František Kuřina; Naďa Vondrová

Jak to vlastně je? Čísla a množiny

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 1, 46–64

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148845`

Jak to vlastně je?

ČÍSLA A MNOŽINY

František Kuřina, Naďa Vondrová

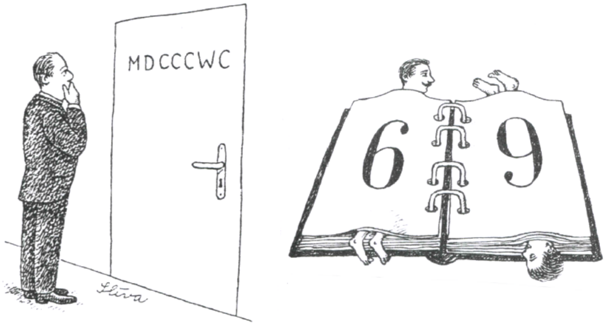
Významnou složkou života člověka od jeho narození je proces poznávání světa, v němž žije. V kontaktu dítěte s jeho prostředím, při řešení problémů, které jsou pro něj aktuální, při sbírání zkušeností a utváření postojů dítě poznává všemi smysly a „se vší vervou“. Důležitou stránkou tohoto procesu je abstrakce, mentální činnost, při níž dítě postupně odlišuje podružné a nepodstatné od zásadního a charakteristického.

Soubory prvků určité vlastnosti a čísla jako jejich míry se vyskytují v našem světě od samého začátku lidské kultury. Těmito historickými aspekty se ovšem zabývat nebudeme. Jsou-li však čísla a množiny složkami naší kultury, nemohou se nevyskytovat v literární a jiné tvorbě. Uvedeme dva příklady za všechny.

Karel Čapek napsal v próze *Věci kolem nás* (1970, s. 85):

> Je tomu asi mandel let, co jsme se běželi podívat do Chuchle na první letadlo; bylo nás hrůza tisíc a čekali jsme velmi dlouho, pak se ta velká mašina rozběhla a opravdu se odlepila od země a opravdu letěla dobrých padesát či sto metrů, a my tehdy jsme hlasitě a jásavým křikem žasli nad tímto zázrakem letu. Nyní denně vrčí a rachotí nad mým krovem dvě nebo tři a někdy i celý tucet letadel.

Kresbami Jiřího Slívy na obrázku 1 navozujeme otázku symbolů pro čísla, tedy tvarů číslic.



Obr. 1: Symboly pro čísla (Room, 1993, s. 14 a 37)

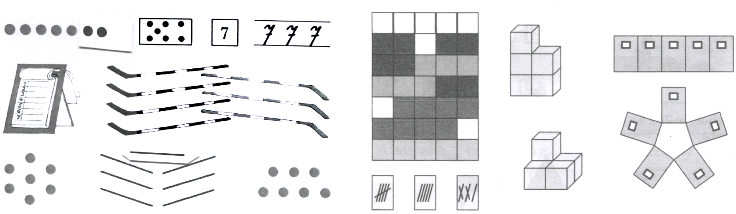
Přirozená čísla

O zavádění přirozených čísel ve škole píše velmi výstižně Petr Vopěnka v *Meditacích*:

> Malá přirozená čísla jsou jevy, které – na rozdíl od jiných jevů našeho světa – poznáváme dokonce všemi pěti tělesnými smysly. Vždyť číslo tři ukazující se na třech kamenech můžeme uvidět i nahmatat, tři údery zvonu lze uslyšet, tři různé chutě ochutnat a tři různé vůně ucítit. Přitom číslo tři jako takové, to je nikoliv tři kameny či tři údery zvonu a podobně, je jevem naprosto ostrým, na němž není vůbec nic neurčitého. Nejinak je tomu i s čísly čtyři, pět, ... Stěží bychom hledali jiné jevy, které by větším právem mohly být považovány za jevy světa poznávaného tělesnými smysly.
>
> Malá přirozená čísla se ovšem ukazují i v jiných světech či shlucích jevů ...
>
> I myšlenky nebo sny mohou být tři, přikázání je deset, světové strany jsou čtyři a podobně. Tato čísla se ukazují vlastně na každém shluku jevů, který není zcela jednolitý, a v tomto smyslu to jsou jevy univerzální. Protože se ukazují i ve světě poznávaném tělesnými

smysly, jsou to zároveň jevy přírodní. Protože se ale ukazují též ve světě našich myšlenek a úvah, ve světě našich představ, ve světech poznávaných duševními smysly, jako například ve světě geometrickém, jsou tato čísla tím, co nám umožňuje vynášet apriorní syntetické soudy o reálném světě. Znalost přirozených čísel jako takových, to je odloučených (abstrahovaných) především od jejich nejrůznějších výskytů ve světě poznávaném tělesnými smysly, je základem vzdělanosti. Vyjmenovat posloupnost jedna, dvě, tři, … až do sta, se rychle naučí i malé dítě.

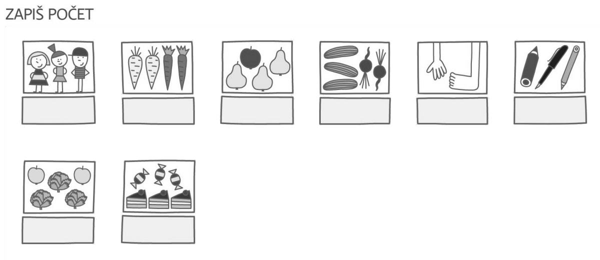
Na malých seskupeních osamocených jednoduchých abstraktních objektů, to je dosud nezapojených do vztahů s jinými objekty, se projevuje už jen kvantitativní stránka malých přirozených čísel, zato však ve své nejprůzračnější čistotě. Číslo udávající počet objektů z takového seskupení je v podstatě jediným jevem, jenž se na něm ukazuje. Čím stejnější jsou objekty z nějakého seskupení, což je právě v případě osamocených abstraktních objektů dovedeno do krajnosti, tím výrazněji totiž vystupuje do popředí čistá kvantitativní stránka čísla na něm se ukazujícího. Stará školní počítadla, na jejichž stejných kuličkách se děti procvičují v nauce o kvantitativní stránce malých přirozených čísel zvané počítání, jsou z tohoto hlediska zařízeními důmyslnými a rozhodně by neměla patřit minulosti. (Vopěnka, 2001, s. 63, 106, 119)



Obr. 2: Ilustrace z učebnice (Kníže et al., 1965, s. 42) vlevo, (Hošpesová et al., 1996, s. 8) vpravo

Tradiční didaktika matematiky počítadlo účelně využívala a při zavádění pojmu přirozená čísla pracovala výhradně s množinami prvků téhož druhu (kuličky, čárky, kruhy, body, ...), tedy s množinami, které bychom mohli nazvat množinami homogenními. Přitom jsou prvky množin charakterizovány jistou společnou vlastností (obr. 2 vlevo). Učebnice *Svět čísel a tvarů* k reprezentaci čísel hojně využívá geometrické útvary (obr. 2 vpravo).

Ačkoliv zakladatel teorie množin německý matematik Georg Cantor (1845–1918) vymezoval pojem množina jako souhrn dobře rozlišitelných předmětů naší intuice nebo mysli, který je chápán jako celek, ve škole zpravidla nepracujeme s množinami typu {belgický král, Eiffelova věž, pravítko na stole, učitelovy hodinky, ručička těchto hodinek}, jak navrhuje belgický matematik George Papy (cit. podle Šedivý, 1969, s. 35). Ovšem např. v Hejného učebnicích se od začátku občas objevují nehomogenní soubory (s počítadlem se v nich nepracuje). K úloze na obrázku 3 se v učitelské příručce píše:



Obr. 3: Nehomogenní soubory (Hejný et al., 2018, s. 7)

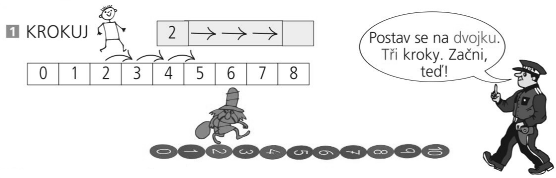
> U prvního obrázku některý žák udělá dvě čárky vlevo – dvě dívky, a jednu vpravo – jeden kluk. Jiný žák udělá tři čárky – tři děti. Učitel nechá oba žáky ukázat svůj zápis třídě a nechá ostatní žáky komentovat dva odlišné zápisy a vyzve je, aby pro objekty na jednom obrázku našli jedno označení.
>
> Tím, že informaci „dvě dívky a jeden kluk“ žák redukuje na informaci „tři děti“, probíhá v jeho hlavě abstrakce. Učí se zanedbávat část informace. Odhlíží

> (abstrahuje) od pohlaví dítěte a vnímá pouze počet dětí. Důležité je, aby žáci pojmenovali jedním názvem to, co je na obrázku: 3 děti, 4 kusy zeleniny, 4 kusy ovoce, 5 kusů zeleniny, 2 končetiny (10 prstů), 3 psací potřeby. (cit. z internetové příručky dostupné na `www.h-edu.cz`)

Naproti tomu v učebnici (Bomerová & Michnová, 2018) mají děti odpovědět na otázku „Kolik je zde dohromady slunečníků a klobouků?“, přičemž na obrázcích jsou různě umístěny dva slunečníky a dva klobouky. V učitelské příručce je uvedeno: „Některé děti klobouky a slunečníky sečtou. Jiné budou sčítat zvlášť klobouky a zvlášť slunečníky. Obojí je správně.“ (Bomerová & Michnová, 2018, s. 19) Podle našeho názoru by vše vyřešila otázka „Kolik věcí je na obrázku?“, která je koneckonců v souladu s každodenní zkušeností dítěte.

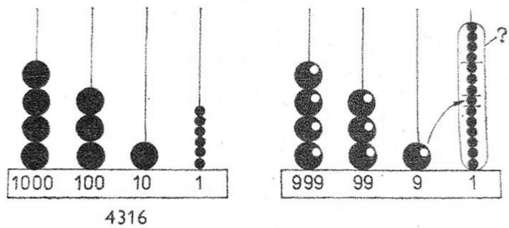
Považujeme za přirozené určovat počty prvků konečných množin „čítáním“, tj. postupným odpočítáváním jejich prvků. K tomu je ovšem třeba znát zpaměti posloupnost přirozených čísel. Přirozená čísla jsou tak produktem jazyka, který si dítě osvojuje od útlého věku. Jde o aplikaci peanovského přístupu k množině přirozených čísel, který je známý z aritmetiky (viz např. Hruša et al., 1964). Ilustrace těchto přístupů uvádíme na obrázcích 4 a 5. Obrázek 5 představuje krokování, metodu, kterou systematicky rozvíjí M. Hejný. Zde je posloupnost čísel „zhmotněním“ pohybu a zapsána jazykem šipek.

Obr. 4: Ilustrace peanovského přístupu (Petrmichl, 1904, s. 4) vlevo, (Rosecká & Růžička, 1994, s. 3) vpravo



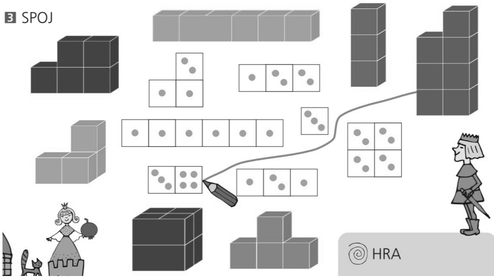
Obr. 5: Ilustrace peanovského přístupu (Hejný et al., 2007, s. 38)

Počítadlo je možné využít i na 2. stupni základní školy. Na obrázku 6 je zobrazeno číslo 4 316 na tzv. řádovém počítadle. Představíme-li si, že od každé jednotky vyššího řádu odebereme číslo 1 (to je na obrázku znázorněno kolečkem s tečkou) a takto vzniklé jednotky přidáme na řád jednotek, je jejich celkový počet roven cifernému součtu čísla. A tento počet rozhoduje o dělitelnosti čísla třemi a devíti. V aritmetické podobě ($10^3 = 999 + 1, \ldots$) můžeme najít ideu popsaného zdůvodnění dělitelnosti devíti i v některých učebnicích (Herman et al., 1994a; Kubínová, 2005). V některých učebnicích je pravidlo o dělitelnosti ověřeno na několika příkladech, nebo prostě sděleno.



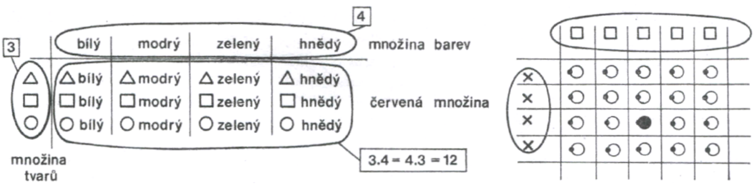
Obr. 6: Znázornění dělitelnosti třemi a devíti na řádovém počítadle (Kuřina, 1989, s. 17)

Jiný přístup k počtu prvků množiny spočívá v určování jejích kardinálních čísel. „Kardinálním číslem množiny ze systému množin M se nazývá ta množina, do níž patří množina A a všechny prvky ze systému M, které jsou s množinou A ekvivalentní.“ (Hruša et al., 1964, s. 33) Přitom dvě množiny jsou ekvivalentní, existuje-li prosté zobrazení jedné z množin na druhou. Na obrázku 7 je prosté zobrazení množiny kostek na množinu teček znázorněno spojnicemi příslušných obrázků.



Obr. 7: Znázornění ekvivalence množin (Hejný et al., 2007, s. 41)

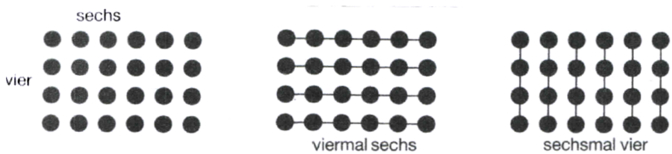
Matematika éry modernizace, jejímiž hlavními autory byli Jiří Kabele a Marie Janků, byla založena na kardinálním přístupu. V tomto pojetí je např. součin přirozených čísel a, b, která jsou kardinálními čísly množin A, B, definován jako kardinální číslo kartézského součinu $A \times B$. Kartézským součinem $A \times B$ rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ prvků $x \in A$, $y \in B$. Pojem uspořádaná dvojice žáci snadno pochopí ($32 \neq 23$, od $\neq$ do).



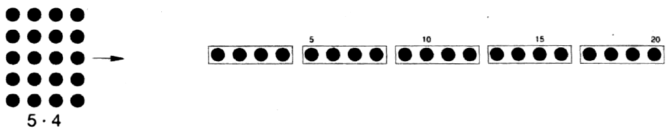
Obr. 8: Násobení $3 \cdot 4$ vlevo, řešení úlohy „4 řady stromů po pěti stromech“ vpravo (Kabele & Janků, 1974, s. 26)

Např. v druhém ročníku ZŠ by se mělo v souladu s výše uvedeným postupovat takto: Máme-li vypočítat součin $3 \cdot 4$, utvoříme z daných dvou množin např. množinu tvarů {trojúhelník, čtverec, kruh}, množinu barev {bílá, modrá, zelená, hnědá} a novou množinu všech uspořádaných dvojic podle obrázku 8 vlevo. Kartézsky se řeší i úloha: „V sadu jsou 4 řady stromů a v každé řadě je 5 stromů. Kolik stromů je v sadě?“ podle obrázku 8 vpravo. Podle autorů učebnice (Kabele & Janků, 1974) jde tedy opět o množinu všech uspořádaných dvojic „řádek – sloupec“. Tento přístup ovšem nerespektuje skutečnost, že každé české dítě slyší v součinu $3 \cdot 4$ součet $4 + 4 + 4$ a umí výsledek vypočítat. Toto pojetí „množinové matematiky“ naštěstí patří minulosti.

Přirozený způsob zavedení součinu dvou přirozených čísel uvádějí např. němečtí autoři Erich Wittman a Gerhard Müller. Komutativita násobení je vidět z obrázku 9 („viermal sechs“ – čtyřikrát šest, „sechsmal vier“ – šestkrát čtyři), vlastní postup je znázorněn na obrázku 10.



Obr. 9: Komutativita násobení (Wittman & Müller, 1990, s. 116)



Obr. 10: Postup při násobení (Wittman & Müller, 1990, s. 116)

Desetinná čísla a zlomky

Nejdříve se stručně podíváme na pojem desetinné číslo. V obecném povědomí, v různých internetových fórech či v literatuře (Kubínová, 2005)[1] se občas setkáme i s chápáním desetinného čísla jako jakéhokoli čísla zapsaného pomocí desetinné čárky (tedy čísla s ukončeným i neukončeným periodickým desetinným rozvojem). Ve školské matematice se však desetinným číslem myslí takové

[1]Na s. 42 je vymezeno desetinné číslo, které má ve svém zápise nekonečný počet desetinných míst tvořený opakující se skupinou číslic, a dokonce je uvedeno, že existují desetinná čísla s nekonečným počtem desetinných míst, v jejichž zápise se žádná skupina číslic neopakuje (např. číslo π). Podobně se o desetinném čísle dočteme na Wikipedii (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Desetinn%C3%A9_%C4%8D%C3%ADslo`).

číslo, které lze zapsat jako desetinný zlomek, tedy zlomek, jehož čitatel je celé číslo a jmenovatel číslo 10^n, n přirozené (např. Odvárko & Kadleček, 2004, s. 38). Tudíž např. i čísla 5 a $\frac{1}{4}$ jsou desetinná čísla, neboť 5 lze psát jako $\frac{50}{10}$ a $\frac{1}{4}$ jako $\frac{25}{100}$ (Odvárko a Kadleček explicitně uvádějí, že každé celé číslo je desetinné číslo). Toto pojetí je možné, ale odporuje podle našeho názoru jazykovému citu. Jako vhodnější se nám jeví chápání desetinného čísla jako čísla zapsaného pomocí desetinné čárky a konečného počtu cifer.

Nyní obrátíme pozornost k pojmu zlomek.

Ve škole zavádíme zlomky na základě představ vytvořených manipulací s konkrétními objekty, např. $\frac{1}{2}$ kruhu, $\frac{1}{2}$ jablka, $\frac{1}{2}$ čtverce, $\frac{1}{2}$ úsečky, $\frac{1}{2}$ z 8 ... To jsou tzv. izolované modely zlomku $\frac{1}{2}$. Zlomky zde mají charakter operátorů změny: vezmi $\frac{1}{2}$ z celého kruhu apod. Z příkladů tohoto typu dojdeme abstrakcí k racionálnímu číslu $\frac{1}{2}$. Generickým modelem zlomku $\frac{1}{2}$ může být např. překládání obdélníkového listu papíru na dvě shodné části. Termíny izolovaný a generický model zde používáme v Hejného smyslu (Hejný, 2004, s. 28). Od procesu konstrukce částí celku se tak dostáváme k pojmu (konceptu) zlomek.[2]

Citátem Milana Hejného navodíme problematiku čísla a jeho reprezentace (Hejný, 2004, s. 28): „Číslo $\frac{51}{17}$ se tváří jako zlomek, ale je to číslo 3.“ Tento výrok chápeme v tomto smyslu: Zlomek $\frac{51}{17}$ je jiným vyjádřením čísla 3. Platí tedy $\frac{51}{17} = 3$. Symbol $=$ znamená, že týž objekt je popsán dvěma způsoby.

Pokusme se vysvětlit souvislost pojmu a jeho reprezentace podrobněji. Začneme dvěma příklady.

Př. 1. Na otázku, kolik máme prstů na ruce, můžeme odpovědět několika způsoby, např.

a) slovem: pět = five = fünf = ...
b) symbolem: 5 = V =  (v klínovém písmu) = _ (mayskou symbolikou) = ...

Nebude ovšem chybou, odpovíme-li poněkud netradičně, např.

c) zlomkem $\frac{5}{1} = \frac{15}{3} = \frac{85}{17} = \ldots$ (neboť $\frac{85}{17} = 5$)

[2] To je realizace proceptu ve smyslu (Gray & Tall, 1994).

d) desetinným zlomkem $\frac{50}{10} = \frac{500}{100} = \frac{5000}{1000} = \ldots$ (neboť $\frac{50}{10} = 5$)
e) desetinným číslem $5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000 = \ldots$ (neboť $5{,}000 = 5$)

Slova (pět, ...), symboly (5, ...), zlomky, desetinné zlomky a desetinná čísla náležejí jazyku matematiky a v našem případě označují počet prstů na ruce.

Př. 2. Rozdělíme-li kruh na dvě shodné části, můžeme každou z těchto částí označit např.

a) slovem: polovina, (one) half, die Hälfte...
b) zlomkem: $\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{160}{320} = \ldots$
c) desetinným zlomkem: $\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \ldots$ (neboť $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$)
d) desetinným číslem: $0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = \ldots$ (neboť $0{,}500 = \frac{1}{2}$)

Zde máme opět čtyři způsoby označení částí kruhu.

Jak to tedy vlastně je? Rozlišení objektu od jeho označení není výmyslem matematiků. Již Shakespeare napsal: „Copak je po jméně. Co růží zvou, i zváno jinak vonělo by stejně.“

Český jazyk chápe v souladu s běžným vyjadřováním zlomek jako část celku (*Slovník spisovné češtiny*, 1978), *Slovník školské matematiky* (1981) ovšem řadí zlomek do jazyka matematiky: je to jiný zápis dělení. Podívejme se nyní, jak chápe zlomek školská matematika, kterou může reprezentovat kniha *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia* (Odvárko & Kadleček, 2004, s. 46). Zlomek je zde zaveden jako část celku a jako podíl: „Zlomek $\frac{a}{b}$ je zápis čísla, které je výsledkem dělení celého čísla a celým číslem b různým od nuly.“ Takto bývá zlomek vymezen v době, kdy se s ním žáci poprvé setkávají na 2. stupni základní školy.

Později se však ukáže nutnost rozšířit pojem zlomku i na podíl necelých čísel. Např. Hejný et al. uvádějí u úlohy se zadáním z obrázku 11: „Většinou jsme pracovali se zlomky, jejichž čitatel i jmenovatel bylo celé číslo. Teď zde bude i složitější číselný výraz.“ (Hejný et al., 2019, s. 124).

Vypočtěte.

a) $\dfrac{3{,}5-\frac{1}{2}}{2{,}5+\frac{1}{2}}$ **b)** $\dfrac{1{,}6-\frac{2}{5}}{1{,}6-\frac{1}{10}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{6{,}25}}{\frac{5}{3}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{6{,}25}}{\sqrt{0{,}25}}$ **e)** $\dfrac{\frac{11}{5}-3{,}2}{\frac{19}{10}-2}$

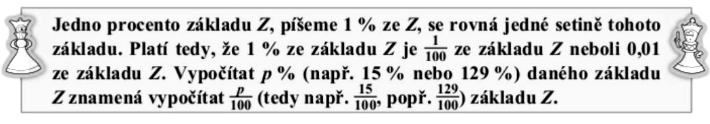
Vypočtěte.

a) $1+\dfrac{1}{2}$ **b)** $1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$ **c)** $1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$

Obr. 11: Hejný a Šalom (2018, s. 14)

Explicitněji to vyjadřují Herman et al. (1994b), kteří zavádějí pojem složený zlomek (zlomek, jehož čitatelem i jmenovatelem je opět zlomek) a ptají se „Může být v čitateli či jmenovateli složeného zlomku složitější číselný výraz?“ (s. 93) a „Může být čitatelem nebo jmenovatelem zlomku desetinné číslo?“ (s. 94) (na obě otázky odpovídají kladně).

V tomto pojetí zlomku tedy může zlomek vyjadřovat číslo celé $\left(\frac{3}{1}\right)$, číslo racionální, ale ne celé $\left(\frac{3}{4}\right.$ nebo $\left.\frac{1}{3}\right)$, číslo iracionální $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ nebo $\left.\frac{2}{\pi}\right)$)nebo číslo komplexní $\left(\frac{3+\mathrm{i}}{4}\right)$. Zlomek je tedy prvkem jazyka matematiky, který označuje část celku nebo několika celků, přičemž můžeme psát $\frac{a}{b} = a : b$. Zlomek $\frac{51}{17}$ označuje číslo 3. Zlomek $\frac{\pi}{2}$, kterým popisujeme pravý úhel, se rovná jeho velikosti v obloukové míře, tedy číslo $\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,327\ldots$ Ve vyšších ročnících je širší pojetí pojmu zlomek nezbytné (např. funkce tangens se definuje jako podíl sinu a kosinu).



Jedno procento základu Z, píšeme 1 % ze Z, se rovná jedné setině tohoto základu. Platí tedy, že 1 % ze základu Z je $\frac{1}{100}$ ze základu Z neboli 0,01 ze základu Z. Vypočítat p % (např. 15 % nebo 129 %) daného základu Z znamená vypočítat $\frac{p}{100}$ (tedy např. $\frac{15}{100}$, popř. $\frac{129}{100}$) základu Z.

Obr. 12: Procento a zlomek jako operátor (Jedličková et al., 2014, s. 29)

Výše jsme uvedli, že zlomek chápeme jako operátor změny. Operátorem[3] je i procento (např. 1 % z 12). Někdy se však v učeb-

[3] Je otázka, zda také tzv. „pojmenovaná čísla“ (3 jablka, 3 kruhy, 3 čtverce, 3 úsečky, 3 poloviny, 3 procenta) nemůžeme považovat za operátory (vybíráme 3 jablka z většího souboru, . . .) a přirozené číslo 3 nevznikne z těchto situací abstrakcí.

nicích setkáme s rovnostmi typu $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$, což považujeme za matoucí. Zvětšíme-li číslo 100 o 0,01, dostaneme číslo 100,01. Zvětšíme-li 100 o 1 %, dostaneme číslo 101. Pojem základu je pro přesné vymezení pojmu procento důležitý (viz obr. 12).

Číselné obory

Již jsme uvedli, že zápisem $\frac{a}{b} = a : b$ vyjadřujeme, že zlomek je naznačené dělení. Provedeme-li tuto algebraickou operaci, máme dvě možnosti. Vyjde-li výsledek beze zbytku (jako např. $65 : 8 = 8{,}125$), dostaneme desetinné číslo, které můžeme psát jako desetinný zlomek $\left(8{,}125 = \frac{8125}{1000}\right)$.

Nevyjde-li dělení beze zbytku, pak se určitá skupina číslic bez omezení opakuje. Žáci by si měli uvědomit, proč tomu tak je (počet zbytků je omezen dělitelem). V tomto případě má číslo nekonečný periodický desetinný rozvoj. Na základě známého algoritmu dělení tak dostaneme např. $1 : 3 = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$, a tedy $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $1 : 7 = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots = 0{,}\overline{142\,857}$, a tedy $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142\,857}$.

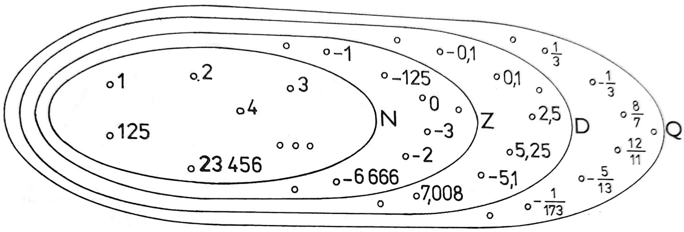
Žáci na základní škole se ovšem seznamují i s čísly, která nelze zapsat jako podíl celého a přirozeného čísla. K tomu se dobře hodí geometrická cesta.

Přirozená čísla můžeme získat jako výsledek měření (kolikrát se jednotková úsečka „vejde“ do dané úsečky). Ovšem toto měření nemusí „vyjít“. V takovém případě provádíme měření s menší jednotkou (např. s úsečkou délky $\frac{1}{10}$ původní jednotky). A když ani toto měření nevyjde, použijeme jednotku délky $\frac{1}{100}$ původní jednotky atd. Velikosti úseček jsou tak vyjádřeny desetinnými čísly. Ovšem již kolem roku 500 př. n. l. objevil Pythagorův žák Hippasos, že tento proces nemusí být nikdy ukončen. Měříme-li úhlopříčku čtverce stranou čtverce jako jednotkou, dojdeme k neukončenému neperiodickému číslu $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\ldots$ Podle Singha (2000, s. 42) dal Pythagoras za tento objev Hippasose utopit.[4] Pythagoras byl totiž přesvědčen, že vesmír lze popsat pomocí

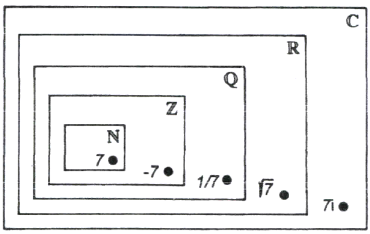
[4]S negativním přijetím (i když ne tak tragickým) se setkal např. i objev neeukleidovské geometrie ruským matematikem a Nikolajem Ivanovičem

racionálních čísel, a $\sqrt{2}$ je číslo iracionální. Dalším iracionálním číslem je např. číslo π, které znají žáci ZŠ ze vzorců pro obvod a obsah kruhu.

Množina reálných čísel je sjednocením množiny čísel racionálních s množinou čísel iracionálních. Z obr. 13 je dobře vidět, že ne všechna racionální čísla jsou desetinná (v obrázku označena písmenem $\mathbb{D}$). Ovšem žáci by patrně byli na rozpacích, kdyby měli do obrázku dokreslit např. $\frac{1}{10}$. Obr. 14 ukazuje přehled o číselných množinách tak, jak se studují na střední škole ($\mathbb{N}$ znamená množinu čísel přirozených, $\mathbb{Z}$ množinu čísel celých, $\mathbb{Q}$ množinu čísel racionálních, $\mathbb{R}$ množinu čísel reálných a $\mathbb{C}$ množinu čísel komplexních).



Obr. 13: Schéma pro číselné obory pro základní školu (Herman et al., 1994b, s. 101)



Obr. 14: Schéma pro číselné obory pro střední školu (Kuřina & Půlpán, 2006, s. 57)

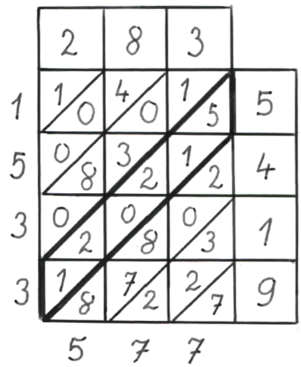
Lobačevským (1793–1856) a objev možnosti porovnávání mohutností nekonečných množin německým matematikem Georgem Cantorem (1829–1918): množina všech přirozených čísel má méně prvků než např. množina bodů úsečky.

Početní operace

Operace s čísly a písmeny, která čísla zastupují, představují značnou část matematiky základní a střední školy. Zde se omezíme pouze na „kritická místa“ výkladu tohoto učiva.

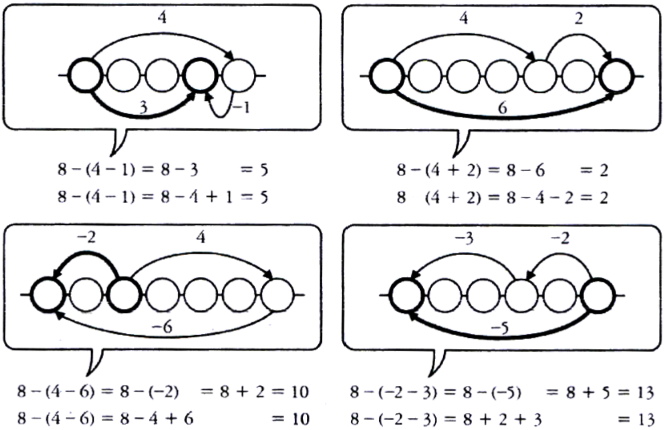
Jedním z vážných problémů vyučování matematice jsou formální znalosti žáků, jimiž trpí někdy i učitelé. Připomeňme šetření, které vykonala americká pedagožka Liping Ma (1990). Zadala skupině čínských a amerických učitelů úkol: „Uveďte příběh nebo úlohu, kterou je možné řešit výpočtem $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.“ 90 % čínských učitelů z vyšetřované skupiny úlohu správně vyřešilo, zatímco američtí řešitelé byli úspěšní pouze v 5 %. Tutéž úlohu zadal první z autorů článku českým učitelům. Většina nebyla schopna úlohu vyřešit, přičemž mnozí místo dělení polovinou dělili na polovinu, ačkoliv interpretace výpočtu je celkem přirozená (např. $1\frac{3}{4}$ litru čaje máme rozlít do půllitrových hrnků nebo obdélník má obsah $1\frac{3}{4}\,\mathrm{dm}^2$ a jednu stranu dlouhou půl decimetru).

Pokud dělají žáci chyby v algoritmu násobení celých nebo desetinných čísel, můžeme připomenout tzv. indické násobení (Hejný et al., 2015b, s. 48). Máme-li vypočítat např. součin $283 \cdot 5\,419$, utvoříme tabulku podle obr. 15 a počítáme takto: do čtverců píšeme dílčí výsledky násobení (počet jednotek pod a počet desítek nad úhlopříčku) a pak sčítáme v šikmých řadách. Po stranách čteme výsledek $283 \cdot 5\,419 = 1\,533\,577$.



Obr. 15: Indické násobení

Sčítání celých čísel můžeme s úspěchem vysvětlit pohybem po číselné ose nebo krokováním podle Hejného (Hejný et al., 2015b, s. 33). Pravidla pro „minus před závorkou“ můžeme odvodit podle obr. 16.



Obr. 16: Odvození pravidla „minus před závorkou“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 112)

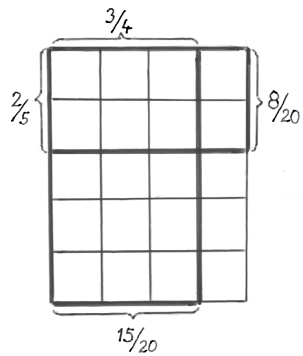
Vysvětlení, proč je součin kladného a záporného čísla záporný, můžeme podat „dluhovou“ interpretací nebo pohybem po číselné ose. Že je součin dvou záporných čísel číslo kladné se v učebnicích zpravidla vysvětluje strukturálně pomocí číselné řady: „když např. $3 \cdot (-3) = -9$, $2 \cdot (-3) = -6$, $1 \cdot (-3) = -3$, $0 \cdot (-3) = 0$, pak musí být $(-1) \cdot (-3) = 3$, $(-2) \cdot (-3) = 6$ atd. Dobře je to vidět, pokud se tyto výpočty současně ukazují na číselné ose.“ (Rendl et al., 2013, s. 81) Podobný postup uvádí i Herman et al. (1998, s. 80), který navíc argumentuje tabulkou přírůstků.

Tyto způsoby nemusí být pro žáky přesvědčivé. Navrhujeme tedy tento přístup:

Víme, že $2 \cdot (-3) = -6$ a že $(-2) \cdot (-3)$ bude buď 6, nebo -6. V druhém případě by platilo $2 \cdot (-3) = (-2) \cdot (-3)$. To by ovšem znamenalo, že $2 = -2$, neboť z rovnosti $3x = 3y$ plyne $x = y$. Protože to není možné, platí $(-2) \cdot (-3) = 6$.

Pro odvození pravidel pro sčítání a násobení zlomků je výhodné užít obdélníkový („čokoládový“) model (např. Hejný et al., 2015a, s. 62; Herman et al., 1994b, s. 73).

Máme vypočítat součet $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$. Rozdělme obdélník 5×4 na jednotkové čtverce (obr. 17). Každý z nich je $\frac{1}{20}$ celého obdélníku, jeden jeho řádek je $\frac{1}{5}$ obdélníku, tj. 4 jednotkové čtverce. Číslo $\frac{2}{5}$ můžeme znázornit vodorovným tučně vyznačeným obdélníkem, který obsahuje 8 jednotkových čtverců. Číslo $\frac{1}{4}$ představuje svislý sloupec, $\frac{3}{4}$ pak tvoří svislý tučně vyznačený obdélník s 15 čtverci. Platí tedy $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$. Na základě tohoto postupu můžeme vysvětlit pravidlo pro sčítání zlomků.



Obr. 17: Sčítání zlomků na obdélníkovém modelu

Stejný model můžeme použít pro odvození násobení zlomků. Protože součin dvou kladných čísel představuje obsah obdélníku, platí $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ a pravidlo pro násobení zlomků je odvozeno. Někomu se může zdát, že se zdržujeme samozřejmostmi. Povzdech jedné paní učitelky matematiky po 10 letech praxe reprodukovaný z knihy (Rendl et al., 2013, s. 133) snad omlouvá náš výklad: „Ale násobení zlomku zlomkem, to už je hrozně problematický. Jedna polovina krát jedna polovina a ono vám z toho vyleze jedna čtvrtina. Takže, jak tohle ukázat?“ Zkratkovitá pravidla bez porozumění pak vedou k podobným záležitostem jako u žáka, který aplikoval pravidlo „minus a minus dá plus“ takto: $-2 - 3 = 5$. Náležitou pozornost je třeba věnovat nejen pojmům celé číslo, zlomek či racionální číslo, ale je také nutné se snažit žáky vést k porozumění operacím s nimi.

Výklad o číslech a množinách bude pokračovat v kapitole o nekonečnu.

Literatura

[1] Bomerová, E., & Michnová, J. (2018). *Matematika 1. Příručka pro učitele k 2. přepracovanému vydání učebnic.* Fraus.

[2] Čapek, K. (1970). *Věci kolem nás.* Československý spisovatel.

[3] Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–141.

[4] Hejný, M., Jirotková, D., & Slezáková, J. (2018). *Matematika 1. ročník – pracovní učebnice.* H-mat, o.p.s.

[5] Hejný, M., Jirotková, D., & Slezáková-Kratochvílová, J. (2007). *Matematika, 1. díl.* Fraus.

[6] Hejný, M. & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika.* Portál.

[7] Hejný, M., & Šalom, P. (2018). *Matematika F.* H-mat.

[8] Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2019). *Matematika EF. Příručka učitele 2. stupně a víceletých gymnázií.* H-mat.

[9] Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2015a). *Matematika B.* H-mat.

[10] Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J. Sukniak, A., & Bomerová, E. (2015b). *Matematika A.* H-mat.

[11] Hejný. M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet kapitol k didaktiky matematiky* (s. 23–42). PedF UK.

[12] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1994a). *Dělitelnost.* Prometheus.

[13] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1994b). *Racionální čísla. Procenta.* Prometheus.

[14] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1998). *Matematika. Kladná a záporná čísla*. Prometheus.

[15] Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (1996). *Svět čísel a tvarů 1*. Prometheus.

[16] Hruša, K., Dlouhý, Z., & Mencl, J. (1964). *Aritmetika a algebra pro pedagogické fakulty*. SPN.

[17] Jedličková, M., Krupka, P., & Nechvátalová, J. (2014). *Matematika: procenta, trojčlenka*. Nová škola, s.r.o.

[18] Kabele, J., & Janků, M. (1974). *Stati k rozvoji pokrokových směrů ve vyučování matematice v 1. až 5. ročníku ZŠ*. SPN.

[19] Kníže, G., Reitmayerová, M., & Hornofová, V. (1965). *Početnice pro první ročník*. SPN.

[20] Kubínová, M. (2005). *Klíč k matematice*. Albatros.

[21] Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. SPN.

[22] Kuřina, F., & Půlpán, Z. (2006). *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Academia.

[23] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[24] Odvárko, O., & Kadleček, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus.

[25] Petrmichl, F. (1904). *Obrázková početnice maličkých*. Kočí.

[26] Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. PedF UK.

[27] Room, A. (1993). *Guinessova kniha o číslech*. MF.

[28] Rosecká, Z., & Růžička, J. (1994). *Dívej se a počítej*. Nová škola.

[29] Singh, S. (2000). *Velká Fermatova věta*. Academia.

[30] *Slovník spisovné češtiny* (1978). Academia.

[31] *Slovník školské matematiky* (1981). SPN.

[32] Šedivý, J. (1969). *O modernizaci školské matematiky*. SNP.

[33] Vopěnka, P. (2001). *Meditace o základech vědy*. Práh.

[34] Wittman, E., & Müller, G. (1990). *Handbuch produktieven Rechmenübungen*. Klett.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com

Naďa Vondrová
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz