Emil Calda

Ptolemaiova věta ve dvou úlohách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 1, 4–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148877

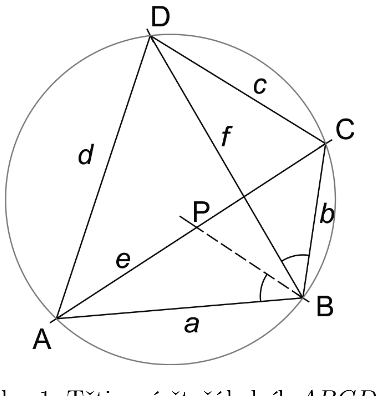
Ptolemaiova věta ve dvou úlohách

Emil Calda, MFF UK, Praha

Klaudios Ptolemaios (90–165 n. l.) patří spolu s Hipparchem (180–125 př. n. l.) k nejznámějším starověkým astronomům. Ve třinácti knihách svého rozsáhlého díla známého pod názvem Almagest zdokonalil geocentrickou soustavu, upřesnil vzdálenosti Slunce a Měsíce od Země a na základě svých výpočtů předpověděl doby zatmění Slunce i Měsíce na mnoho let dopředu. V Almagestu je také dokázána věta o tětivovém čtyřúhelníku, tj. o konvexním čtyřúhelníku, kterému lze opsat kružnici; tato věta byla později nazvána větou Ptolemaiovou:

V tětivovém čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček.

K odvození této věty použijeme obr. 1, na němž je sestrojen tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají velikosti a, b, c, d a úhlopříčky e, f. Máme ukázat, že platí: $ac + bd = ef$.



Obr. 1: Tětivový čtyřúhelník $ABCD$

Veďme bodem B přímku protínající úhlopříčku AC v bodě P tak, že úhly ABP a DBC jsou shodné, a všimněme si trojúhelníků ABP a DBC. Kromě úhlů ABP a DBC se shodují i v úhlech BAP a BDC (obvodové úhly nad tětivou BC), takže jsou podobné; znamená to, že platí:

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|DB|}{|DC|}$$

neboli

$$|AB| \cdot |DC| = |AP| \cdot |DB|,$$

tj.

$$ac = |AP| \cdot f.$$

V dalším kroku se zaměříme na trojúhelníky ABD a PBC. Shodují se jednak v úhlech ADB a PCB (obvodové úhly nad tětivou AB), jednak v úhlech ABD a PBC, což plyne ze shodnosti úhlů ABP a DBC. Trojúhelníky ABD a PBC jsou tedy podobné, takže platí:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|PC|}$$

neboli

$$|BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |PC|,$$

tj.

$$bd = |PC| \cdot f.$$

Sečtením získaných výrazů pro ac a bd a vzhledem k tomu, že

$$|AP| + |PC| = e,$$

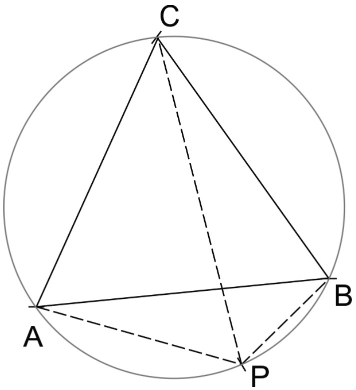
dostáváme:

$$ac + bd = (|AP| + |PC|) \cdot f = ef,$$

což je tvrzení Ptolemaiovy věty. S její pomocí snadno vyřešíme dvě následující úlohy.

Příklad 1. Na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je libovolně zvolen bod P různý od vrcholů A, B, C. Dokažte, že velikost nejdelší z úseček PA, PB, PC je rovna součtu velikostí zbývajících dvou.

Řešení. Na obr. 2 je sestrojen rovnostranný trojúhelník ABC a na kružnici jemu opsané je zvolen bod P různý od jeho vrcholů.



Obr. 2: Kružnice opsaná rovnostrannému trojúhelníku ABC

Z Ptolemaiovy věty pro tětivový čtyřúhelník $APBC$ plyne

$$|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| = |CP| \cdot |AB|$$

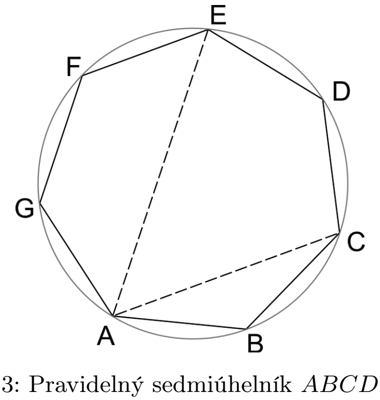
a vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je rovnostranný, dostáváme odtud, že platí:

$$|AP| + |BP| = |CP|,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2. Dokažte, že v pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ platí:

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$



Obr. 3: Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$

Řešení. V pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ na obr. 3 uvažujme tětivový čtyřúhelník $ACDE$. Podle Ptolemaiovy věty pro něj platí:

$$|AC| \cdot |DE| + |CD| \cdot |AE| = |AD| \cdot |CE|.$$

Vydělíme-li obě strany této rovnosti součinem $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$, dostaneme po úpravě a zkrácení

$$\frac{|ED|}{|AB| \cdot |AD|} + \frac{|CD| \cdot |AE|}{|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|} = \frac{|CE|}{|AB| \cdot |AC|};$$

Přihlédneme-li dále k tomu, že v uvedeném pravidelném sedmiúhelníku je

$$|CD| = |DE| = |AB|, \quad |AE| = |AD|, \quad |AC| = |CE|,$$

získáme po zkrácení požadovaný výsledek:

$$\frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{1}{|AB|}.$$

Poznámka 1. Právě dokázaná vlastnost pravidelného sedmiúhelníku je pomocí komplexních čísel odvozena v řešeném příkladu v kapitole 4 gymnaziální učebnice [2].

Uveďme ještě na závěr (bez důkazu), že platí i věta obrácená k větě Ptolemaiově:

Jestliže v konvexním čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček, je tento čtyřúhelník tětivový.

Literatura

[1] Pomykalová, E.: *Planimetrie – učebnice pro gymnázia.* Prometheus, Praha, 2007.

[2] Calda, E.: *Komplexní čísla – učebnice pro gymnázia.* Prometheus, Praha, 2008.