 2: Případy čtverců

Úkol	Úspěšnost (v %)
2A	96
2K	88
2M	98

Tab. 1: Výsledky Úlohy 2 pro případy čtverců

Porovnejme výsledky Úlohy 1A (čtverec stojící na vrcholu), 2A a 2K. V úloze 1A 46,5 % žáků nevnímalo čtverec otočený oproti prototypické poloze o 45° jako čtverec, přičemž 38,5 % žáků označilo tento čtverec jako kosočtverec. Oproti tomu útvar 2A již za čtverec nepovažují pouze 4 % žáků. Vypadá to, jako by čtverec musel být otočen o plných 45° proti prototypické poloze, aby byl vnímán jako kosočtverec. Nabízí se však otázka, co vedlo některé žáky, kteří útvar 2A označili jako čtverec, k tomu, aby útvar 2K jako čtverec nevnímali. Útvar 2M je velmi malý oproti obrázkům z běžných učebnic, avšak je v prototypické poloze a žáci s ním problémy neměli.

Případy ne-čtverců. Nejzajímavější výsledky byly pro případy 2B, 2E, 2J a 2L (obr. 3).



Obr. 3: Případy ne-čtverců

Úkol	Úspěšnost (v %)
2B	54
2C	99
2D	98
2E	87
2F	99
2G	99
2H	91
2I	95
2J	89
2L	59

Tab. 2: Výsledky pro případy ne-čtverců

46 % žáků označilo útvar 2B jako čtverec. Zajímalo mě, zda žáci, kteří otočený čtverec 1A nevnímali jako čtverec, byli ti samí, kteří kosočtverec 2B vnímali jako čtverec. Koeficient korelace mezi úlohami 1A a 2B je 0,14. Můžeme říci, že to, jak se žák rozhodoval v Úloze 1A, nesouviselo s tím, jak se rozhodoval v Úloze 2B.

Měla jsem možnost zeptat se několika žáků, kteří chybovali v úloze 2B, podle čeho usoudili, že daný útvar je čtverec. Odpověď byla v podstatě vždy táž: „Protože má stejně dlouhé strany.“ Zde lze sledovat vývoj pojmu čtverce u jedné skupiny žáků: *Čtverec je čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné.*¹ U těchto žáků lze předpokládat, že mají schopnost analýzy, ale nebylo jim umožněno vytvářet správně představy o pojmu čtverec. Tyto miskoncepce o pojmu čtverec jim mohou vydržet po mnoho let a ovlivňovat úspěšnost řešení geometrických úloh na 2. stupni ZŠ či na střední škole.

Útvary 2E, 2J, 2L jsou útvary, jejichž tvar se blíží tvaru čtverce. Zejména útvar 2L silně připomíná čtverec. Více než 40 % žáků se tím nechalo zmást. Zde je potřeba zmínit, že mnoho hraček a didaktických pomůcek určených pro předškolní a raný školní věk má zaoblené vrcholy (popř. hrany), aby se děti neporanily. Přesto se dětem tvrdí, že útvar se zaoblenými rohy je např. čtverec.

Opět mě zajímala korelace mezi úlohami 1A a 2L. Tentokrát jsem očekávala silnější závislost, protože jsem se domnívala, že by se mohlo jednat o žáky, kteří se řídí podle vizuálních atributů obrazce. Koeficient korelace je však pouhých 0,06.

Mnohem silnější závislost se ukázala mezi útvary 2J a 2L (koeficient korelace 0,36) a 2E a 2L (koeficient korelace 0,43). Zde bychom mohli hledat skupinu žáků, kteří se o čtverci rozhodují na základě vizualizace. Zároveň se domnívám, že žáci, kteří chybně v případě čtverce-kosočtverce (1A) nemusí být ti, kteří setrvávají na úrovni vizualizace, avšak např. nechápou správně předponu *koso*. Místo aby pojem kosočtverec chápali jako zcela jiný útvar, vnímají jej jako čtverec otočený na koso – na šikmo.

Podívejme se ještě na výsledky nejúspěšnější, Montessori třídy.

¹Správně: Čtverec je čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné a sousední strany jsou na sebe kolmé.

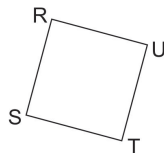
Úkol	Úspěšnost (v %)
2A	100
2B	95
2C	100
2D	100
2E	100
2F	100
2G	100
2H	90
2I	100
2J	100
2K	100
2L	68
2M	100

Tab. 3: Výsledky Úlohy 2 v rámci Montessori třídy

Připomeňme, že se jedná o žáky, kteří v geometrii pravidelně pracují s modely geometrických útvarů, a to dvoj i třírozměrných. Porovnáme-li tyto výsledky (tab. 3) s celkovými výsledky Úlohy 2 (tab. 1 a 2), je patrné, že žáci Montessori třídy ve svých úsudcích o čtverci nečinili tolik chyb. Díky manipulaci s modely a ne-modely probíhá žákův poznávací proces v geometrii přesněji.

Úloha 8. Rozhodni, zda je pravda:

- Úsečka RT je stranou čtverce.
- Úsečka SU je úhlopříčka čtverce.
- Úsečky RU a RT jsou sousední strany.
- Úsečky SR a TU jsou protější strany.
- Strany ST a TU mají různou délku.
- Protější strany ve čtverci mají různou délku.
- Úsečky SU a SR mají stejnou délku.



Pro řešení úlohy je důležitá vizualizace. Žákům by pomohlo, kdyby si zakreslili každý případ zvlášť a barevně si označili uvažované prvky, např. úsečky RU a RT . Pak by bylo jasnější, zda žák

uvažuje správnou úsečku a je schopen jí přiřadit správný název nebo vlastnost. Takový rozklad řešení však nenastal.

Úspěšné řešení Úlohy 8 vyžaduje, aby se žák nacházel na úrovni analýzy. Žáci však měli výhodu, že v případě této úlohy měli 50% šanci uhodnout správnou možnost. Výsledky (tab. 4) je proto třeba brát s rezervou. Přesto je na výsledcích úlohy patrné, že žáci nemají zcela ujasněné základní pojmy, jako jsou *strana čtverce*, *úhlopříčka čtverce*, *sousední strany*, *protější strany*. Někteří žáci např. správně označili úsečku *SU* jako úhlopříčku čtverce, ale hned v další části 2C uvažovali o úsečce *RT* jako o sousední straně strany *RU*. Žáci také nemají příliš jasno ve vlastnostech čtverce, jako je shodnost sousedních stran, shodnost protějších stran, apod.

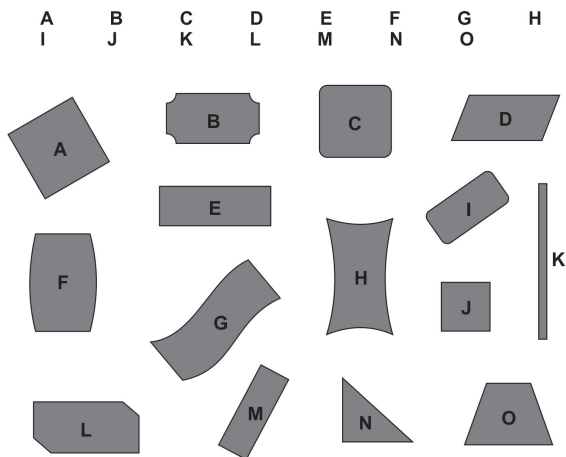
Úkol	Úspěšnost (v %)
8A	81
8B	80
8C	80
8D	72
8E	86
8F	85
8G	58

Tab. 4: Úspěšnost úlohy 8

Úloha 4. Zakroužkuj, které z následujících útvarů (obr. 4) nejsou obdélníky.

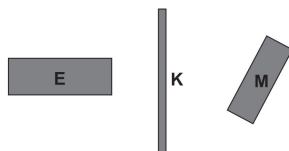
Zadání úlohy je netypické v tom, že úkolem je hledat útvary, které nejsou obdélníky. Někteří učitelé uvedli, že museli žákům důkladně vysvětlit, co se tím myslí, a pro jistotu to ještě několikrát zopakovat, aby žáci nedělali zbytečné chyby. Nakonec se žáci tohoto úkolu zhostili dobře a výsledky nejsou zkreslené.

Opět výsledky rozdělíme do dvou částí – obdélníky a ne-obdélníky.



Obr. 4: Obrázek k Úloze 4

Výsledky Úlohy 4 – obdélníky.



Obr. 5: Případy obdélníků

Úkol	Úspěšnost (v %)
4E	97
4K	89
4M	96

Tab. 5: Úspěšnost Úlohy 4 – případy obdélníků

Útvar 4E je prototyp obdélníku, měl nejvyšší úspěšnost. Otočení u útvaru 4M nebylo pro žáky tak důležité. Nejvíce se nechali žáci zmást neobvyklým tvarem obdélníku 4K, kdy útvar někdy vnímali jako čaru.

Ne-obdélníky. Nejzajímavější výsledky se týkaly útvarů 4D, 4F, 4G, 4H, 4I.



Obr. 6: Případy ne-obdélníků

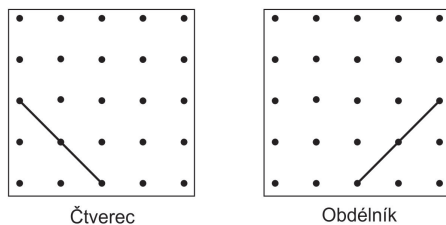
Úkol	Úspěšnost (v %)
4A	99
4B	88
4C	97
4D	44
4F	79
4G	77
4H	81
4I	69
4J	98
4L	87
4N	97
4O	96

Tab. 6: Úspěšnost Úlohy 4 – případy ne-obdélníků

Lze sledovat určitou analogii s výsledky Úlohy 2. Např. kosodélník 4D 56 % žáků chápalo jako obdélník. Opět bychom asi našli stejný argument, a to dvojice shodných stran. Zdánlivé modely obdélníku 4F, 4G, 4H, 4I byly často vnímány jako obdélníky. Nejčastěji útvar 4I, který 31 % žáků vnímalo jako obdélník. Opět připomeňme zkušenost mnohých dětí se zaoblenými rohy útvarů. Ale překvapivě i útvar 4G byl ve 23 % případů chápán jako obdélník. Tento útvar snad někomu může připomínat vlajku ve větru, a když ji narovnáme, získáme obdélník.

Koeficient korelace mezi útvary 4I a 4G je 0,58, mezi útvary 4I a 4H je 0,48. Kopáčová a Žilková (2016) se zabývaly implikačními vztahy mezi těmito třemi útvary a zjistily, že mezi nimi existuje velmi silný vztah. Jestliže žák uměl identifikovat útvar 4I, pak uměl identifikovat také útvar 4G, a pokud uměl identifikovat útvar 4G, uměl identifikovat 4H. Z těchto tří útvarů byla pro žáky nejjednodušší identifikace útvaru 4H (Kopáčová & Žilková, 2016).

Úloha 10. Nakresli libovolný čtverec a obdélník, je-li dána jedna jejich strana (obr. 7).



Čtverec

Obdélník

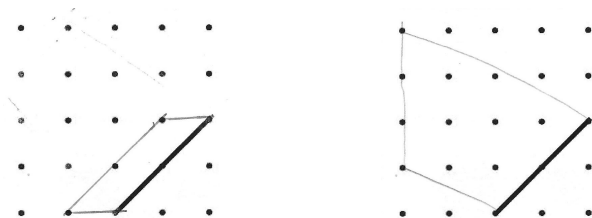
Obr. 7: Obrázek k Úloze 10

Úkol	Úspěšnost (v %)
Čtverec	96
Obdélník	85

Tab. 7: Úspěšnost Úlohy 10

Přestože 38 % žáků považuje čtverec stojící na vrcholu za kosočtverec, v tomto případě jim nevadila zešikma umístěná úsečka a čtverec většinou zakreslili správně. Buďto tedy zaměňují pojmy čtverec a kosočtverec, ale nejpravděpodobněji se jeví, že pro ně kosočtverec je „čtverec otočený na koso“.

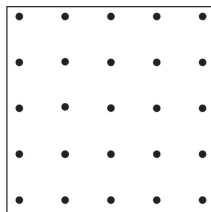
Nejčtenější chybou u obdélníku bylo zakreslení kosodélníku (obr. 8), ale objevovaly se i různé jiné obrazce.



Obr. 8: Ukázka špatných řešení pro obdélník (Úloha 10)

Úloha 11. Napiš názvy všech čtyřúhelníků, které znáš a zakresli je do čtvercové sítě.

Žákům bylo nabídnuto šest následujících čtvercových sítí.



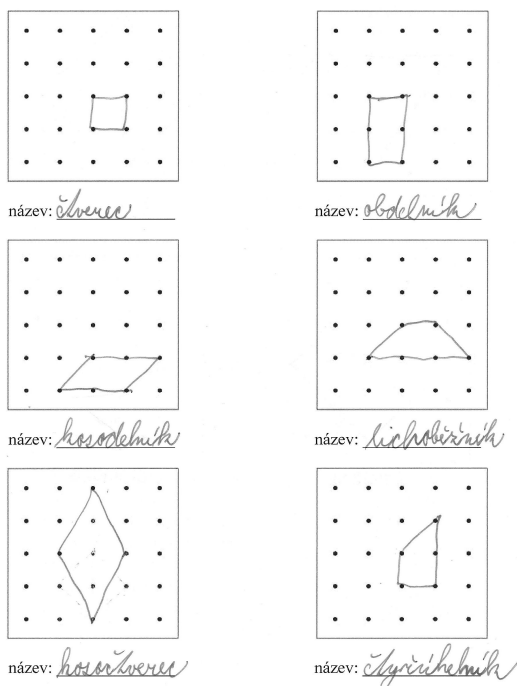
Obr. 9: Obrázek k Úloze 11

V odpovědích se téměř výlučně objevovaly čtverec a obdélník, někdy také kosočtverec, který byl však obvykle zakreslen jako čtverec. Názvy dalších čtyřúhelníků se objevovaly výjimečně (tab. 8).

Úkol	Úspěšnost (%) Všechny třídy	Úspěšnost (%) Montessori
Čtverec	88	100
Obdélník	79	79
Kosočtverec	15	100
Kosodélník	9	73
Lichoběžník	6	63

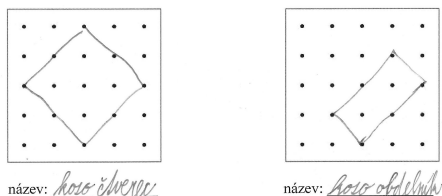
Tab. 8: Úspěšnost Úlohy 11

Správně zakreslit kosočtverec dokázalo 15 % žáků, pojmy koso-
délník či lichoběžník jsou pro většinu z nich neznámé. Pro srovnání
uvádíme také výsledky Montessori třídy (tab. 8), kde 100 % žáků
správně zakreslilo kosočtverec, mnoho z nich správně znázornilo
kosodélník a lichoběžník. Na obr. 10 je ukázka řešení Úlohy 11 žá-
kem Montessori třídy. Můžeme si všimnout, že nezapisuje správně
slova obdélník a kosodélník.



Obr. 10: Řešení Úlohy 11

Na obr. 11 vidíme řešení Úlohy 11 žákyně klasické třídy. Tato
žákyně měla v řešení Úlohy 11 totožné obrázky pro čtverec a ob-
délník jako na obr. 11. Stejně obrazce nazvala v Úloze 11 koso
čtverec a koso obdélník (správně kosodélník). Odděluje předponu
koso- jako samostatné slovo. To nás opět navádí na vnímání „koso
obdélníku“ jako obdélníku otočeného na koso.



Obr. 11: Ukázka řešení Úlohy 11

Pro zajímavost uvádím tab. 9 s intervaly úspěšnosti pro úkoly týkající se čtyřúhelníků. Vidíme, že někteří žáci všeobecně nadaní, u kterých se někdy předpokládá, že jim půjde všechno, dosáhli v dané části geometrického testu slabých výsledků. Naopak žáci s ADHD, kteří bývají v matematice někdy chápáni jako nešikovní, si vedli velmi dobře. Dyskalkulie žáky limituje jak v aritmetice, tak v geometrii. Přesto dva žáci s dyskalkulií dokázali v dané části testu získat více než 70 % bodů.

Úspěšnost	Počet žáků	Specifikace žáků
100 %	5	Oba matematicky nadaní žáci
95–99 %	10	
90–94 %	25	Tři žáci s dyslexií nebo dysgrafií, jeden žák se všeobecným nadáním
80–89 %	92	9 žáků s dyslexií nebo dysgrafií, 4 žáci se všeobecným nadáním, 1 žák s ADHD
70–79 %	49	7 žáků s dyslexií nebo dysgrafií, 1 žák se všeobecným nadáním, 4 žáci s ADHD, 2 žáci s dyskalkulií
60–69 %	27	2 žáci s dyslexií nebo dysgrafií, 3 žáci s ADHD
50–59 %	13	2 žáci s dyslexií nebo dysgrafií, 1 žák s ADHD
40–49 %	2	1 žák s dyslexií, 1 žák s dyskalkulií
30–39 %	3	2 žáci se všeobecným nadáním

Tab. 9: Intervaly úspěšnosti pro úkoly týkající se čtyřúhelníků

Závěr

V částech testu týkajících se pojmů čtverec a obdélník jsme se nejčastěji setkali s těmito chybami:

1. Zaměňování čtverce a kosočtverce v obou směrech – čtverec otočený o 45° oproti prototypické poloze je někdy vnímán jako čtverec, jindy jako kosočtverec, záleží na kontextu; kosočtverec postavený na základnu bývá mnohdy vnímán jako čtverec.
2. Zdánlivé modely čtverce a obdélníku bývají často vnímány jako modely.
3. Aktivně žáci 4. ročníku ovládají pouze dva čtyřúhelníky, a to čtverec a obdélník. V obou případech mají však často vytvořeny miskoncepce o daných pojmech.

Ve výsledcích jsme mohli sledovat dvě skupiny žáků se špatnými představami o pojmech. Jedna skupina žáků si vytváří nesprávnou představu pojmu čtverec, a to jako „čtyřúhelníku, který má všechny strany shodné“. Domnívám se, že tito žáci by měli šanci se pohybovat na úrovni analýzy, kdyby k tomu dostali příležitost.

Jedna skupina žáků necítí potřebu posouvat se ve směru k analýze a zůstává na úrovni vizualizace. Pro tyto žáky představují zdánlivé modely zástupce daného pojmu. Tito žáci by mohli být nuceni prostřednictvím vhodných aktivit začít uvažovat analyticky.

Někteří žáci považují „čtverec stojící na vrcholu“ za kosočtverec. Ukázalo se, že se nemusí jednat o případ, kdy je žák na úrovni vizualizace. Souhrou několika okolností – kdy žák zná termín kosočtverec z běžného života, ale není mu vysvětlen, a desinterpretuje předponu koso – se žák může skutečně domnívat, že otočením ze čtverce vznikne kosočtverec. Je ale třeba také říci, že anglicky mluvící žáci nemají problém s předponou koso (čtverec je square a kosočtverec je rhombus), ale uvedené chyby se dopouštějí rovněž.

Na příkladu Montessori třídy jsme mohli vidět, že žáci, kteří v hodinách geometrie manipulují s konkrétními modely geometrických útvarů, si vytvářejí představy o pojmech přesněji. Viděli

jsme, že ne u všech žáků Montessori třídy probíhal poznávací proces dokonale, ale výrazně se snižuje riziko vzniku různých miskoncepcí. Vzhledem k tomu, že se nejedná o výběrovou třídu žáku s vyšším IQ nebo matematicky nadaných, lze se výsledky Montessori třídy inspirovat i v běžné výuce matematiky.

Literatura

- [1] Arnas Aktas, Y. & Aslan, A. G. D. (2010). *Children's Classification of Geometric Shapes*. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi.
- [2] Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years*, (66–79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [3] Hannibal, M. A. Z. & Clements, D. H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes*. National Science Foundation, Grant number: ESI-8954644.
- [4] Kopáčková, J. & Žilková, K. (2016). Predstavy a milné predstavy žiakov o obdĺžnikoch. In, *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Ružomberok: Verbum.
- [5] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.

Abstract

Geometric shapes are one of the first subjects in mathematics education during the early stage of elementary school. Children form conceptions about the concepts on the basis of their experiences. Some of these early conceptions about geometric shapes might be incorrect, which might negatively impact children's further understanding of geometric shapes. For that reason, exploring how children recognize and classify geometric shapes is important in determining the content of early mathematics education. Developing geometric thinking is a long-term path and requires an

informal encounter of pupils with geometric concepts and their properties. The first years of education are really essential because intuitive perceiving of the world is developed. In this study, we show some ways of forming conceptions of the concept square and rectangle in children of the fourth grade.

Irena Budínová

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity

Poříčí 31

603 00 Brno

e-mail: irena.budinova@seznam.cz