František Kuřina

Jak to vlastně je? Trojúhelník

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 4, 222–233

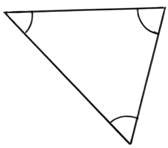
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148650

Jak to vlastně je?

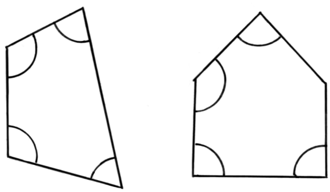
TROJÚHELNÍK

František Kuřina

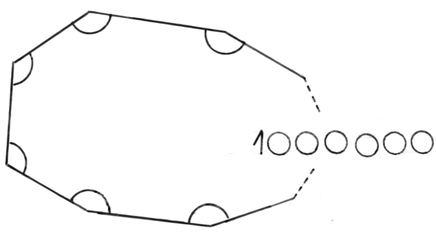
Když byl můj syn Jirka v první třídě, zeptal jsem se ho: „Co jste se dneska učili?“ Odpověděl mi obrázkem (obr. 1) a vysvětlil: „To je trojúhelník.“ „A co jsou ty obloučky?“ tázal jsem se dál. „To jsou úhly.“ Druhý den přišel s otázkou: „Je také čtyřúhelník?“ Odpověděl jsem: „Ano, je i pětiúhelník,“ a nakreslil obrázek 2. Za několik dní: „Je i milionúhelník?“ „Ano,“ a nakreslil jsem nedokončený obrázek 3. Asi po týdnu přišel syn s otázkou: „Je i dvojúhelník?“ Odpověděl jsem „Ne,“ a on se vytasil s obrázkem 4 a dodal: „Je i jednoúhelník.“ (obr. 5).



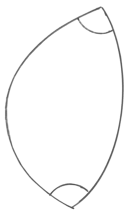
Obr. 1



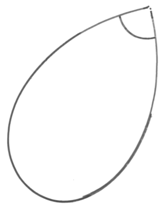
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Po této diskusi jsem si uvědomil, že český termín *trojúhelník* je poněkud nevhodný, protože svádí k představě, že trojúhelník má, tj. *obsahuje* tři úhly, ačkoliv vlastně každý z jeho úhlů obsahuje trojúhelník. Název navozuje nesprávnou představu o úhlu. Analogický problém je patrně v angličtině (triangle) a řadě dalších jazyků. Německý termín *Dreiecke* (tedy *tříroh*) je možná vhodnější.

Mylná představa úhlu vedla tak k pojmu dvojúhelník. Dítě tak intuitivně „skočilo“ do sférické geometrie.

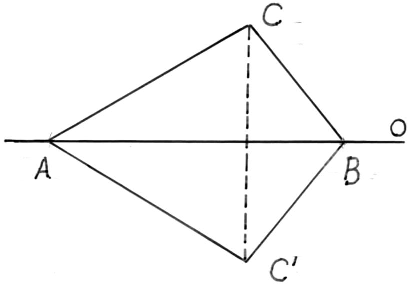
V tomto článku si na úvahách o trojúhelníku uvědomíme, že nepanuje vždy shoda např. v definicích pojmů nebo ve způsobech řešení úloh. Toto poznání je pro vzdělávací praxi důležité: žák může správně, i když netradičně, odpovědět na otázku „Co je to trojúhelník?“, mnohé úlohy můžeme řešit různými způsoby.

Definice trojúhelníku

Jak se zavádí pojem trojúhelníku ve školské matematice? Asi nejběžnější je chápání trojúhelníku jako průniku tří polorovin. To ovšem není nejvhodnější přístup, protože polorovina je patrně obtížnější pojem než trojúhelník. Navíc bychom měli přijmout takovouto formulaci: A, B, C jsou tři body, které neleží v přímce. Trojúhelníkem ABC rozumíme průnik polorovin ABC, BCA a ACB. Tuto definici můžeme nalézt např. v publikacích *Slovník školské matematiky* (1981), *Atlas geometrie* (Czachová et al., 2012) nebo v gymnaziální učebnici *Planimetrie* (Pomykalová, 1993).

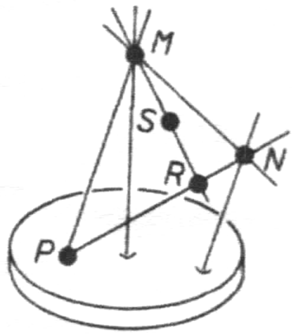
Někteří učitelé se řídí zásadou, že pořadí vrcholů v označení trojúhelníku musí souhlasit s jejich kladnou orientací na obrázku.

Tato konvence není vhodná, neboť např. obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle přímky AB by nebyl trojúhelník ABC' (obr. 6). Snad tato chyba souvisí s kategorickým tvrzením Evy Pomykalové: „Trojúhelník ABC (obr. 6) zapisujeme symbolicky $\triangle ABC$“ (Pomykalová, 1993, s. 23). Správné je vysvětlení: „Trojúhelník (z obr. 6) můžeme označit šesti způsoby: $\triangle ABC$, $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle BAC$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$“ (Herman et al., 1997, s. 108).



Obr. 6

V éře množinové matematiky se definoval trojúhelník PMN jako množina všech bodů S všech úseček RM, kde R je libovolný bod strany PN (obr. 7, Kabele et al., 1976, s. 159). To je velmi těžkopádný přístup pro dítě, které může modelovat trojúhelník z papíru „třemi rovnými střihy“. Této představě odpovídá snad pro školu nejvhodnější následující definice trojúhelníku: A, B, C jsou tři různé body, které neleží na přímce. Trojúhelník ABC je omezená část roviny ohraničená úsečkami AB, BC, CA. Termíny omezený a ohraničený jsou intuitivně jasné a lze ovšem podat i jejich vymezení. Trojúhelník se v uvedených definicích chápe jako „plocha“, což je patrně nejběžnější pojetí, v literatuře lze najít i interpretaci trojúhelníku jako jeho hranice nebo jako trojice bodů. Za nesprávnou ovšem považuji tuto definici: „Trojúhelník je uspořádaná trojice bodů A, B, C v rovině, které neleží na přímce a které souhlasí s kladnou orientací (tj. s orientací proti směru hodinových ručiček) roviny.“ (Švrček & Vanžura, 1988, s. 52). Podle této definice platí: Je-li ABC trojúhelník, pak ACB trojúhelník není.



Obr. 7

Polohové a nepolohové úlohy

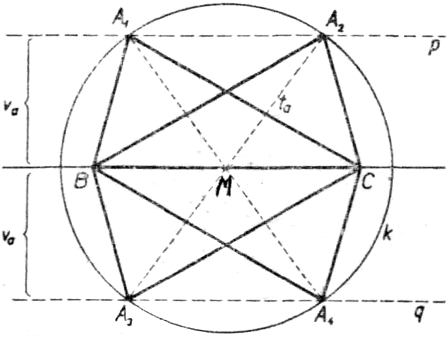
Téma *Trojúhelník* skýtá mnoho možností pro nejrůznější konstrukční a důkazové úlohy. Pohled na konstrukční úlohy připomeňme úvahou o diskusi nepolohových úloh. Jak je známo, v polohových konstrukčních úlohách je část hledaného útvaru dána polohou v rovině, v nepolohových úlohách jsou dány pouze velikosti částí tohoto útvaru.

Polohovou je např. úloha:
P: *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána polohou v rovině jeho strana $a = BC$, velikost výšky v_a a těžnice t_a k této straně.*

Nepolohová je úloha:
N: *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost jeho strany $BC = a$, velikost jeho výšky v_a a těžnice t_a.*

Tyto úlohy nebo úlohy analogické lze najít snad v každé naší učebnici pro základní školu, nejčastěji v učebnicích pro 8. ročník. V *Standardech* (Fuchs & Hrubý, 2000) to jsou úlohy 7c na s. 83 a 4.2f na s. 40.

Řešení nepolohové úlohy N je na obrázku 8 (Vyšín, 1962, s. 165). Úloha má čtyři řešení: trojúhelníky A_1BC, A_2BC, A_3BC, A_4BC. Řešením nepolohové úlohy je každý útvar, který vyhovuje podmínkám úlohy.

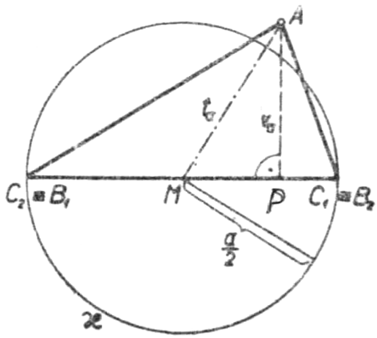


Obr. 8

Všimněme si řešení úlohy N (Vyšín, 1962, s. 165). „Umístíme úsečku BC a označíme M její střed. Neznámý je jediný bod: zbývající vrchol A hledaného trojúhelníku. Bod A náleží jednak kružnici k se středem M a poloměrem t_a, jednak dvěma rovnoběžkám p, q s přímkou BC, vedenými ve vzdálenosti v_a.“ Je-li $v_a < t_a$, „protne každá z přímek p, q kružnici k ve dvou různých bodech, dostaneme tak celkem 4 body A_1, A_2, A_3, A_4 (obr. 8). Kontrola ukáže, že všechny čtyři trojúhelníky A_iBC jsou řešeními úlohy. Přitom je $\triangle A_1BC \cong \triangle A_3BC$, $\triangle A_2BC \cong \triangle A_4BC$, ale $\triangle A_1BC$ není shodný s $\triangle A_2BC$ (tyto trojúhelníky jsou shodné, ale ne požadovaným způsobem). Je totiž $\triangle A_1BC \cong \triangle A_2CB$, příslušná shodnost je souměrnost podle osy úsečky BC, která převádí sice bod A_1 v bod A_2, ale vyměňuje body B, C. Naproti tomu souměrnost podle přímky BC reprodukuje oba vrcholy B, C a vyměňuje body A_1, A_3 i body A_2, A_4. Úloha má tedy dvě různá řešení.“

Vyšín řeší touž úlohu i s jinou lokalizací (Vyšín, 1962, s. 167).

„Umístíme úsečku AM délky t_a a sestrojíme trojúhelník AMP, kde P je pata výšky vedené z vrcholu A (obr. 9). Úloha má pak dva neznámé body B, C. Každý z těchto bodů náleží jednak přímce MP, jednak kružnici se středem M a poloměrem $\frac{1}{2}a$. Přímka MP protne kružnici ve dvou různých bodech, dostaneme tedy jediný trojúhelník; zdálo by se, že jsme dospěli jen k jedinému řešení, ale není tomu tak. Označíme-li vrcholy dvojím způsobem podle obrázku 9, vidíme, že jediný narýsovaný trojúhelník platí za dvě řešení, neboť trojúhelník AB_1C_1 není shodný s trojúhelníkem AB_2C_2. (Platí $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle AC_2B_2$.) Dostáváme opět dvě různá řešení."



Obr. 9

Závěr, že úloha má v obou případech dvě řešení, není správný ani v jednom případu. Sledovaná úloha je nepolohová a rozlišování řešení podle polohy vrcholů v rovině není oprávněné. Pokusím se to vysvětlit podrobněji. Řešením nepolohové úlohy je libovolný trojúhelník, který splňuje požadavky úlohy bez ohledu na jeho polohu v rovině. Tedy shodné trojúhelníky považujeme za jedno řešení. Relace shodnosti je relací ekvivalence, a rozděluje tedy množinu trojúhelníků roviny na trojúhelníky navzájem shodné. To jsou jakési „volné" trojúhelníky. Je to analogická situace jako u množiny vektorů. Množina souhlasně orientovaných, rovnoběžných a shodných úseček tvoří jeden volný vektor (určený směrem a velikostí). Dva trojúhelníky jsou shodné, existuje-li shodné zobrazení, které převádí jeden v druhý. Takový volný trojúhelník je určen velikostí stran (tedy např. (a, b, c)). Označení vrcholů písmeny navozuje představu umístění trojúhelníku v rovině, což je proti tomu, že požadavky na řešení se týkají pouze velikostí prvků hledaného trojúhelníku. Nepolohová úloha N má tedy jediné řešení. To odpovídá i *Slovníku školské matematiky* (1981), kde se píše: „Počet řešení nepolohové konstrukční úlohy je roven počtu všech tříd navzájem shodných útvarů, které mají požadované vlastnosti,“ (1981, s. 80). Další poznámka je ovšem diskutabilní: „Rozhodování o počtu řešení ovlivňuje i to, zda jsou body označeny písmeny či ne.“ Na tuto problematiku jsem upozorňoval v článku (Kuřina, 1970, s. 54). Dokonce i „výhružnou“ informaci, kterou z učebnice (Herman et al., 1998) reprodukujeme na obrázku 10 a která měla ospravedlnit existenci dvou řešení naší úlohy, můžeme chápat jako argument pro jediné řešení. Stačí označit v obrázku 8 trojúhelník BCA_1 jako trojúhelník $B_1C_1A_1$ a trojúhelník BCA_2 jako trojúhelník $C_2B_2A_2$.

Dobře si zapamatujte:

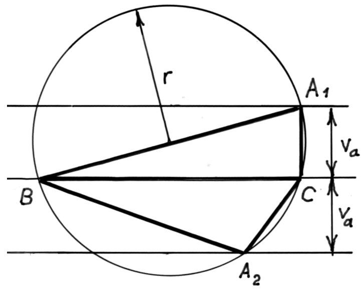
Řešíme-li nepolohovou úlohu na konstrukci trojúhelníku ABC, pak dva nalezené trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ považujeme za totéž řešení jedině tehdy, když platí shodnost $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, ve které vrcholu A_1 odpovídá vrchol A_2, vrcholu B_1 odpovídá vrchol B_2 a vrcholu C_1 odpovídá vrchol C_2.

Obr. 10

Z mého pohledu nesprávné pojetí diskuse nepolohové úlohy se vyskytuje téměř ve všech našich učebnicích. Uveďme namátkou: (Binterová et al., 2009, 4 řešení), (Cihlář & Zelenka, 1998, 4 řešení), (Hecht et al., 2000, 4 řešení). Dvě řešení se nesprávně uvádějí např. v těchto publikacích: (Herman et al., 1998, s. 10), (Müllerová et al., 2002), (Půlpán & Trejbal, 2009), (Šedivý et al., 1977), (Polák, 2014), (Švrček & Vanžura, 1988).

V podstatě správný výsledek uvádějí Holubář a Vojtěch (1947): „Řešením jsou dva shodné trojúhelníky,“ a Šofr (1976): „Řešením jsou čtyři shodné trojúhelníky.“ Zdá se, že řada autorů se zde diskutované problematice vyhýbá, např. Rosecká a Míček (1999) a Pomykalová (1993), neboť žádnou nepolohovou úlohu o trojúhelníku typu $\triangle(a, v_a, t_a)$ neřeší.

V našich učebnicích se obvykle ještě uvádí úmluva: Začneme-li řešení nepolohové úlohy o trojúhelníku ABC např. umístěním strany BC, budeme třetí vrchol hledat jen v jedné polorovině s hranicí BC. Podle této úmluvy by měla úloha *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost strany $|BC| = a$, poloměr r kružnice trojúhelníku opsané a velikost výšky v_a* jediné řešení, a ne dvě, jak je správně nakresleno na obrázku 11.

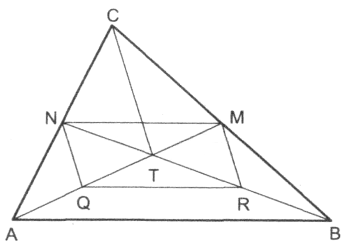


Obr. 11

Důkazy

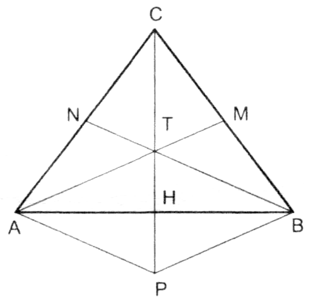
Různé přístupy k řešení téhož problému můžeme ukázat i na úlohách důkazových. Důkaz není jednoznačně určen zněním věty. Závisí např. na teorii, kterou máme k dispozici, na zkušenostech autora, ale i na jeho intuici. Formulace „Věta se dokazuje takto: …“, s níž se někdy můžeme setkat, zastírá možnost jejích různých důkazů. Ilustrujme tuto problematiku na důkazu věty: *V každém trojúhelníku procházejí těžnice jedním bodem.*

Snad nejfrekventovanější její důkaz můžeme ilustrovat obrázkem 12. Sestrojme průsečík T těžnic AM a BN a střední příčky NQ a MR trojúhelníků ACT a BCT. Protože platí $|NQ| = |MR| = \frac{1}{2}|CT|$ a $NQ \parallel MR$, je čtyřúhelník $NMRQ$ rovnoběžník a T jeho střed. To znamená, že $|AT| = 2|MT|$ a $|TB| = 2|NT|$. Stejný výsledek platí ovšem i pro těžnice z vrcholů A a C. Bod T leží tedy na všech těžnicích. Zde uvedený důkaz lze najít např. v monografii (Coxeter, 1961) a učebnici (Herman et al., 1995).



Obr. 12

Eduard Čech uvádí v učebnici *Geometrie* (Čech, 1944) důkaz, který se mi jeví jako jednodušší. Uvažuje takto: V trojúhelníku ABC označme T průsečík těžnic BN a AM (obr. 13). Sestrojme bod P tak, aby bod T byl středem úsečky CP. Pak je ovšem čtyřúhelník $APBT$ rovnoběžníkem (NT je podle konstrukce střední příčka trojúhelníku APC a MT je střední příčkou trojúhelníku BPC) a jeho střed H je středem strany AB. TH je tedy třetí těžnicí $\triangle ABC$, která ovšem prochází průsečíkem T prvních dvou těžnic. Tím je věta o těžišti trojúhelníku dokázána.



Obr. 13

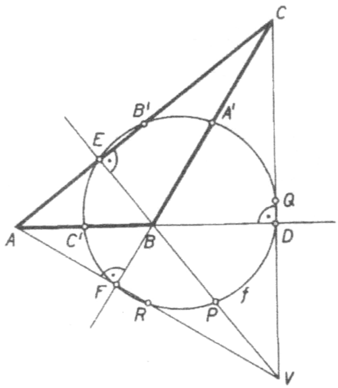
Připomenuté důkazy jsou založeny na určitém nápadu (konstrukci rovnoběžníku $NMRQ$ v případu prvním a rovnoběžníku $APBT$ v případu druhém). Větu o těžišti trojúhelníku můžeme ovšem dokázat např. užitím stejnolehlosti (Pomykalová, 1993) nebo výpočtem klasickou analytickou geometrií nebo vektorově.

Historický, didaktický a žákovský pohled na řešení různých problémů elementární matematiky lze nalézt např. v mé knize *Matematika a řešení* úloh (Kuřina, 2011). Téma *Trojúhelník* je ovšem bohatě zpracováno v nejrůznější literatuře, např. (Coxeter, 1961; Švrček & Vanžura, 1988).

Na závěr již jen připomeňme dvě pozoruhodné zajímavosti: kružnici devíti bodů a Morleyovu větu.

Kružnice devíti bodů

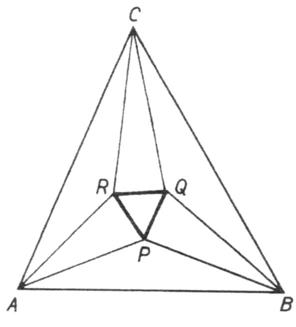
V libovolném trojúhelníku leží na jedné kružnici středy stran, paty výšek a středy úseček, které spojují vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek (obr. 14, Kuřina, 1996, s. 84). Důkaz této věty lze najít např. v citované publikaci. Její ověření obrázkem je dobrou prověrkou přesnosti rýsování.



Obr. 14

Morleyova věta

Průsečíky každých dvou polopřímek, které vycházejí z krajních bodů stran libovolného trojúhelníku a svírají s příslušnými stranami vždy jednu třetinu vnitřních přilehlých úhlů, jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku (obr. 15, Kuřina, 1996, s. 86). Důkazy Morleyovy věty a historické souvislosti jsou např. v mé knize *Deset pohledů na geometrii* (Kuřina, 1996).



Obr. 15

Literatura

[1] Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2009). *Matematika 8. Geometrie*. Fraus.

[2] Cihlář, J., & Zelenka, M. (1988). *Matematika 8*. Pythagoras Publishing.

[3] Coxeter, H. S. M. (1961). *Introduction to Geometry*. Wiley.

[4] Czachová, L., Hájková, V., Hromadová, J., Moravcová, V., Richter, J., Surynková, P., Šarounová, A., Šaroun, J., Šrubař, J., Štrauberová, Z., Tichý, V., & Voráčová, Š. (2012). *Atlas geometrie*. Academia.

[5] Čech, E. (1944). *Geometrie pro IV. třídu středních škol*. JČMF.

[6] Fuchs, E., & Hrubý, D. (2000). *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Prometheus.

[7] Hecht, T., Bero, Š., & Černek, P. (2000). *Matematika pro 1. ročník gymnázií. 3. Planimetrie*. Orbis Pictus Istropolitana.

[8] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1998). *Matematika. Geometrické konstrukce*. Prometheus.

[9] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1995). *Matematika. Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Prometheus.

[10] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1997). *Matematika. Úvodní opakování*. Prometheus.

[11] Holubář, J., & Vojtěch, J. (1947). *Geometrie pro V. třídu středních škol*. JČMF.

[12] Kabele, J., Janků, M., & Hruša, K. (1976). *Metodický list pro učitele k učebnici matematiky pro 2. ročník ZŠ*. SPN.

[13] Kuřina, F. (1970). Ist die Definition des Dreiecks ein Didaktisches Problem? *Archimedes, 22*, 54–54.

[14] Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. Jihočeská Univerzita.

[15] Kuřina, F. (1996). *Deset pohledů na geometrii.* MÚ AVČR.

[16] Müllerová, J., Macháček, V., Kraemer, E., & Brant. J. (2002). *Matematika 8. Geometrie.* Kvarta.

[17] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky.* Fraus.

[18] Pomykalová, E. (1993). *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus.

[19] Půlpán, Z., & Trejbal, J. (2009). *Geometrie 8.* SPN.

[20] Rosecká, Z., & Míček, A. (1999). *Geometrie 8.* Nová škola.

[21] *Slovník školské matematiky* (1981). SPN.

[22] Šedivý, J., Lukátšová, J., Richtáriková, S., & Židek, S. (1977). *Matematika pro 1. ročník gymnázia.* SPN.

[23] Šofr, B. (1976). *Euklidovské geometrické konstrukce.* Alfa.

[24] Švrček, J., & Vanžura, J. (1988). *Geometrie trojúhelníku.* SNTL.

[25] Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* SPN.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com