Jana Příhonská; Jiří Břehovský

Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 4, 215–231

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149108`

ROZVÍJENÍ KOMBINATORICKÉHO MYŠLENÍ NA PRVNÍM STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Jana Příhonská, Jiří Břehovský[1]

Rozvíjení kombinatorického způsobu myšlení je přípravou na praktické využití statistických a pravděpodobnostních metod. Vhodné motivační metody ve své různorodosti podporují hlubší vztah k systematické kombinatorické hře, která je základem dalších užitečných představ a postupů kombinatorické analýzy nejen v teoretických vědních oborech, ale i technických a technologických aplikacích.

Správným didaktickým postupem můžeme žáky vést k hlubší analýze počtu prvků daných podmnožin s konkrétními vlastnostmi. Kombinatorika navazuje na školské učivo, vhodně ho doplňuje jako součást nestandardních aplikačních úloh. Při jejich řešení žáci samozřejmě nepracují se známými vzorci a kombinatorickými pojmy, ale prostřednictvím manipulace s určitými objekty experimentují a hledají možná řešení nebo využívají např. grafického znázornění ve formě vhodných schémat.

Rozvoj kombinačního myšlení zahrnuje podle Blažkové, Matouškové a Vaňurové (1998: s. 1, 2) vytváření a rozvíjení následujících specifických schopností a dovedností:

- uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,
- uvědomovat si, zda v daném souboru mohou existovat skupiny prvků požadovaných vlastností,
- provádět výběr prvků z nějaké skupiny podle určitého pravidla,
- provádět rozdělování prvků dané skupiny na základě určitého požadavku,
- provádět uspořádání prvků dané skupiny daným způsobem,

[1] Příspěvek byl podpořen řešením grantu SGS 2016 na FP TUL v Liberci.

- najít metodu vyhledávání všech skupin prvků s požadovanou vlastností (např. výčtem prvků, graficky, s využitím vztahů nebo vzorců),
- rozhodnout, zda jde o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,
- rozlišit, zda se prvky ve skupinách mohou či nemohou opakovat,
- najít pravidlo pro vyhledávání všech skupin splňujících podmínky dané úlohy.

Kombinační myšlení potřebujeme v každodenním životě, je nezbytné při vytváření systémů u mnoha prováděných činností či organizaci práce. K rozvoji kombinačního myšlení u žáků využíváme vhodně zvolené kombinatorické úlohy či problémy. Důležitou roli zde hraje motivace – žáky musíme vhodně stimulovat takovými aktivitami a činnostmi, které je vedou od nahodilých pokusů k systematickému hledání všech možných řešení. Tak můžeme docílit toho, že žák pochopí, že mnoho věcí v běžném životě se děje systematicky.

Co rozumíme kombinatorickým problémem?

Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, je potřeba si nejprve ujasnit, co je vlastně kombinatorika a co je jejím předmětem. Kombinatorika je částí matematiky, která se (jak je z názvu jasné) zabývá kombinováním všeho možného (při sportovním turnaji kombinujeme družstva, můžeme je přiřazovat do různých skupin, kombinujeme oblečení, plánujeme cestu apod.).

Vznik kombinatoriky asi nelze přesně zařadit do nějakého historického období. Vyvíjela se průběžně s potřebou člověka, který chtěl znát odpovědi na svoje nejrůznější otázky, týkající se tohoto tématu. Kombinatorika na rozdíl od mnohých jiných částí matematiky nepochází z Řecka. Pravděpodobně první kombinatorické náznaky pocházejí z roku 2200 př. n. l. a jsou spojeny s pojmem „konfigurace“. S tímto pojmem se můžeme setkat v posvátné knize *I-ťing* (tj. *Kniha proměn*), blíže viz Fuchs (2000). Konfigurace je pojem, který bychom mohli charakterizovat jako zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou – za elementární konfigurace můžeme považovat variace, permutace, kombinace, dále pak např. rozklady konečných množin, rozklady přirozených čísel na sčítance, rozdělování předmětů do přihrádek. Jednotlivé konfigurace obsahují skupiny bodů, z kterých, když je nahradíme čísly, získáme např. známé magické čtverce. Obecně vzato je magickým čtvercem nazýváno jakékoliv čtvercové schéma nejrůznějších objektů, nejčastěji čísel nebo písmen, rozmístěných podle nějakých pravidel.

Kombinatorickým problémem či úlohou pak rozumíme takový problém, kde cílem je vytváření právě nejrůznějších „konfigurací“. U daných konfigurací a schémat, kdy vybíráme prvky z předem určené konečné množiny, musíme rozlišit, zda záleží či nezáleží na pořadí výběru. Nemusí se však nutně jednat pouze o výběr skupiny prvků, ale za kombinatorický problém považujeme i úlohu, která vede k přeuspořádání dané skupiny prvků, změně obrazce, změně útvaru apod. Pomocí takovýchto problémů rozvíjíme u žáků logické uvažování a řešitelské strategie s ohledem na budoucí využití ve studiu či běžném životě. Jak již bylo řečeno, důležitou roli v tomto ohledu hraje motivace – vzbudit zájem žáka řešit tento typ problémů a hledat co nejvíce způsobů řešení.

Kombinatorika na prvním stupni

Školská kombinatorika je podstatnou součástí matematické kultury vzdělávání. Řadu kombinatorických problémů lze velmi snadno zformulovat, avšak jejich řešení bývá mnohdy velmi obtížné. Podle upravených STANDARDŮ pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace s účinností od 1. září 2013 je očekávaným výstupem RVP ZV stanoveno, že žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky. Při řešení problémů užívá logickou úvahu a kombinační úsudek a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Kombinatorika jako taková není v RVP pro ZV explicitně uvedena, ale její základní principy se nepřímo využívají při řešení nestandardních aplikačních úloh a problémů. Lze ji využít např.

v tematickém okruhu Číslo a proměnná. Prvky kombinatoriky nalezneme v učivu numerace v oboru přirozených čísel, číslo a operace s přirozenými čísly a v části učiva geometrie. K nalezení všech možných řešení daného problému využívají žáci logické úvahy a základní kombinatorické principy. Domníváme se proto, že vhodnému zařazování kombinatorických úloh a problémů do učiva matematiky by měla být věnována značná pozornost.

Ve spolupráci se studenty FP TUL, kteří jsou spoluřešiteli grantu SGS, byla za tímto účelem provedena rekognoskace do několika učebnicových řad (SPN – Barevná matematika, Alter, Fortuna, Studio 1+1, Prodos, Didaktis, Fraus, Nová škola) a částečná sondáž v přijímacích testech na víceletá gymnázia z hlediska jednotlivých typů a četnosti zastoupení kombinatorických úloh. Úlohy, které využívají základní kombinatorické úvahy, jsou zařazeny v podstatě ve všech učebnicích matematiky, jež jsou využívány na prvním stupni. Jejich zařazení je však v jednotlivých ročnících u různých nakladatelství rozdílné. Nejčastěji zde nalezneme úlohy s čísly, zaměřené na kombinování v rámci procvičování početních operací. Naším cílem není na tomto místě provést kompletní analýzy jednotlivých učebnicových řad, nicméně v souladu se závěry, které uvádí Babáková (2007), zabývající se nestandardními typy úloh pro výuku matematiky na prvním stupni (a kombinatorické úlohy mezi tyto úlohy patří), můžeme konstatovat, že

- úlohy v učebnicích jsou většinou zaměřené na využití osvojeného algoritmu,
- vedou a jsou směrovány k osvojení jednotlivých dovedností – chybí však jistá komplexnost v propojení získaných znalostí a dovedností,
- chybí mezipředmětové vazby – úlohy postrádají propojení mezi jednotlivými vzdělávacími okruhy v jednotlivých předmětech,
- shledáváme nedostatečné propojení s reálnou situací.

Přijímací testy z matematiky vycházejí obsahově z učiva pro základní školy a typy úloh odpovídají typům zařazených v jednotlivých učebnicích. Matematické přípravě žáků k přijímacím zkouškám na osmiletá gymnázia je věnována řada publikací. Konkrétní ukázky přijímacích testů z matematiky je pak možné nalézt přímo na webových stránkách různých gymnázií. Mnohá gymnázia nevytvářejí pro účel přijímacích zkoušek vlastní testy, ale využívají služeb společnosti SCIO. Na webových stránkách www.scio.cz je k nahlédnutí několik ukázkových testů včetně řešení. Další ukázky nalezne čtenář v uvedených zdrojích na konci článku.

Ukazuje se, že kombinatorické problémy prolínají ve větší či menší míře většinu učebnic i přijímacích testů. V následující části se proto zaměříme na některé aktivity, které mohou přispět k rozvoji schopnosti žáků řešit tyto problémy.

Aktivity rozvíjející kombinační myšlení žáka

Nestandardní aplikační úlohy a problémy, při nichž je nutno uplatnit právě logické myšlení a schopnost řešit je, tvoří důležitou součást matematického vzdělávání. Žáci mohou řešit problémy týkající se, např. různých staveb věží za použití barevných kostek, kombinování oblečení, nákupů, rozdělování peněz, sázení květin na zahrádce apod. K rozvíjení logicko-kombinačního myšlení žáků (nejen na prvním stupni základní školy) lze s výhodou jako vhodné didaktické pomůcky využít více či méně známé společenské hry (Rummikub, Domino, Člověče nezlob se, Kostky, Logic, Scrable . . .). V našem pojetí budeme nestandardní aplikační úlohou rozumět úlohu, kdy budeme využívat právě zmíněné hry. Nechceme navrhovat pouze samostatné problémy, ale soustředíme se na komplexní aktivity, kdy žáky motivujeme různými manipulativními činnostmi prostřednictvím jemu známé či neznámé hry. Při navrhování aktivit zaměřujeme pozornost na využití základních kombinatorických principů tak, aby došlo k jejich bezděčnému využívání při řešení celé řady kombinatorických problémů, které jsou zařazeny v učebnicích a jsou součástí přijímacích testů na osmiletá gymnázia.

Vycházíme přitom ze souboru elementů řešení kombinatorických úloh, které mají svůj základ u G. Polyi, byly přetransformovány M. Hejným (2001) a následně modifikovány Scholtzovou (2003):

- Analýza textu a získání vhledu do úlohové situace
- Výběr vhodné metody a strategie řešení
- Výpis (vyjmenování) všech možností
- Propedeutika pro pravidlo součinu
- Propedeutika pro pravidlo součtu – dovednost třídění
- Kdy jsou dva objekty stejné, sobě rovny
- Grafické znázornění
- Divergentní úlohy – rozvoj divergentního myšlení
- Uspořádání versus neuspořádání
- Prvky v objektu (nejvýše jednou, právě jednou, vícekrát)
- Organizace systému
- Interpretace výsledku
- Vytvoření úlohy

V další části představíme první z uvedených her a nabídneme některé aktivity, které lze realizovat s využitím karet, resp. hracích kamenů z dané hry.

Hra myRummy nebo Rummikub (stejný princip hry)

Obr. 1: myRummy

Popis hry. Tato hra (obr. 1) se v mnohém podobá známé kartové hře Žolíci. Přesto nabízí mnohem větší množství kombinací. Hra obsahuje 108 karet ve čtyřech barvách (modrá, zelená, červená, žlutá), každá barva obsahuje 2krát 13 karet s hodnotami 1–13, dále 4 žolíky a čtyři stojany na karty.

Každý hráč na začátku hry obdrží stojan (je součástí hry), do něhož si umístí 14 vylosovaných karet tak, aby je protihráči neviděli. Zbytek karet se skrytě odloží na hromádku. Vylosuje se, který hráč začíná, a hraje se po směru hodinových ručiček.

Kdo je na řadě, musí buď vyložit – pokud může nebo chce – nebo si přibere do svého banku kartičku z hromádky. Při prvním vyložení musí být po sečtení všech hodnot karet dosaženo minimálně hodnoty 30 bodů. Pokud hráč nemá na první vyložení dostatečný počet bodů, musí si přibírat karty do svého banku z hromádky, až nasbírá dostatečný počet bodů. Hráč může karty vykládat buď jako postupku minimálně tří karet stejné barvy, nebo jako trojici či čtveřici karet stejné hodnoty, ale různé barvy. V každém výkladu se může použít i Joker – Žolík, který nahradí libovolnou kartu. Každý hráč musí své kolo odehrát za dvě minuty – pokud se tak nestane, musí si vzít zpět své karty, se kterými dané kolo pracoval. Každý hráč, který již vyložil na třicet bodů, smí přikládat, různě přeskupovat a kombinovat karty na stole již vyložené, avšak tyto použité karty musí být ve stejné hře opět vyloženy.

Při hře myRummy záleží na tom, aby se hráč zbavil obdržených karet šikovným sestavováním postupek a sad nebo dokládáním ke stávajícím postupkám či kombinacím. V okamžiku, kdy se hráč zbaví všech karet, hra končí.

Dále navrhujeme aktivity, které lze pomocí hry realizovat. Navržené aktivity využívají hracích karet (kamenů) a směřují k systematickému hledání všech možností, uvědomění si, že i nevelké množství prvků nabízí mnoho možností řešení, využívají manipulativní činnosti žáka, procvičují paměť a vedou k procvičení početních dovedností. Při jednotlivých aktivitách nepracujeme se Žolíky. Uvedené aktivity vycházejí z námětů seminárních prací studentů TU v Liberci Povondrová (2016), Skořepová (2016), jsou volně zpracovány, upraveny a doplněny o další náměty a metodické poznámky.

Aktivity

- Sestav příklad
  - se všemi kameny (kartami)
  - s vybranými kameny (kartami)
- Vytvoř/Doplň příklad
- Najdi číslo
- Bankéř
- Stejná barva

Sestav příklad

Varianta 1. Sestavit co nejvíce příkladů včetně výsledků z kamenů 1 až 9 a kamenů 11, 11, 12, 12, 13, 13 (obr. 2). Kameny se v rámci jednoho příkladu nemohu opakovat, v rámci více příkladů ano. Žáci druhého ročníku tvoří příklady na sčítání a odčítání, žáci třetího ročníku přidají příklady na násobení a dělení.

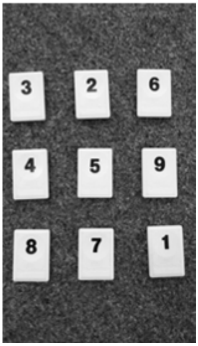
Obr. 2: Sestav příklad – varianta 1

Metodické poznámky s řešením. Některá možná řešení jsou $11 + +12 = 23$, $12 \cdot 6 = 72$, $123+34 = 157$, $111+125 = 236$, $13+13 = 26$.

Obr. 3: Sestav příklad – varianta 1 (kameny)

Zde je nutno poznamenat, že kartu s dvojčíslím např. 11 lze použít k vytvoření trojciferného čísla 111, což nabízí mnohem více variant pro nalezení příkladů (obr. 3). Žáci si uvědomují pojem číslo, číslice, dvojčíslí, využívají manipulativní činnosti k přesouvání jednotlivých karet.

Varianta 2. Sestavit co nejvíce příkladů užitím karet 1 až 9 (obr. 4). Kameny se v rámci jednoho příkladu nemohou opakovat, v rámci více příkladů ano. Žáci druhého ročníku tvoří příklady na sčítání a odčítání, žáci třetího ročníku přidají příklady na násobení a dělení.



Obr. 4: Sestav příklad – varianta 2

Metodické poznámky s řešením. Některá možná řešení $235+746 =$ $= 981$; $156+87 = 243$; $32+49 = 81$; $6\cdot 9 = 54$; $9\cdot 6 = 54$; $4+5 = 9$; $5 + 4 = 9$; $8 \cdot 7 = 56$; $7 \cdot 8 = 56$; $54 : 9 = 6$ atd.

Úloha divergentního charakteru, ověřuje vyšší stupeň žákovské tvořivosti – vytváření úlohy. V zadání je v tomto případě specifikováno, zda se číslice mohou opakovat či nikoli, nicméně je možno modifikovat zadání a nechat žáky samostatně rozhodovat o možnosti opakování či nikoli (toto by měli objevit nakonec sami na základě používaných kamenů).

Uvědomění si vlastností početních operací (komutativnost).

Vytvoř/Doplň příklad

Varianta 1. Žáci mají za úkol sestavit co nejvíce správných příkladů, ve kterých použijí dané číslice a dané znaky. K dispozici mají karty s číslicemi 1, 2, 4, 9 (určí učitel) a znaky pro rovnost, sčítání, odčítání, násobení a dělení ($=$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$). Tyto karty je nutno dodělat samostatně. Stejně tak je nutno doplnit kartičku s označením „zb“.

Metodické poznámky s řešením. Správné řešení

$2+2=4$	$2\cdot 1=2$	$9:4=2$ zb. 1
$2+4+2+1=9$	$2\cdot 2=4$	$9:2=4$ zb. 1
$1+1+2=4$	$2\cdot 4+1=9$	$4:2+1+1=4$
$9+1+2=12$	$2\cdot 9+1=19$	$1\cdot 9+4:2=11$
atd.		$4:2+2=4$

Kombinatorická úloha divergentního charakteru, která ověřuje vyšší stupeň žákovské tvořivosti – vytváření úlohy. V zadání není specifikováno, zda se číslice resp. symboly mohou vícekrát opakovat v jedné úloze. Žáci využívají karet všech barev, takže mají možnost využít každou číslici čtyřikrát. Dobrou vizitkou žáků je, pokud vytvářejí i dvojciferná čísla, příp. víceciferná s více početními operacemi.

Varianta 2. Doplňte chybějící číslice

$$
\begin{array}{cccc}
 & 4 & * & 7 \\
 & 1 & 6 & 3 \\
 & * & 2 & 2 \\
\hline
* & 2 & 3 & 2
\end{array}
$$

Mezi dané číslice (aniž byste měnili jejich pořadí) vložte znaky početních operací, aby platily rovnosti

$1\ \ 2=2$	$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6=2$
$1\ \ 2\ \ 3=2$	$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7=2$
$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4=2$	$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8=2$
$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5=2$	$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9=2$

Metodické poznámky s řešením. Tato aktivita souvisí s předchozí aktivitou, kdy můžeme žákům předložit číselné schéma, a žáci doplňují znaménka početních operací nebo hledají naopak chybějící číslice. Je přípravnou fází na řešení algebrogramů – žáci si uvědomují jednotlivé početní spoje.

Procvičování číselných operací.

Řešení:

$1 \cdot 2 = 2$	$(1+2) \cdot 3 + 4 - 5 - 6 = 2$
$1 - 2 + 3 = 2$	$1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 + 5 - 6 - 7 = 2$
$1 \cdot 2 \cdot 3 - 4 = 2$	$1 - 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 = 2$
$(1 \cdot 2 \cdot 3 + 4) : 5 = 2$	$1 + 2 - 3 + 4 \cdot 5 + 6 - 7 - 8 - 9 = 2$

Najdi číslo

Varianta 1. Žáci při výkladu postupky tří karet (omezíme se jen na postupky z čísel 1–9) vytvoří z daných karet všechny varianty trojciferných čísel. Daná řešení žáci zapisují na papír. Následuje společná kontrola s protihráči (popř. učitelem).

Metodické poznámky s řešením. Řešení: Dejme tomu, že je vytvořena postupka z karet 1, 2, 3. Celkem k této postupce existuje šest řešení: 123, 132, 213, 231, 312 a 321.

Jedná se o permutaci bez opakování, tj. řešením je $P(3) = 3! = 6$.

Varianta 2. Žáci pracují ve skupinách (2–4 žáci) a mají za úkol z dané postupky čtyř karet (karty předem určí učitel) vytvořit všechny varianty čtyřciferných čísel. Daná řešení žáci zapisují na papír. Skupina s nejvyšším správným počtem řešení vyhrává. Následuje společná kontrola s učitelem.

Metodické poznámky s řešením. Řešení: Např. z postupky 1, 2, 3, 4 je možno vytvořit 24 čtyřciferných čísel:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Pokud žáci zapíší nalezená čísla dle výše uvedeného schématu, ukazuje to na dobrý organizační princip v hledání, využití systému a správné řešitelské strategie.

Jedná se o permutaci bez opakování, tj. řešením je $P(4) = 4! = 24$.

Doprovodnou aktivitou může být uspořádat daná čísla od nejmenšího k největšímu.

Varianta 3. Vhodná pro menší děti. Místo číselné postupky žáci pracují se sadami karet různých barev. Každá skupina, dvojice nebo jednotlivec pracuje s 3 kartami různých barev (např. černou, zelenou a fialovou). Úkolem všech je seskupovat různé barevné varianty těchto tří karet. Každé uspořádání se musí tedy skládat ze všech tří karet. Žáci v prvé řadě manipulují s kartami a také si musí uvědomit, že záleží na pořadí karet. Všechna objevená řešení si malují pastelkami na papír. Úkol žákům můžeme trochu zjednodušit tím, že jim řekneme, že variant lze vytvořit šest.

Metodické poznámky s řešením. V rámci zadání není explicitně řečeno, že číslice se neopakují, ze zadání však tato informace vyplývá. Někteří žáci dokážou určit počet všech hledaných čísel bez vypisování všech možnosti intuitivně, s využitím kombinatorického pravidla součinu. Pokud hledání všech čísel bude nahodilé, žáci nemusejí všechna řešení zdaleka nalézt. Zde je třeba jim ukázat, že systematický výpis všech možností je zcela namístě.

Varianta 4. Můžeš použít dvě čtyřky a čtyři šestky. Vypiš všechna šesticiferná čísla menší než 600 000, která můžeš pomocí těchto číslic vytvořit. Uspořádej tato čísla od nejmenšího po největší.

Metodické poznámky s řešením. V typickém žákovském řešení se nejprve objeví nesystematicky vytvořená šesticiferná čísla z daných číslic (někdy i všechna) a následně jsou uspořádána dle zadání. To ukazuje na skutečnost, že pro daného žáka je problematické registrovat a uplatnit současně dvě různé podmínky pro řešení úlohy. Pokud žák vyřeší úlohu ihned následovně:

$$446\,666,\ 464\,666,\ 466466,\ 466\,646,\ 466\,664,$$

svědčí to o jeho dobrých schopnostech ve smyslu nalezení organizačního principu a vytvoření jistého systému v řešení problému.

Úlohu můžeme učinit obtížnější změnou počtu číslic či přidáním dalších číslic nebo odstraněním podmínky ze zadání.

Bankéř

Varianta 1. Najít všechny možné kombinace součtů tří čísel tak, aby výsledek byl 30 (nutný počet bodů při prvním vyložení karet z banku při hře myRummy). Žáci mají k dispozici pouze karty ze sady hry myRummy, tj. 8 sad čísel 1–13.

Po nalezení všech kombinací žáci určí, které z nich se dají prakticky při hře využít (sady, postupky) a které ne – samozřejmě bez ohledu na barvu karet.

Metodické poznámky s řešením. Existuje celkem 12 možností:

$13+13+4=30$	$12+12+6=30$	$11+11+8=30$
$13+12+5=30$	$12+11+7=30$	$11+10+9=30$
$13+11+6=30$	$12+10+8=30$	$10+10+10=30$
$13+10+7=30$	$12+9+9=30$	
$13+9+8=30$		

Prakticky se při hře myRummy dají využít jen 2 příklady:
$10+10+10=30$ (sada)
$9+10+11=30$ (postupka)

Varianta 2. Tato verze je vhodná pro starší děti. Žáci pracují ve skupinách (nejlépe po 4), společně hledají a kontrolují svá řešení. Postup je stejný jako u první varianty. Tentokráte ale učitel upozorní žáky, že na pořadí sčítanců záleží.

Metodické poznámky s řešením. Existuje celkem 55 možností (v závorce vždy uvedený počet možností pro jednotlivé varianty):

$13+13+4=30$ (3)	$12+12+6=30$ (3)	$11+11+8=30$ (3)
$13+12+5=30$ (6)	$12+11+7=30$ (6)	$11+10+9=30$ (6)
$13+11+6=30$ (6)	$12+10+8=30$ (6)	$10+10+10=30$ (1)
$13+10+7=30$ (6)	$12+9+9=30$ (3)	
$13+9+8=30$ (6)		

Procvičujeme pamětné počítání.

U příkladu 10+10+10 = 30 se jedná o permutaci s opakováním $P'_3(3) = 3!/3! = 1$; u příkladů, kde jsou dva sčítanci stejní, využíváme permutaci s opakováním $P'_{2,1}(3) = 3!/(2! \cdot 1!) = 3$, u ostatních příkladů se jedná o permutaci bez opakování $P(3) = 3! = 6$.

Stejná barva

Zjistit nejmenší počet karet, který musíme z hromádky karet vytáhnout, abychom určitě měli daný počet karet stejné barvy. Žáci mají k dispozici 2×13 karet s čísly 1–13 ve čtyřech barvách (bez karet Joker).

Varianta 1 – lehčí verze. Žáci na samém začátku hry, kdy si vybírají 14 karet z hromádky skrytých karet do svého banku, mají za úkol určit (spočítat) nejmenší počet karet, který musí z hromádky vytáhnout, aby určitě měli 2 (3, 4) karty stejné barvy.

Metodické poznámky s řešením. Procvičujeme systematický výběr, pamětné či písemné počítání, logickou úvahu.

V sadě se vyskytují 4 různé barvy (černá, šedá, zelená a fialová).
2 karty stejné barvy – musíme vytáhnout nejméně 5 karet
3 karty stejné barvy – musíme vytáhnout nejméně 9 karet
4 karty stejné barvy – musíme vytáhnout nejméně 13 karet

Obecný vzorec: $p = (n - 1) \cdot 4 + 1$, kde p je počet tažených karet, n je požadovaný počet karet stejné barvy.

Varianta 2 – těžší verze. Žáci mají za úkol určit (spočítat) nejmenší počet karet, který musí z hromádky vytáhnout, aby určitě měli 2 (3, 4, . . . , 26) karty černé (šedé, zelené, fialové) barvy.

Metodické poznámky s řešením. V sadě se vyskytují 4 různé barvy (černá, šedá, zelená a fialová), a to vždy 26 karet určité barvy.
2 karty černé barvy – musíme vytáhnout nejméně 80 karet
3 karty černé barvy – musíme vytáhnout nejméně 81 karet
4 karty černé barvy – musíme vytáhnout nejméně 82 karet atd.

Obecný vzorec: $p = 3 \cdot 26 + n$, kde p je počet tažených karet, n je požadovaný počet karet určité barvy.

Místo barev žáci mohou určovat nejmenší počet karet se stejnými čísly.

Závěr

Aspekty didaktické transformace kombinatorických pravidel do učiva 1. stupně se zabývalo již mnoho renomovaných matematiků i odborníků v oblasti teorie vyučování matematice, např. Hejný (1990), Divíšek (1989). Metody, které kombinatorika využívá při řešení problémů, se mnohdy značně liší od těch klasických a právě proto se může stát kombinatorika atraktivní součástí matematiky. A to nejen z pohledu žáků, které tradiční úlohy mohou již nudit, ale též z pohledu úspěšných řešitelů různých matematických soutěží či z pohledu žáků méně úspěšných při řešení standardních matematických problémů. Právě jednoduché kombinatorické problémy mohou tyto žáky zaujmout, umožnit jim získat nový pohled na matematiku a být úspěšný. Široká škála kombinatorických úloh přináší do hodin matematiky často nestandardní, nové situace, se kterými se žák může setkávat v běžném životě a jejichž řešení vyžaduje netradiční a v mnoha směrech tvořivý přístup. Na prvním stupni žáci tyto úlohy samozřejmě neřeší pomocí vzorců obsahujících faktoriály, ale využívají experimentu, příp. vhodného grafického znázornění např. pomocí diagramu, resp. stromů. V neposlední řadě si žáci při řešení těchto úloh osvojují základní početní algoritmy, objevují vlastnosti početních operací a nacházejí či využívají zcela originální vlastní přístupy k řešení úloh.

Literatura

[1] Babáková, V. (duben, 2007). *Sbírka nestandardních typů úloh pro výuku matematiky na 1. stupni ZŠ* [Diplomová práce]. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

[2] Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (1998). *Náměty k rozvíjení kombinačního myšlení.* Brno: PedF MU.

[3] Divíšek, J., et al. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: SPN.

[4] Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: SPN.

[5] Hejný, M. & Michalcová, A. (2001). *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum.

[6] Fuchs, E. (2000). *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele* [CD ROM]. Brno: Masarykova univerzita.

[7] Povondrová, P. (2016). *Aktivita pro rozvoj kombinačního myšlení žáků – Rummikub* [Seminární práce]. FP TU v Liberci.

[8] Scholtzová, I. (2003). *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ (rozvíjanie kombinatorického myslenia)*. Prešov: Metodicko-pedagogické centrum.

[9] Skořepová, J. (2016). *Aktivity pro rozvoj kombinačního myšlení žáků* [Seminární práce]. FP TU v Liberci.

[10] gymnachod.cz. (2016). *Jiráskovo gymnázium: Přijímací řízení – Ukázky přijímacích zkoušek*. Dostupné z: `http://www.gymnachod.cz/index.php?stranka=ukazky-prijimacich-zkousek`

[11] scio.cz. (2016). *Scio – Přijímací zkoušky. Scio – Popis testů Scio pro přijímací zkoušky*. Dostupné z: `http://www.scio.cz/in/2ss/pzscio/popis.asp`

Abstract

The aim of the current teaching of mathematics is not just acquisition of knowledge. Attention should be paid first of all to creating a positive attitude to learning through developing thinking and developing experience with the solution of real problems. Combinatorial tasks may be an appropriate incentive for the pleasure of discovering without special requirements on previous knowledge. Teaching should be directed towards developing the ability to find and use each of the organizational principles, increase research tension, the diversity of used approaches and methods of solution.

In the contribution we consider the application of these principles in the elementary school, and we present some suggestions of manipulative activities that may lead to the development of the logical-combinatory thinking of pupils.

Jana Příhonská
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1
461 17 Liberec
e-mail: jana.prihonska@tul.cz

Jiří Břehovský
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci
Univerzitní náměstí 1410/1
461 17 Liberec
e-mail: jiri.brehovsky@tul.cz