Luděk Spíchal
Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické $\pi$

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 96 (2021), No. 1, 8–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148878

# Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické $\pi$

*Luděk Spíchal, Přírodovědecká fakulta, MU, Brno*

Kvadratické funkce, podobně jako funkce goniometrické, patří zcela jistě k elementární výbavě, se kterou by měli studenti opouštět střední školy. Koneckonců v obou případech mluvíme o takových oblastech matematiky, které svými kořeny zasahují až do starověku a jejichž rozvoj byl patrně nejprve poháněn spíše praktickými potřebami a teprve posléze i samotnou touhou po poznání. Pokud k uvedené dvojici přidáme ještě navíc kuželosečky, které lze rovněž řadit mezi významná témata antických matematiků, pak získáme spojení, ze kterého se postupně, v průběhu staletí rozrostl košatý strom různých aplikací prolínajících se napříč matematikou, umožňujících dosáhnout řady úspěchů při řešení problémů i v oblastech, které zdánlivě s uvedenými problematikami přímo nesouvisí.

Objektem našeho zájmu bude zejména graf funkce

$$y = 1 - x^2,$$

který označíme jako *jednotkovou parabolu.* Graf jednotkové paraboly použijeme při konstrukci hodnoty zlatého řezu a převrácených hodnot čísel. Dále ukážeme, že lze zavést parabolickou konstantu analogickou číslu $\pi$ a poukážeme na její souvislost s výpočtem plochy parabolické úseče. Na závěr zmíníme některé vlastnosti parabolických goniometrických funkcí.

## 1. Jednotkové kuželosečky

Pojem *jednotkové kružnice* odpovídající grafu funkce určené rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

je dobře známý ze středoškolské matematiky, kde se používá pro definici goniometrických funkcí. V kurzech vyšší matematiky se objevuje pojem hyperbolických funkcí, jejichž definici lze provést pomocí grafu funkce určené rovnicí

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{2}$$

V tomto případě můžeme mluvit o *jednotkové hyperbole.* V literatuře jsou hyperbolické funkce zaváděny obvykle pomocí exponenciálních funkcí

- hyperbolický sinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

- hyperbolický kosinus

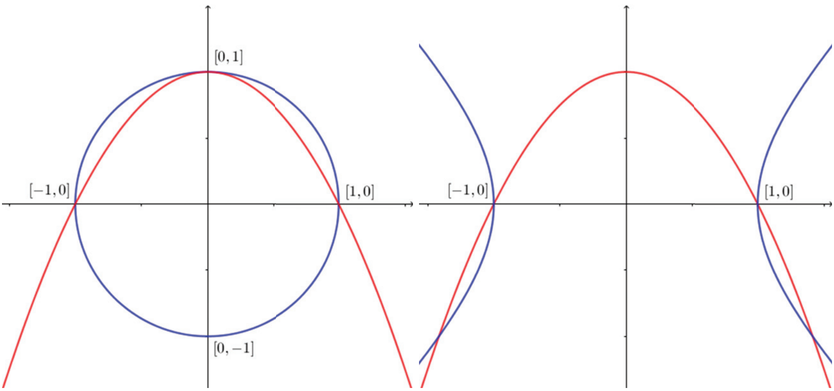
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Doplňme, že grafem funkce hyperbolický kosinus je tzv. *řetězovka*, tedy křivka, kterou vytvoří řetěz, který je zavěšen na svých koncích (více např. [5]). Z aplikací zmiňme např. možnost vyjádřit Lorentzovu transformaci (obecná relativita) pomocí hyperbolických funkcí.

Pojem *jednotkové paraboly* by měl být analogií k výše uvedeným jednotkovým kuželosečkám. Jak již bylo zmíněno v úvodu, budeme za jednotkovou parabolu považovat graf funkce dané rovnicí

$$x^2 + y = 1. \tag{3}$$

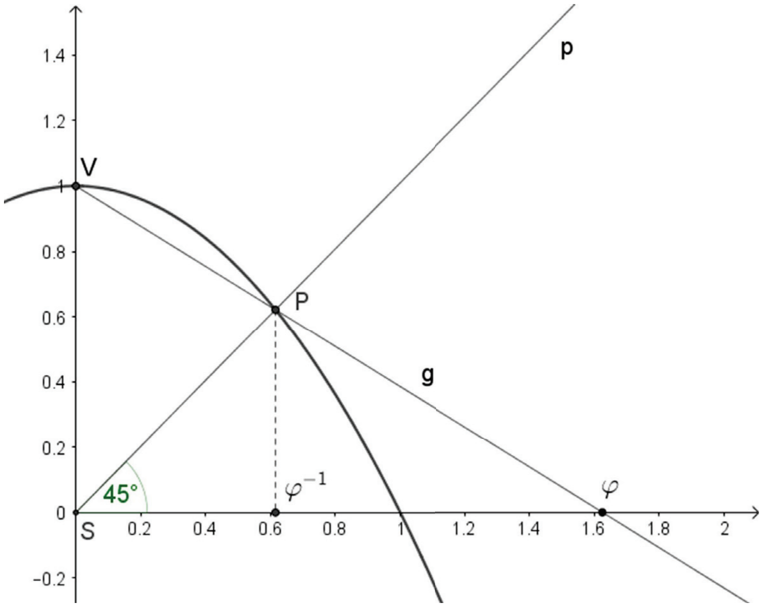
Srovnání jednotkové kružnice a hyperboly s jednotkovou parabolou můžeme sledovat na obr. 1.




Obr. 1: Srovnání jednotkové kružnice a paraboly (vlevo), jednotkové hyperboly a paraboly (vpravo)

## 2. Konstrukce zlatého řezu pomocí jednotkové paraboly

V této části ukážeme, že pomocí jednotkové paraboly je možné konstruovat hodnotu tzv. *zlatého řezu*. Připomeňme, že *zlatý řez* je číslo, které označuje přesný poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr celé úsečky vůči větší části se rovná poměru větší části k té menší [4].




Obr. 2: Konstrukce zlatého řezu $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ pomocí jednotkové paraboly

Konstrukce zlatého řezu je na obr. 2. K jejímu důkazu nejprve vypočteme souřadnice průsečíku $P$ paraboly dané rovnicí $y = 1 - x^2$ a přímky $p\colon y = x$, které určíme z řešení rovnice $x^2 + x - 1 = 0$. Z dvojice kořenů

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

vyhovuje

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatý řez je $x$-ovou souřadnicí průsečíku přímky $g$ určené vrcholem paraboly $V$ a bodem $P$ s osou $x$. Jestliže rovnici přímky $g$ zapíšeme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, pak $q = 1$ a směrnici $k$ určíme dosazením souřadnic bodu $P\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = k \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

a po zjednodušení je

$$k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

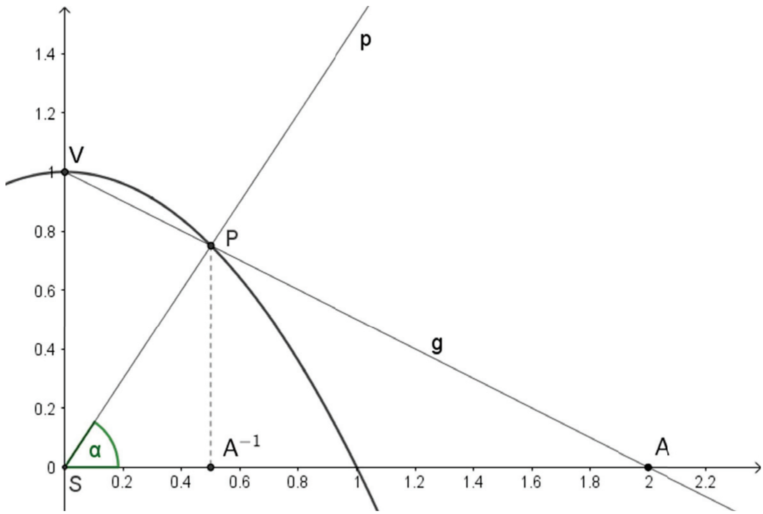
Přímka

$$g\colon y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1$$

protíná osu $x$ v bodě o souřadnicích

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y = 0.$$

Tedy hodnota $x$ představuje hodnotu tzv. zlatého řezu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Všimněme si rovněž, že $x$-ová souřadnice průsečíku $P$ určuje hodnotu $\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tedy převrácené hodnoty zlatého řezu.




Obr. 3: Konstrukce převrácené hodnoty čísla pomocí jednotkové paraboly

Hodnotu zlatého řezu jsme získali pro volbu úhlu $\alpha = 45°$. Ukažme nyní, že konstrukce popsaná na obr. 2 a 3 znázorňuje převrácené hodnoty čísel pro libovolnou volbu velikosti úhlu $\alpha$. Jestliže označíme $[t, 0]$

průsečík přímky $g$ a osy $x$, pak přímka $g$ má rovnici

$$g\colon y = 1 - \frac{x}{t}.$$

Průsečík přímky $g$ a paraboly získáme porovnáním jejich rovnic

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{t},$$

kde po zjednodušení je

$$x(tx - 1) = 0,$$

a tedy

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{t}.$$

### 3. Parabolické číslo π

Tématem této kapitoly bude poněkud provokativní otázka, zda nějaká podoba čísla π může být racionální. Hned na úvod předesíláme, že nemáme v úmyslu ignorovat nebo rozporovat takové skutečnosti, jakými jsou:

- důkaz, že číslo π nelze vyjádřit zlomkem (tj. je iracionální), který podal roku 1761 Johann Heinrich Lambert,[1)]
- důkaz, že číslo π není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty (tj. je transcendentní), který uveřejnil v r. 1882 Ferdinand von Lindemann.[2)]

Zdůrazněme naopak, že záměrem je určení parabolické konstanty (parabolické π, $\pi_p$), která by byla analogická k číslu π definovanému v kružnici.

Nejprve ukážeme, že v *jednotkové parabole* lze definovat goniometrické funkce obdobným způsobem jako v jednotkové kružnici, přičemž postup odvození bude odpovídat postupu v článcích [1, 2].

V jednotkové kružnici určené rovnicí (1) definujeme goniometrické funkce sinus ($\sin\vartheta$) a kosinus ($\cos\vartheta$) jako souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu $\vartheta$ a jednotkové kružnice (obr. 4 vlevo).

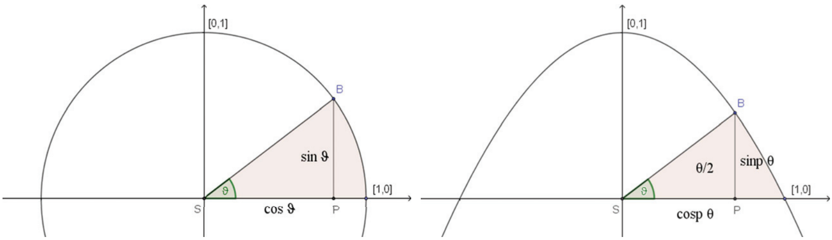
1) Johann Heinrich Lambert (1728–1777) byl švýcarský matematik, fyzik, astronom a filozof.

2) Ferdinand von Lindemann (1852–1939) byl německý matematik.

Parabolické goniometrické funkce (PGF), tj. parabolický sinus ($\operatorname{sinp}\theta$) a parabolický kosinus ($\operatorname{cosp}\theta$) definujeme jako souřadnice bodu, který náleží parabole s rovnicí

$$x^2 + y = 1, \ -1 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

kde hodnota argumentu $\theta$ je rovna dvojnásobku obsahu plochy omezené rameny úhlu $\vartheta$ a parabolou (obr. 4 vpravo) [1, 2].[3)]




Obr. 4: Definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici (vlevo), definice PGF (vpravo) jako souřadnic bodu $B[\operatorname{cosp}\theta; \operatorname{sinp}\theta]$, kde $\theta$ je dvojnásobek plochy omezené rameny úhlu $\vartheta$ a parabolou (upraveno podle [1])

Argument $\theta$ (plocha výseče paraboly) má v případě PGF obdobný význam jako $\vartheta$ (délka oblouku) pro funkce definované v jednotkové kružnici, můžeme tedy analogicky uvažovat o „parabolickém čísle pí“ ($\pi_p$). Pro argument $\theta$ odpovídající volbě $\operatorname{cosp}\theta = 0$, $\operatorname{sinp}\theta = 1$ (na obr. 4 vrchol jednotkové paraboly) platí

$$\theta = 2\int_0^1 (1-\mu^2)d\mu = \frac{\pi_p}{2}, \tag{5}$$

a dále

$$\begin{aligned} &\operatorname{sinp} 0 = 0, && \operatorname{sinp} \pi_p/2 = 1, && \operatorname{sinp} \pi_p = 0, \\ &\operatorname{cosp} 0 = 1, && \operatorname{cosp} \pi_p/2 = 0, && \operatorname{cosp} \pi_p = -1. \end{aligned}$$

[3)] Volba hodnoty argumentu $\theta$ je analogická situaci v jednotkové kružnici. Obsah kruhové výseče $\theta$ odpovídající středovému úhlu $\vartheta$ (v radiánech) je ($r = 1$)

$$\theta = \pi r^2 \cdot \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \vartheta = 2\theta.$$

Pokud vypočítáme integrál v rovnici (5), pak

$$\pi_p = \frac{8}{3},$$

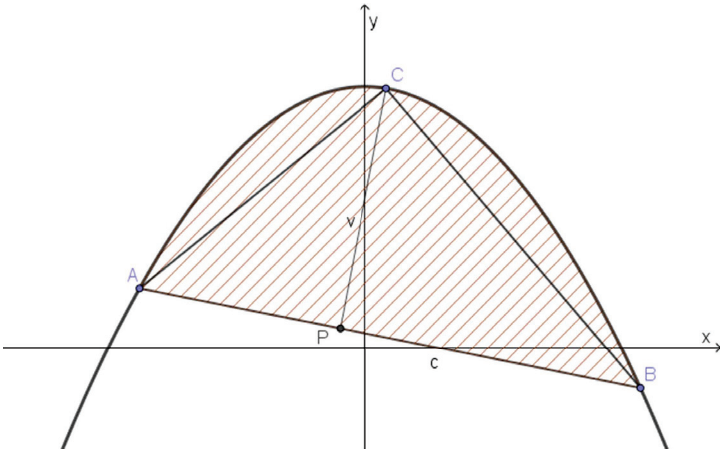
kde hodnota $\pi_p$ je racionální.

Archimédés v knize *Kvadratura paraboly* popsal metodu určení obsahu parabolické úseče, přičemž dospěl ke vzorci, který plochu úseče udává jako 4/3 plochy trojúhelníku, jehož základnu tvoří úsečka omezující úseč a výšku pak (nejdelší) kolmice k základně omezená vrcholem úseče, tj. nejvzdálenějším bodem od základny (obr. 5)

$$S = \frac{4}{3}cv.$$

Pokud bychom využili výše uvedené hodnoty $\pi_p = 8/3$, pak můžeme pro obsah parabolické úseče psát

$$S = \pi_p \cdot \frac{cv}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{cv}{2} = \frac{4}{3}cv.$$




Obr. 5: Obsah parabolické úseče

## Závěr

Parabolické goniometrické funkce jsou v literatuře zmiňovány jen v několika málo případech, uveďme proto některé další vlastnosti těchto funkcí. Další informace lze nalézt v článcích [1, 2].

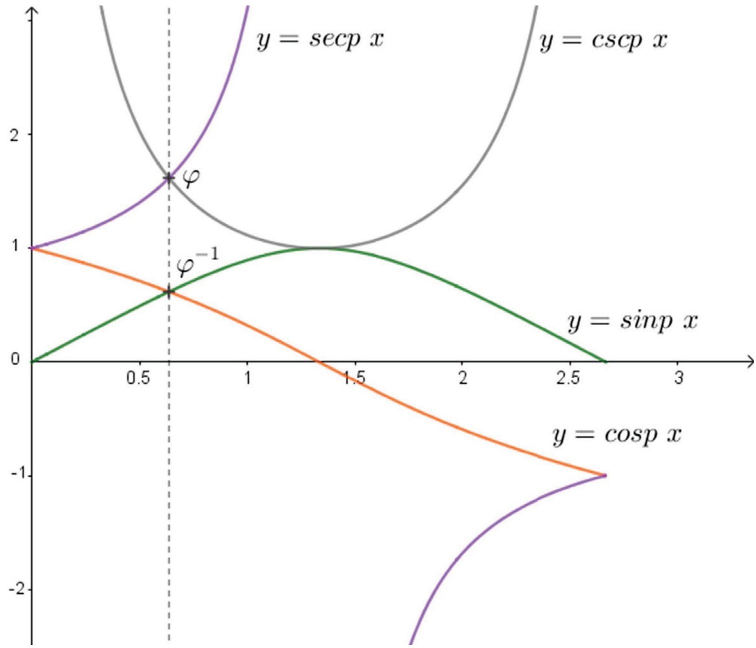
Podobně jako v případě goniometrických funkcí definovaných pomocí jednotkové kružnice, které splňují rovnost

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1, \tag{6}$$

platí pro PGF vzhledem k rovnici (3)

$$\operatorname{cosp}^2 \theta + \operatorname{sinp} \theta = 1, \tag{7}$$

kde $\theta$ je dvojnásobek plochy omezené rameny úhlu $\vartheta$ a parabolou (obr. 4).




Obr. 6: Grafy parabolických funkcí $y = \operatorname{sinp} x, y = \operatorname{cosp} x$, $y = \operatorname{cscp} x = \frac{1}{\operatorname{sinp} x}$ a $y = \operatorname{secp} x = \frac{1}{\operatorname{cosp} x}$, $x \in [0, \frac{8}{3}]$, $\varphi$ označuje hodnotu zlatého řezu

Vzhledem k definici, která se opírá o parabolu, nejsou uvedené funkce periodické. Na obr. 6 jsou dále znázorněné funkce

$$y = \operatorname{cscp} x = \frac{1}{\operatorname{sinp} x},$$

tj. parabolický kosekans, který je převrácenou hodnotou parabolického sinu a

$$y = \operatorname{secp} x = \frac{1}{\operatorname{cosp} x},$$

tj. parabolický sekans, který je převrácenou hodnotou parabolického kosinu. Na obr. 3 je hodnota parabolického sekans vyjádřena délkou úsečky $|SA|$ (argumentem funkce je dvojnásobek plochy omezené polopřímkou $SP$, parabolou a kladnou částí osy $x$). Postup odvození funkcí, které byly použity pro konstrukci grafů na obr. 6, je založen na použití diferenciálního a integrálního počtu, podrobný popis odvození lze nalézt např. v [2].

Vzájemný vztah kružnicových (KGF) a parabolických goniometrických funkcí můžeme odvodit z obr. 7, ze kterého je zřejmé, že body $P$, $C$ leží na přímce s rovnicí

$$y = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} x$$

a souřadnice bodu $P$ tak získáme z rovnice

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} x = 1 - x^2,$$

kde po úpravě je

$$\operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2\cos\vartheta}\left(\sqrt{4 - 3\sin^2\vartheta} - \sin\vartheta\right),$$

a použitím rovnice (7)

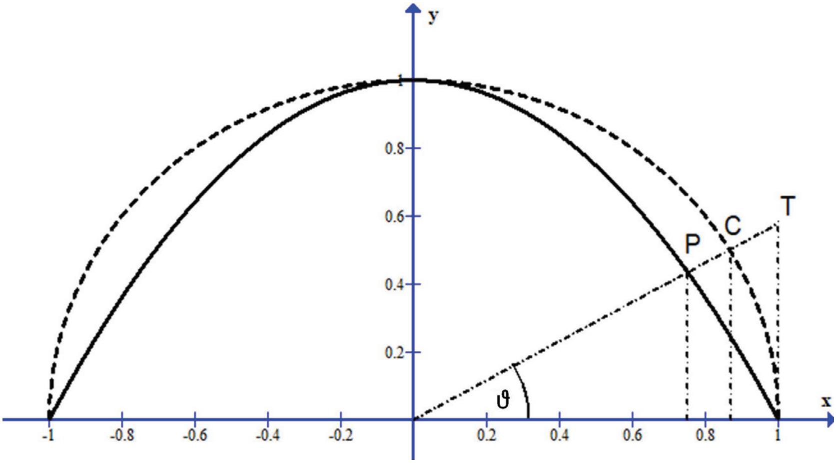
$$\operatorname{sinp}\theta = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2\cos\vartheta}\left(\sqrt{4 - 3\sin^2\vartheta} - \sin\vartheta\right).$$

Hodnoty PGF můžeme tedy celkem snadno určit ze známých hodnot KGF, kde např. pro $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ je

$$\operatorname{sinp}\theta = \operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

pro $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ je

$$\operatorname{sinp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 3), \quad \operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3}).$$




Obr. 7: Goniometrické funkce definované na kružnici (čárkovaná čára) a parabole (plná čára, upraveno podle [1])

L i t e r a t u r a


[1] Dattoli, G., Gielis, J., Di Palm, E., Licciardi, S.: *Parabolic Trigonometry*. 2018, Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/327652282_Parabolic_Trigonometry`

[2] Dattoli, G., Migliorati, M., Quattromini, M., Ricci, P. E.: *The Parabolic-Trigonometric Functions*. 2011, Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/48203985_The_Parabolic-Trigonometric_Functions`.

[3] Harkin, A. A., Harkin, J. B.: Mathematics Magazine. *Permutations*, roč. 77 (2004), č. 2, s. 118–129.

[4] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.

[5] Spíchal, L.: Od řetězovky k číslu $\pi$. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 2, s. 1–11.