

Učitel matematiky

Irena Budínová

Vývoj představ žáků o geometrických pojmech v průběhu základní školy

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 1, 1–25

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148840>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

VÝVOJ PŘEDSTAV ŽÁKŮ O GEOMETRICKÝCH POJMECH V PRŮBĚHU ZÁKLADNÍ ŠKOLY

IRENA BUDÍNOVÁ

Úvod

V letech 2016 a 2017 probíhalo testování žáků 4. ročníku základní školy, které sledovalo představy žáků o geometrických pojmech čtverec, obdélník, kruh, kružnice a trojúhelník. Test byl sestaven Katarínou Žilkovou a kol. a v České republice byl zadán 226 žákům 4. ročníku. Výsledky českých žáků byly publikovány v časopisu *Učitel matematiky* (Budínová, 2017a, 2017b, 2018).

Při testování byly určeny typické představy žáků o geometrických pojmech a rovněž rozšířené miskoncepce, které budou podrobněji uvedeny níže. Původní test byl v roce 2018 pozměněn a zadán žákům 4., 6. a 8. ročníku základní školy. Byl sledován vývoj představ i miskonceptí žáků v průběhu základní školy. Následující text pojedná o zjištěných výsledcích. V závěru budou uvedeny možnosti výuky geometrických pojmů s využitím příkladů a protipříkladů, které žákům umožňují vytvářet přesnější představy.

Teoretický rámec

Jedna z uznávaných teorií, kterou vytvořil van Hiele, uvádí pět úrovní, kterými žák postupně prochází během svého pojmotvorného procesu v geometrii. Tato teorie byla mnohokrát citována (např. Aktas Arnas & Aslan, 2010; Žilková et al., 2018 aj.) a Žilková et al. (2018, s. 29) prezentuje nejčastěji používaná označení pro jednotlivé úrovně následovně:

- Úroveň 0: Vizualizace (poznávání a pojmenování obrazců).
- Úroveň 1: Analýza (popis vlastností obrazců).
- Úroveň 2: Abstrakce (neformální dedukce, klasifikace a třídění obrazců podle vlastností).
- Úroveň 3: Dedukce (formální dedukce, schopnost dokazovat tvrzení o vlastnostech obrazců).
- Úroveň 4: Axiomatizace (teoretická matematika).

Na úrovni *vizualizace* posuzují děti geometrické útvary jako celek podle toho, jak na ně útvar působí. V tomto období se nezabývají vlastnostmi daného útvaru a jsou často ovlivněny *prototypy* (van Hiele, 1986) či *ideálními příklady* (Tsamir et al., 2015), se kterými se setkávají. Děti se do tohoto období obvykle dostávají během mateřské školy, když jsou konfrontovány s předměty ve tvaru geometrických obrazců, a setrvávají v něm zpravidla i na začátku základní školy.

Zhruba v průběhu 3. ročníku by děti měly na základě svých zkušeností s geometrickými útvary přecházet do úrovně *analýzy*. Podle van Hieleho (1986) a dalších výzkumníků (např. Aktas Arnas & Aslan, 2010) by většina dětí měla být na této úrovni v průběhu 4. ročníku. Děti si postupně začínají všimnout typických vlastností daného útvaru. Jak uvádí Žilková et al. (2018), přestože si žáci uvědomují některé vlastnosti útvaru, nejsou zatím schopni odlišovat ty vlastnosti, které jsou podstatné pro definování útvaru. Definice žáků jsou proto zatím naivní, nepřesné, obsahující méně nebo více definitorických vlastností.

S přibývajícím zkušenostmi žáci stále víc vnímají vztahy mezi vlastnostmi útvarů, jsou schopni útvary třídít podle různých vlastností, vytvářet jednoduché definice. Dostávají se na úroveň *abstrakce*. Na této úrovni se již nenechávají ovlivňovat tím, jak na ně útvar působí, zvažují vždy jen jeho vlastnosti. Pokud je žák na úrovni abstrakce, neměly by u něj přetrvávat miskoncepce. Žáci by se na tuto úroveň měli dostat v průběhu druhého stupně. Zkušenosti s výukou na základní a střední škole ukazují, že u většiny žáků by bylo dostačující, pokud by se dostali na tuto úroveň a setrvali na ní do konce základní školy.

Na úrovni *dedukce* žáci chápou důležitost axiomů a definic, uvažují deduktivně. V případě optimálního poznávacího procesu žáci této úrovně dosáhnou na střední škole. Úrovně *axiomatizace* by potom studenti měli nabýt na vysoké škole.

Je přirozené, že miskoncepce, tedy mylných představ, o geometrických útvarech ubývá od nulté po čtvrtou úroveň van Hielovy škály. Výše bylo řečeno, že již na úrovni abstrakce by představy žáků měly být dostatečně přesné a naivní představy by měly téměř vymizet.

Vývoj žákovských představ a miskonsepce o geometrických pojmech u žáků od mateřské školy po 4. ročník základní školy je patrný v publikaci Žilkové et al. (2018). Děti v předškolním věku vnímají objekty holisticky, nezvažují vlastnosti, nechávají se ovlivnit například otočením útvaru. Otočení čtverce hraje pro předškolní děti velkou roli, čtverec „stojící na vrcholu“ pro děti přestává být čtvercem. U trojúhelníku je podstatné otočení, ale také tvar. Tupoúhlý trojúhelník předškolní děti mohou hodnotit jako „ne moc pěkný trojúhelník“ (Partová & Žilková, 2016). Naopak útvar připomínající prototypický trojúhelník (to znamená rovnoramenný stojící na základně), avšak mající například zaoblené vrcholy, obvykle označují jako trojúhelník.

V průběhu prvních čtyř let základní školy závisí vývoj poznávacího procesu v geometrii na způsobu výuky. V analýze odpovědí učitelů na otázku, zda zařazují geometrii pravidelně a zda využívají různé pomůcky pro vizualizaci geometrických útvarů, se projevilo, že přesnější představy se formují u žáků, kteří se setkávají s geometrií alespoň jedenkrát týdně a zároveň používají různé pomůcky (Budínová, 2017b). U mnoha žáků 4. ročníku přetrvávaly různé miskoncepce (ty budou rozebrány níže). Žáci byli úspěšnější v pojmenování útvarů, ale stále byli ovlivňováni zejména otočením útvarů. Často se nacházeli na úrovni vizualizace, případně na určitém přechodu mezi vizualizací a analýzou. Obdobné výsledky obdržela se slovenskými žáky 4. ročníku Žilková et al. (2018). Také další výzkumy se žáky věku 11 až 12 let ukázaly, že žáci setrvávají na úrovni vizualizace. Například výzkum Pavlovičové a Barčíkové (2013) ukázal, že přibližně 67 % žáků tohoto věku bylo na nulté

úrovni van Hielovy škály a 18 % žáků dokonce nedosáhlo ani této multé úrovně.

Zjištěné představy a chybné představy ve výzkumu na 1. stupni ZŠ

Ve výzkumu představ o geometrických pojmech u žáků 4. ročníku, který byl prováděn na Slovensku (Žilková et al., 2018) a v České republice (Budínová, 2017a, 2017b, 2018) byly stanoveny některé typické představy a miskoncepce žáků. Tyto miskoncepce nyní představím pro jednotlivé geometrické útvary. Budu uvádět výsledky testování v České republice, kterého se účastnilo 226 žáků (Budínová, 2017a, 2017b, 2018).

Trojúhelník. Největší potíž měli žáci s určením toho, které body patří trojúhelníku. Označit správně body trojúhelníku dokázalo pouhých 12 % žáků. Někteří žáci se domnívali, že vrcholy nejsou body trojúhelníku; jiní žáci naopak soudili, že pouze vrcholy jsou body trojúhelníku. Nejčastější chybou bylo, že žáci jako body trojúhelníku označili body ležící na hranici, ale nikoli bod z vnitřní oblasti¹. Tato chyba se vyskytla ve 40 % případů. Obdobné výsledky, kdy žáci 6. ročníku jako trojúhelník často vnímali pouze jeho hranici, získala Robová et al. (2019). Další frekventovanou chybou bylo označení útvaru s trojúhelníkovým tvarem jako trojúhelník – například útvaru se zaoblenými vrcholy nebo stranami. V těchto případech žáci chybovali v 15 až 20 % případů. Tupoúhlý trojúhelník nebyl pro žáky příliš problematickým tvarem, jako trojúhelník jej označilo 91 % žáků. Zde vidíme jednu z miskonceptí, která zřejmě na základě zkušeností mizí od 1. po 4. ročník. Žáci 1. ročníku totiž často soudí, že „takto správný trojúhelník nevypadá“, nebo alespoň že se jedná o nehezky trojúhelník (Žilková et al., 2018). Jako prototyp trojúhelníku se ukázal rovnoramenný trojúhelník postavený na základně, obdobně jako u jiných výzkumníků

¹Trojúhelník je obvykle v učebnicích pro základní školu zaveden jako část roviny. Například v *Přehledu matematiky* autorů Odvárka a Kadlečka (2004, s. 175) je uvedeno: „Trojúhelník je mnohoúhelník se třemi vrcholy. Každý trojúhelník můžeme vytvořit jako průnik tří polorovin.“

(např. Cutugno & Spagnolo, 2014; Žilková et al., 2018).

Čtverec. Nejčastější miskoncepcí bylo zaměňování čtverce a kosočtverce, a to v obou směrech – čtverec otočený o 45° oproti prototypické poloze byl někdy vnímán jako čtverec, jindy jako kosočtverec, záleželo na kontextu; kosočtverec postavený na základnu byl mnohdy vnímán jako čtverec. Dokonce 46 % žáků tento útvar vnímalo jako čtverec. Případ „otočeného čtverce“ je notoricky známý v mnoha zemích světa a tento fenomén má různá vysvětlení. Například Giaquinto (2007) se na problém dívá z hlediska perspektivy a vnímání objektu. Otočený čtverec připomíná kosočtverec, a pokud člověk nezačne ověřovat vlastnosti (úhly a délky stran), může se nechat percepcí zmýlit. V českém jazyce se navíc nabízí další důvod, kdy žáci mohou slovo kosočtverec vnímat spíše jako „koso-čtverec“, neboli čtverec našikmo. Ve výzkumu Budínové (2017b) se našli i žáci, kteří evidentně slova čtverec a kosočtverec vnímali synonymně, respektive ze čtverce se podle nich otočením stal kosočtverec. Další častou chybou bylo to, že zdánlivé modely (čtvercové útvary se zaoblenými vrcholy nebo stranami) žáci často vnímali jako čtverec.

Obdélník. U obdélníku hrál největší roli tvar, konkrétně příliš dlouhý a tenký obdélník již nebyl vnímán jako obdélník u 11 % žáků. Také zdánlivé modely žáky častokrát zmátly a ti je označili za obdélník.

Kruh. V případě kruhu se opět projevilo, že žáci nemají jasno v tom, které body náleží kruhu a které kružnici. Body kruhu určilo správně 40 % žáků, body kružnice 58 %. Žáci chybovali také v představě o tom, co je poloměr a co je průměr kružnice. V tomto případě žáci nedosáhli ani 50% úspěšnosti. U rozpoznávání tvarů nejčastěji chybovali v případě elipsy, a ještě častěji v případě mnohoúhelníku (úspěšnost kolem 80 %).

Metodologie navazujícího výzkumu

Výzkumu se účastnilo 237 žáků ze tří základních škol. Dvě školy byly z Brna a jedna ze Znojma. Celkem se do testování zapojilo

11 tříd: 3 čtvrté třídy, 4 šesté třídy a 4 osmé třídy. Ve 4. ročníku se výzkumu účastnilo 63 žáků, v 6. ročníku 93 žáků, v 8. ročníku 81 žáků. Žáci byli do výzkumu zvoleni pomocí dostupného výběru.

Tři výše uvedené ročníky byly do výzkumu vybrány záměrně. 4. ročník byl zvolen z toho důvodu, že v tomto věku by se žáci dle van Hielovy teorie měli nacházet na úrovni analýzy. Další ročníky byly stanoveny s dvouletým odstupem, přičemž se předpokládá, že žáci 8. ročníku by již měli být na úrovni abstrakce a z hlediska pojmotvorného procesu pro vybrané geometrické útvary (čtverec, trojúhelník, kruh) by se v 9. ročníku neměli dozvědět nic nového.

Výzkum probíhal ve druhém pololetí daného ročníku. Test sestával z jedenácti úloh, na vypracování testu žáci dostali jednu vyučovací hodinu. Test vycházel z původního testu pro žáky 4. ročníku (viz Žilková et al., 2018), k zaškrtnutí možnosti byl navíc přidán požadavek slovní odpovědi. Některé otázky byly mírně modifikovány.

Odpovědi žáků byly okódovány a vyhodnoceny, byly určeny procentuální úspěšnosti a nejčastější slovní odpovědi.

Výsledky navazujícího výzkumu

V návaznosti na výsledky testování žáků 1. stupně jsem se rozhodla modifikovat použitý test, a to tak, aby bylo patrné, proč se žák domnívá, zda daný útvar je či není modelem nějakého geometrického útvaru. Otázky proto byly doplněny místem na slovní odpověď.

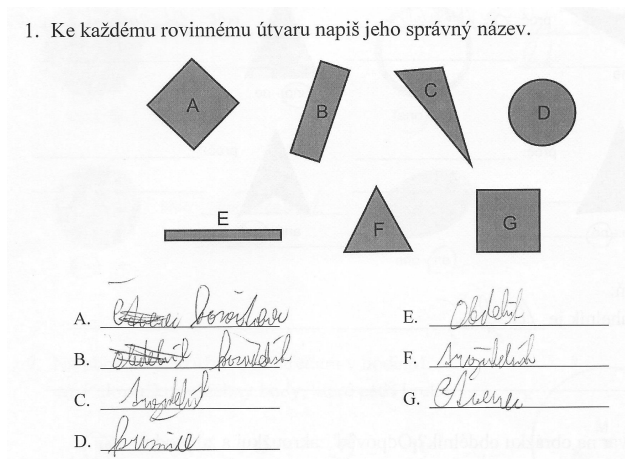
Otázky, které cílily na očekávané mylné představy pro pojmy čtverec, trojúhelník, kruh a kružnice, nyní představím a uvedu výsledky žáků.

V úloze 1 žáci měli pojmenovat dané útvary. Zadání je patrné z obrázku 1. Výsledky úlohy vidíme v tabulce 1.

Část 1A dopadla v souladu s předchozími zjištěními. Velká část žáků daný útvar označila jako kosočtverec. Vidíme, že směrem k 8. ročníku se zvyšuje úspěšnost, ovšem pokud mají být žáci 8. ročníku na úrovni abstrakce, neměla by zhruba polovina z nich otočený čtverec vnímat jako kosočtverec. V některých případech

se žáci mezi čtvercem a kosočtvercem rozhodovali, jak je ukázáno na obrázku 1.

1. Ke každému rovinnému útvaru napiš jeho správný název.



Obr. 1: Odpovědi žáka 8. ročníku, úloha 1

Tab. 1: Úspěšnost v úloze 1

Úloha 1	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
1A	36,5	47,3	53,1
1B	90,5	96,8	84,0
1C	81,0	94,6	98,8
1D	100,0	87,1	93,8
1E	90,5	95,7	97,5
1F	98,4	100,0	100,0
1G	96,8	97,8	100,0

Snížená úspěšnost (menší než 85 %) je dále v 8. ročníku u úlohy 1B, ve 4. ročníku u úlohy 1C a v 6. ročníku u úlohy 1D. Příčinou nižší úspěšnosti v 8. ročníku u úlohy 1B bylo to, že 18 % žáků útvar označilo jako „kosodélník“. Tato odpověď je patrná také na obrázku 1. To, že takto chybovali pouze žáci 8. ročníku, lze zřejmě

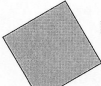




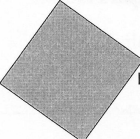
připsat faktu, že tito žáci se s kosodélníkem již setkávají, ale řada z nich si název nepojí se správným útvarem.

V úloze 1C většina žáků 4. ročníku s chybnou odpovědí vůbec nenapsala, jak se daný útvar nazývá. Zde patrně můžeme sledovat doznívající chybnou představu mladších dětí, pro které tupouhlý trojúhelník není trojúhelník.

U úlohy 1D byla snižená úspěšnost u žáků 6. ročníku – 6 žáků odpovědělo „kružnice“, 5 žáků „kolečko“ a 1 žák „koule“. Se zaměňováním 2D útvarů za 3D útvary jsem se setkávala v různých souvislostech – např. trojúhelník byl označován jako trojboký hranol nebo jehlan – nejčastěji takto chybovali žáci 4. ročníku, ale nejednalo se o příliš častý jev.

Zadání úlohy 2 zaměřené na pojem čtverec je patrné z obrázku 2. Procentuální výsledky jsou uvedeny v tabulce 2. Útvary mají (stejně jako v úlohách 3 a 5) pořadí zleva doprava a poté o řádek níže.

2. Je útvar na obrázku čtverec? Odpověď zakroužkuj a zdůvodni.

	proč: <u>všechny strany</u> <u>stejně dlouhé</u>		proč: <u>není všechny</u> <u>strany stejně dlouhé</u>
<input checked="" type="radio"/> ano - <input type="radio"/> ne		<input type="radio"/> ano - <input checked="" type="radio"/> ne	
	proč: <u>všechny strany</u> <u>stejně dlouhé</u>		proč: _____
<input checked="" type="radio"/> ano - <input type="radio"/> ne		<input checked="" type="radio"/> ano - <input type="radio"/> ne	
	proč: <u>všechny strany</u> <u>stejně dlouhé</u>		proč: <u>všechny strany</u> <u>stejně dlouhé</u>
<input checked="" type="radio"/> ano - <input type="radio"/> ne		<input checked="" type="radio"/> ano - <input type="radio"/> ne	

Obr. 2: Ukázka řešení žáka 6. ročníku, úloha 2

V částech 2A a 2F lze pozorovat, že otočení čtverce negativně ovlivnilo zejména žáky 4. ročníku. Oproti úloze 1A však klesl počet žáků, kteří útvar vnímali jako kosočtverec. To svědčí o tom, že pouze čtverec otočený přesně o 45° je pro žáky kosočtverec.

Můžeme také vidět, že chyba se eliminuje u žáků vyšších ročníků a že útvar 2F má nižší úspěšnost než útvar 2A. Ze slovních odpovědí se dalo vydedukovat, že čtverec 2F byl pro některé žáky příliš velký.

Tab. 2: Úspěšnost v úloze 2

Úloha 2	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
2A	77,8	92,5	96,3
2B	63,5	64,5	81,5
2C	84,1	92,5	91,4
2D	77,8	89,2	90,1
2E	98,4	100,0	98,8
2F	77,8	90,3	93,8

Ve slovních odpovědích jednoznačně převažovalo zdůvodnění, že „má stejně dlouhé strany“ (procentuálně 4. ročník 13 %, 6. ročník 38 %, 8. ročník 35 %), na druhém místě bylo to, že „má stejně dlouhé strany a sousední jsou kolmé“ (procentuálně 4. ročník 11 %, 6. ročník 4 %, 8. ročník 25 %), což jsou dvě vlastnosti, které (pokud by bylo uvedeno ještě to, že se jedná o rovinný útvar) determinují čtverec. Častou odpovědí bylo také, že „má 4 stejně dlouhé strany“, že „sousední strany jsou kolmé“, či „je otočený, ale je to čtverec“. V odpovědích převažovaly ty s uvedenou jednou vlastností.

Odpovědi žáků z jednotlivých tříd si do jisté míry odpovídaly. Zatímco v jedné třídě se žáci soustředili více na délky stran, v jiné třídě zvažovali spíše kolmost sousedních stran. Je možné, že toto odlišné vnímání téhož útvaru může být dáno přístupem učitele a tím, s jakými aktivitami na rozvoj pojmotvorného procesu v geometrii se žáci setkávají.

Nejnižší úspěšnost ve všech ročnících měla část 2B. Žáci často zvažovali kolmost sousedních stran, nejčastěji žáci 8. ročníku. Žáci nižších ročníků používali spíše naivní zdůvodnění, například „je

to křivé“, jak je uvedeno níže. Opět lze konstatovat, že odpovědi z jednotlivých tříd a rovněž z jednotlivých škol si do jisté míry odpovídaly. Zatímco žáci jedné třídy volili naivnější termíny „je to křivé“, „je to šikmé“, „je to nahlé“, „je to zkosené“ atd., žáci z jiné třídy volili vyjádření „strany nesvírají pravý úhel“.

Termín „koso čtverec“ se objevil jednou ve 4. ročníku a dvakrát v 8. ročníku. V 8. ročníku se objevil i případ, kdy žák zaškrtl odpověď „je to čtverec“ a do slovní odpovědi napsal „je to koso čtverec“.

Další odpovědi a názvy zahrnovaly například kosodélník, rovnoběžník, lichočtverec i lychočtverec, lichoběžník, krychle, obdélník, odpovědi typu „tako čtverec nevypadá“.

Objevovalo se i zdůvodnění „nemá stejně dlouhé strany“. Útvar však měl stejně dlouhé strany, což mohli žáci překontrolovat měřením. Nechali se nejspíš zmýlit zrakovým vnímáním. Jak je vidět, i ve správně zaškrtnuté odpovědi se skrývalo toto špatné vnímání skutečnosti. Tato chyba je patrná na obrázku 2.

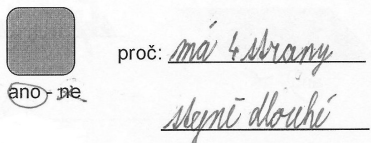
V části 2C měli nižší úspěšnost pouze žáci 4. ročníku. Tato nižší úspěšnost byla dána tím, že žáci volili naivní odpovědi (například „je to jako deka“) a ve velkém procentu neuvvedli žádnou odpověď, i když zaškrtili, že útvar je čtverec.

Nejčastější odpovědí bylo „není to čtverec, protože nemá rovné strany“ (procentuálně 4. ročník 35 %, 6. ročník 60 %, 8. ročník 40 %), na druhém místě byla odpověď „není to čtverec, protože sousední strany nejsou kolmé“. Tuto odpověď nejčastěji volili žáci 8. ročníku, v 27 %.

V této úloze se již trochu projevilo, že žáci nemají ujasněný pojem strana – zejména si nejsou jisti, zda musí být rovná nebo může být i křivá. Tato chyba je opět patrná na obrázku 2.

Z některých dalších odpovědí, jako „Je to něco jako poskládaná deka“, „je to polštář“, „tako čtverec nevypadá“ aj., je patrné, že žáci nevnímají pojem rovina optimálně – rovinný útvar lze podle nich „pomačkat“ a přesto rovinným útvarem zůstane.

Nižší úspěšnost měla dále úloha 2D ve 4. ročníku. Žákům ještě méně než v případě úlohy 2C vadilo, že strany nejsou rovné. To je patrné na obrázku 3.



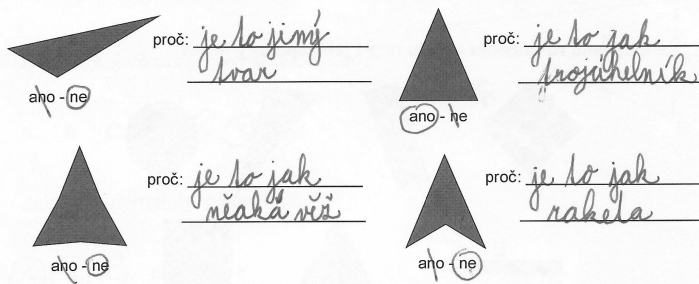
Obr. 3: Ukázka řešení žákyně 4. ročníku, úloha 2

Nejčastějším správným zdůvodněním bylo to, že útvar nemá vrcholy (procentuálně 4. ročník 40 %, 6. ročník 63 %, 8. ročník 49 %). Avšak termín „vrchol“ byl použit jen výjimečně, žáci používali výrazy „rohy“, „špičky“, „hrany“, „boky“. Pokud žáci použili pro vrchol slovo „hrana“ často to vypadalo, jako by čtverec vnímali trojrozměrně – jako nízký čtyřboký hranol.

Část 2E měla vysokou úspěšnost, přestože některým žákům vadilo, že čtverec je malý. V několika případech se objevila formule „je malý, ale je to čtverec“.

V úloze 3 bylo zkoumáno, zda žáci poznají trojúhelník. Zadání je patrné z obrázku 4.

4. Je útvar na obrázku trojúhelník? Odpověď zakroužkuj a zdůvodni.



Obr. 4: Ukázka řešení žákyně 4. ročníku, úloha 3

Úloha měla poměrně vysokou úspěšnost, jak je vidět v tabulce 3. Prototypický útvar 3B měl téměř stoprocentní úspěšnost a nejčastější zdůvodnění, proč je útvar trojúhelník, bylo, že „má tři strany“ (procentuálně 4. ročník 19 %, 6. ročník 30 %, 8. ročník 23 %), případně „útvár se třemi stranami a třemi vrcholy“,

či pouze „útvary se třemi vrcholy“ (žáci opět používali „rohů“, „body“, „hrany“, „špičky“).

Z výsledků je patrné, že nejvíce problematické byly pro žáky 4. ročníku útvary 3A a 3C. První z nich je tupouhlý trojúhelník. Jak již bylo řečeno, vnímání tupouhlého trojúhelníku jako ne-trojúhelníku je záležitostí především mladších dětí. Tento předpoklad se opět potvrdil. Druhý z nich je zdánlivý model, u něhož opět platilo, že žáci 4. ročníku měli nižší úspěšnost. Žáci, kteří měli tuto část špatně, buď nezapsali slovní zdůvodnění, nebo napsali, že útvar má tři strany.

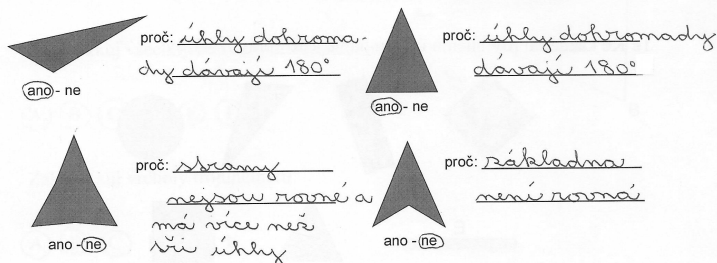
Tab. 3: Úspěšnost v úloze 3

Úloha 3	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
3A	79,4	91,4	98,8
3B	100,0	98,9	100,0
3C	81,0	93,5	96,2
3D	90,5	97,8	98,8

U některých žáků 4. ročníku se vyskytovala různá naivní zdůvodnění, jak je patrné na obrázku 4.

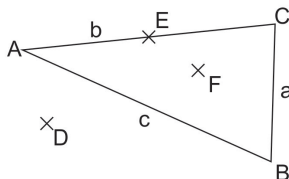
V 6. a zejména 8. ročníku byly odpovědi sofistikovanější. Bylo patrné, že v různých ročnících žáci přidávali různé vlastnosti, patrně ty, které se daný rok probíraly. V 6. a 8. ročníku několik žáků jako důvod uvádělo trojúhelníkovou nerovnost, ale nebylo zřejmé, zda tomu zcela rozumí. Někdy to vypadalo tak, že trojúhelníková nerovnost pro ně znamená to, že „dvě strany jsou stejně dlouhé a delší než třetí“. V 8. ročníku dále začali zvažovat součet vnitřních úhlů (viz obrázek 5). Kladla jsem si otázku, zda tito žáci, kteří zvažují „náročnější“ vlastnosti trojúhelníku, mají dobře utvořenou základní představu (tj. trojúhelník je mnohoúhelník se třemi stranami).

4. Je útvar na obrázku trojúhelník? Odpověď zakroužkuj a zdůvodni.



Obr. 5: Ukázka řešení žákyní 8. ročníku, úloha 3

Ve čtvrté úloze měli žáci kroužkovat z nabídnutých možností, které body na obrázku 6 patří trojúhelníku ABC.



Obr. 6: Zadání úlohy 4

Již bylo řečeno, že dřívější výzkumy se žáky 4. ročníku (Budinová, 2018) i 6. ročníku (Robová et al., 2019) ukázaly, že žáci mají různé představy o tom, které body náleží trojúhelníku. Byla jsem proto zvědavá, jak se představy vyvíjejí v průběhu druhého stupně. Za tímto účelem byla žákům zadána úloha 4 (obr. 6). Její procentuální úspěšnost je uvedena v tabulce 4.

Tab. 4: Úspěšnost v úloze 4

	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
Úloha 4	6,3	37,6	43,2

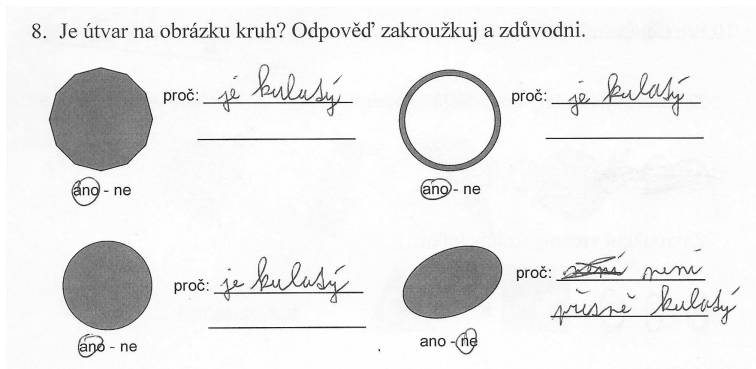
Z výsledků je zřejmé, že úspěšnost je ve všech třech ročnících velmi nízká. Ukázalo se, že v otázce určování bodů trojúhelníku

mají žáci napříč ročníky různé miskoncepce. Těmi nejčastějšími je to, že vnitřní body trojúhelníku nepatří trojúhelníku a že vrcholy nejsou body trojúhelníku. S touto představou se setkala i Robová et al. (2019). Odpovědi žáků jsou uvedeny v tabulce 5. Absolutní četnosti jsou uváděny z důvodu nízkého počtu případů pro jednotlivé odpovědi. Překvapivá pro mě byla odpověď „D, E, F“.

Tab. 5: Odpovědi žáků v úloze 4

Odpověď (kategorie odpovědi)	4. ročník	6. ročník	8. ročník
A, B, C, E, F (správná odpověď)	4	35	35
A, B, C (pouze vrcholy)	5	1	0
E, F (body trojúhelníku bez vrcholů)	12	31	15
E (pouze bod na hranici bez vrcholů)	11	5	10
F (pouze vnitřní bod)	5	2	3
A, B, C, E (bez vnitřního bodu)	7	11	11
A, B, C, F (bez bodu na hranici)	1	2	0
D, E, F (body včetně vnějšího bez vrcholů)	11	4	1
Jiná odpověď	3	1	1
Žádná odpověď	4	1	5
Celkem	63	93	81

Cílem páté úlohy, jejíž zadání je patrné z obrázku 7, bylo zjistit, jak žáci chápou a vnímají pojmy kruh a kružnice. Celkové výsledky úlohy vidíme v tabulce 6.



Obr. 7: Ukázka odpovědi žáka 6. ročníku, úloha 5

Tab. 6: Úspěšnost v úloze 5

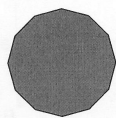
Úloha 5	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
5A	93,6	97,8	98,8
5B	54,0	64,5	63,0
5C	96,8	100,0	98,8
5D	88,9	94,6	93,8

Část 5A sledovala, jak žáci vnímají pojem „kulaté“ a zda se nenechají zmást tvarem, který je téměř kulatý, ale obsahuje strany a vrcholy. Úspěšnost úlohy byla vysoká ve všech ročnících. Časté odpovědi byly tyto: „není to kruh, protože má strany“, „je hranatý“, „je to dvanáctiúhelník“, „není kulatý“. Pouze několik málo žáků útvar označilo jako kruh, těm nevadilo, že je hranatý, ale připomínal jim kruh. Příklad tohoto jevu je patrný na obrázku 7. Vidíme zde, že fixace na slovo „kulatý“ může žáka negativně ovlivnit v různých typech protipříkladů.

V části 5C byl prototyp kruhu, žáci nejčastěji uváděli, že kruh je to proto, že je kulatý a je vybarvený. V několika případech se objevila i myšlenka poloměru.

Zajímavější výsledky byly obdrženy v částech 5B a 5D. Útvar 5B je mezikružší. To je pojem, se kterým se žáci 1. stupně nesetkají. Z odpovědí se ale zdá, že se s ním nesetkala ani řada žáků 2. stupně. Žáci často nevěděli, kam útvar zařadit, někteří se přiklonili ke kruhu, někteří naopak ke kružnici. Někteří žáci uvažovali o poloměru útvaru, viz obrázek 8.

8. Je útvar na obrázku kruh? Odpověď zakroužkuj a zdůvodni.



proč: nema' všude
stejný poloměr

ano - ne



proč: ma' všude
stejný poloměr

ano - ne



proč: je ma' všude
stejný poloměr

ano - ne



proč: hova' stejný
poloměr

ano - ne

Obr. 8: Ukázka odpovědí žákyně 8. ročníku, úloha 5

Úkolem úlohy 5D bylo určit, jak žáci chápou pojem „kulaté“. Zajímalo mě, zda jako „kulaté“ budou chápat dokonale kulaté, či jen oblé – něco, co se může koulet. Dále jsem chtěla zjistit, zda je žákům základní školy znám pojem elipsa, což není pojem základní školy, přesto povědomí o něm shledávám užitečné zejména pro žáky vyšších ročníků. Procentuálně dopadla úloha u všech ročníků poměrně dobře, odhalila však u žáků různé nedostatky ve vnímání elipsy (na obrázku v zadání úlohy je elipsa sjednocená se svojí vnitřní oblastí). Nejčastěji žáci uváděli, že útvar není kulatý (procentuálně 4. ročník 25 %, 6. ročník 43 %, 8. ročník 12 %) nebo že to je ovál (4. ročník 19 %, 6. ročník 32 %, 8. ročník 26 %), pouze v 8. ročníku se objevilo zdůvodnění, že útvar je elipsa (12 %). Odpovědi typu „je to kruh“, protože „je to kulaté“, „nemá to vrcholy“ nebo „je to jen nakřivo“ se objevily pouze v několika případech. Dalšími odpověďmi byly: „je to ovoid“, „je to elip-

soid“, „je to šišoid“, „je to šiška“, „je válcovitý“, „je to vejce“, „je to šulánek“ aj.

Často bylo uvedeno, že útvar je ovál. Existují různé přístupy k chápání oválu, dva zde uvedu:

1. Na Wikipedii (Wiki, 2018) se uvádí, že ovál je z technického hlediska obrazec sestavený ze dvou párů oblouků s dvěma různými poloměry. Z geometrického hlediska je oválem „jakákoli křivka připomínající vejce nebo elipsu, která ale elipsou není“.
2. Ovál je chápán jako nadřazený pojem pojmu elipsa (srov. např. Sedláček et al., 1981).

Jestliže se ztotožníme s druhým pohledem, je odpověď „ovál“, kterou žáci často uváděli, v pořádku.

- a) Zakroužkuj všechny body, které patří kruhu:

M N O P R

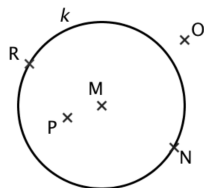
- b) Zakroužkuj všechny body, které patří kružnici:

M N O P R

- c) Zakroužkuj úsečky, které jsou poloměrem kružnice k .

MP MN ON RN RM

- d) Doplň: Průměr kružnice je úsečka _____.



Obr. 9: Zadání úlohy 6

Úloha 6 sledovala znalost toho, které body náleží kruhu a které kružnici (obr. 9). Úkolem bylo zjistit, zda se představy o kružnici a kruhu u žáků utváří správně, zda žáci dokážou určit, které body danému útvaru náleží. Dále bylo zjišťováno, zda mají dobrou představu o tom, co je poloměr a průměr kružnice a kruhu. Celková úspěšnost je uvedena v tabulce 7.

Lze říci, že všechny části této úlohy měly velmi nízkou úspěšnost. Úloha odhalila, že představy žáků o pojmech kruh a kružnice se neuttvářejí optimálně. Žáci mají mnoho mylných představ zejména o pojmu kruh, viz tabulka 8. Přestože s rostoucím ročníkem roste počet těch, kteří správně určili body, které patří kruhu,

Tab. 7: Úspěšnost v úloze 6

Úloha 6	4. ročník (úspěšnost v %)	6. ročník (úspěšnost v %)	8. ročník (úspěšnost v %)
6A	25,4	52,7	53,1
6B	68,3	68,8	90,1
6C	23,8	57,0	79,0
6D	30,2	50,0	38,3

ve všech ročnících se setkáváme s nezanedbatelným procentem žáků, kteří za kruh považují pouze jeho vnitřek. Je to přirozená (ač mylná) představa, která vzniká již v předškolním a mladším školním věku. Kruh je vnímán jako jakýsi doplněk kružnice, nemají společný průnik.

Z odpovědí je dále patrné, že také střed je pro mnoho žáků problematický bod. Někteří soudí, že střed není součástí kruhu.

Tab. 8: Odpovědi pro část „kruh“

Odpověď (kategorie odpovědi)	4. ročník	6. ročník	8. ročník
M, N, P, R (správná odpověď)	13	49	43
M, P (vnitřek kruhu)	23	26	25
N, R (body kružnice)	2	10	2
P (vnitřek bez středu)	4	4	6
N, P, R (body kruhu bez středu)	8	3	3
M, N, R (body kružnice se středem)	1	0	0
Jiná odpověď	2	0	1
Žádná odpověď	10	4	0
Celkem	63	93	81

Kružnice dopadla u všech ročníků procentuálně o poznání lépe než kruh. Přesto i zde se setkáváme s chybnými představami, viz tabulka 9.

Tab. 9: Odpovědi pro část „kružnice“

Odpověď (kategorie odpovědi)	4. ročník	6. ročník	8. ročník
N, R (správná odpověď)	43	63	73
M, N, P, R (body kruhu)	3	10	3
M, P (vnitřek kruhu)	4	4	1
M, N, R (body kružnice se středem)	2	5	0
N, O, R (body kružnice s vnějším bodem)	4	0	1
M, O, P (vše kromě bodů kružnice)	1	0	0
M, N, P	0	0	1
O (vnější bod)	1	4	0
Žádná odpověď	5	7	2
Celkem	63	93	81

Části 6C a 6D měly zjistit, zda žáci ovládají pojem poloměr a průměr. V případě poloměru volili nejružnější dvojice bodů na obrázku, nejčastěji úsečku RN , tedy průměr kružnice. Naopak průměr zase často zaměňovali s poloměrem, takže dopisovali MN , RM . Projevilo se rovněž to, že žáci často chápou průměr (i poloměr) kružnice jako délku úsečky spíše než jako úsečku, takže dopisovali $|MN|$, $|RM|$, případně průměr změřili a zapsali 1 cm 9 mm (zejména žáci 4. ročníku).

Příklady a protipříklady – způsob efektivní výuky geometrických pojmů

Miskoncepce, které byly výzkumem odhaleny, je možné odstraňovat nebo alespoň zmírňovat. Jedním z efektivních způsobů působení na žáky je práce s příklady a protipříklady. Přitom se lze zaměřit právě na ta nejvíce problematická místa, která byla ve výzkumu odhalena:

Čtverec

- Čtverec je (plný) rovinný útvar – část roviny (zmačkáním nebo zkřivením této části roviny přestává být čtvercem).
- Otočením čtverce na vrchol nevzniká kosočtverec. Z výsledků testu uvedených v článku se mi jeví, že vliv by mohla mít i velikost orientovaného úhlu otočení, viz porovnání útvarů 2A a 2F.
- Strany čtverce jsou čtyři shodné úsečky.
- Čtverec má čtyři vnitřní pravé úhly. Tuto vlastnost je nutné vnímat v kontextu shodnosti a počtu stran, neboť při izolovaném vnímání vlastnosti o 4 pravých vnitřních úhlech platí totéž i pro obdélník.

Trojúhelník

- Trojúhelník je (plný) rovinný útvar (platí to stejné, co pro čtverec).
- Tupoúhlý trojúhelník je trojúhelník (vhodné pro žáky 1. stupně).
- Strany trojúhelníku jsou tři úsečky.
- Trojúhelník má tři vnitřní úhly.

Kruh, kružnice, mezikruží

- Kruh je (plný) rovinný útvar.
- Kruh je kružnice sjednocená se svojí vnitřní oblastí.
- Kruh nemá strany ani vrcholy, je dokonale kulatý. Má poloměr (lze aplikovat od 2. stupně), což je úsečka (případně délka úsečky) s krajními body ve středu a na obvodu.
- Kružnice je rovinná křivka. Má poloměr.
- Mezikruží je rovinný útvar vymezený dvěma soustřednými

kružnicemi. Vznikne tak, že z kruhu vystříháme menší soustředný kruh (žák manipulací vnímá, jak mezikružší vzniká, což mu může pomoci postupně pojem pochopit).

Podle uvedených kritérií vybíráme útvary, které žákům nabídneme jako příklady a protipříklady. Je vhodné pracovat s barevným papírem, přičemž útvary může vyrobit učitel, nebo samotní žáci, kteří se tímto způsobem naučí ještě více.

Žáci útvary třídí a argumentují způsobem: „Tento útvar není čtverec, protože. . .“ (nemá rovné strany, není vyplněný, nemá pravé úhly atd.). Učitel může zvažovat, které vlastnosti zařadí, aby si je žáci mohli uvědomovat postupně.

Závěr a diskuse

Výzkum sledoval vývoj žákovských představ o pojmech čtverec, trojúhelník, kruh a kružnice v průběhu základního vzdělávání. Vyčázelo se z předcházejících výzkumů, které se zabývaly utvářením představ a pojmů v geometrii u žáků 1. stupně (Budínová, 2017a, 2017b, 2018; Žilková et al., 2018).

Výzkumu se účastnilo 237 žáků ze 4., 6. a 8. ročníku základní školy. Ukázalo se, že některé miskoncepce, které jsou typické pro žáky 1. stupně, časem přirozeně vymizí, zatímco jiné přetrvávají po celou základní školu. Nyní uvedu nejtypičtější příklady:

Čtverec

- Chybná představa, že čtverec otočený na vrchol je kosočtverec, je typická pro žáky 1. stupně, ale ve velkém procentu přetrvává až do 8. ročníku. Tato představa je opakovaně potvrzována v českých i zahraničních výzkumech (např. Gi-aquinto, 2007; Žilková et al., 2018).
- Chybná představa, že útvar čtvercového tvaru (např. se zaoblenými stranami či vrcholy) je čtverec, odeznívá ve vyšších ročnících.
- Žáci za určující vlastnost čtverce chápou zejména shodnost stran, případně počet stran, ani ve vyšších ročnících nepřibývá žáků, kteří by zvažovali i pravé úhly.

Trojúhelník

- Chybná představa, že tupouhlý trojúhelník není trojúhelník, je typická pro žáky 1. stupně, odeznívá ve vyšších ročnících.
- I ve vyšších ročnících mají žáci problémy určit, které body patří trojúhelníku. Typická je představa, že trojúhelník je uzavřená lomená čára. To ve svém výzkumu zjistili i Robová et al. (2019). Žáci mají i další mylné představy o tom, zda trojúhelníku patří vrcholy, vnitřní body či body hranice.

Kruh, kružnice

- Obdobně jako u trojúhelníku mají žáci i ve vyšších ročnících problémy určit, který bod náleží kruhu a který kružnici. Žáci tyto pojmy zaměňují. Někteří si myslí, že kruh je doplněk kružnice. Problematický je střed, u nějž není jasné, zda náleží kružnici či nikoli.
- Představa o kruhu je postavena na pojmu „kulaté“, což pro většinu žáků znamená „dokonale kulaté“. Ve vyšších ročnících někteří žáci začínají o kruhu přemýšlet i v souvislosti s poloměrem.
- Žáci až do vyšších ročníků neovládají pojem mezikruží. Mezikruží přitom může sloužit jako efektivní protipříklad pojmu kruh a rovněž kružnice. Žáci si tak mohou lépe upřesňovat představu o daných pojmech.

Ukázalo se, že ve vnímání rovinných útvarů jsou určité aspekty, které lze spatřovat jako problematické pro žáky základní školy. V geometrii se setkáváme s rovinnými útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh aj.) a s křivkami (např. kružnice a elipsa). Předpokládám, že s klasifikací rovinných útvarů na rovinné plochy a rovinné křivky se žáci na základní škole nesetkají, a tak je ponecháno víceméně na jejich intuici a případně na zkušenosti, jak si dané pojmy zařadí. Z výsledků úloh vidíme, že žáci v tomto třídění příliš jasno nemají. Pomohlo by jim pracovat s papírovými modely, na nichž by bylo patrné, zda k útvaru patří i vnitřní oblast, či nikoli. Taková aktivita by žákům umožnila začít přemýšlet nad rozdílem mezi rovinnou křivkou a plochou. Jako další aktivity, které by žákům pomohly posílit správné vnímání geometrických

rovinných pojmů, lze doporučit vystřihování papírových modelů, skládání papíru, rýsování v programu GeoGebra aj.

Narazila jsem na problém s pojmy elipsa a ovál jakožto vhodnými protipříklady pojmu kružnice. Žáci 1. stupně se s pojmem elipsa nesetkají, ani žáci 2. stupně základní školy nejsou dostatečně matematicky vybaveni na to, aby s pojmem elipsa mohli být seznámeni. Přesto zastávám přesvědčení, že by se žáci mohli na základní škole s termínem elipsa (případně ovál) setkávat, neboť slouží jako dobrý protipříklad kružnice a může být rovněž propedeutikou učiva střední školy o kuželosečkách.

Přestože terminologie není předmětem tohoto článku, nelze si nevšimnout, že žáci měli frekventované problémy se správným používáním správných termínů vztahujících se ke geometrickým útvarům, jako jsou strana, vrchol aj. Při výuce geometrických pojmů je dobré mít i tento aspekt na paměti a cíleně žáky vést ke korektnímu používání terminologie.

Hlavním omezením výzkumu je zejména výběr souboru na základě dostupnosti. Vzorek žáků není velký, nezahrnuje různé typy škol. Pro spolehlivost obdržených výsledků však mluví závěry jiných výzkumů, které jsou obdobné.

Literatura

- [1] Aktas Arnas, Y., & Aslan, A. G. D. (2010). Children's classification of geometric shapes. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 19(1), 254–270.
- [2] Budínová, I. (2017a). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy. *Učitel matematiky*, 25(2), 65–82.
- [3] Budínová, I. (2017b). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: čtverec a obdélník. *Učitel matematiky*, 25(5), 272–286.
- [4] Budínová, I. (2018). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh. *Učitel matematiky*, 26(1), 1–11.

- [5] Cutugno, P., & Spagnolo, F. (2014). *Misconceptions about triangle in elementary school*. Online: <https://1url.cz/3zm2x>
- [6] Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics. An epistemological study*. Oxford University Press.
- [7] Odvárko, O., & Kadleček, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus.
- [8] Partová, E., & Žilková, K. (2016). Uvažovanie detí predškolského veku o polohe a tvare rovinných útvarov. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae*, 15(4), 168–178.
- [9] Pavlovičová, G., & Barčíková, E. (2013). Investigation in geometrical thinking of pupils at the age of 11 to 12 through solving tasks. In J. Novotná, & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of SEMT '13. Tasks and Tools in Elementary Mathematics* (pp. 228–235). Charles University, Faculty of Education.
- [10] Robová, J., Moravcová, V., Halas, Z., & Hromadová, J. (2019). Žákovské koncepty trojúhelníku a obdélníku na začátku druhého stupně vzdělávání. *Scientia in educatione*, 10(1), 68–89.
- [11] Sedláček, J. et al. (1981). *Slovník školské matematiky*. SPN.
- [12] Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 497–509.
- [13] Van Hiele, P. M. (1986) *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Academic Press.
- [14] Wiki (2018). *Ovál* [online, cit. 2020-01-14]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ovál>
- [15] Žilková, K., Partová, E., Kopáčová, J., Tkačik, Š., Mokriš, M., Budínová, I., & Gunčaga, J. (2018). *Young children's concepts of geometric shapes*. Pearson.

Abstract

The paper presents some results of testing pupils from the 4th, 6th and 8th grade of elementary school focused on concept development and their images about geometric concepts. It examines how misconceptions about the concepts of square, triangle and circle develop during elementary school. The pupils were given a test in which they were asked to decide whether or not the shape is a representative of the term and to comment verbally on why they made such a decision. Their responses were analysed and are briefly presented in this paper. In conclusion, there is a recommendation that can help pupils to better shape their ideas about geometric concepts.

Irena Budínová

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity

Pořčí 31

603 00 Brno

e-mail: irena.budinova@seznam.cz