Milan Lekár

Graciózne ohodnotenie grafov v školských úlohách

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 3, 150–161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148642

GRACIÓZNE OHODNOTENIE GRAFOV V ŠKOLSKÝCH ÚLOHÁCH

Milan Lekár

V nasledujúcom texte sa budeme snažiť vysvetliť, čo je to graciózne ohodnotenie grafov a predstaviť rôzne úlohy pre učiteľov základných a stredných škôl. V texte budeme predpokladať, že čitateľ pozná pojmy kružnica a strom z oblasti teórie grafov. Začneme definíciou grafu:

Definícia 1. Graf alebo neorientovaný graf G je usporiadaná dvojica $G = (V, H)$, kde:

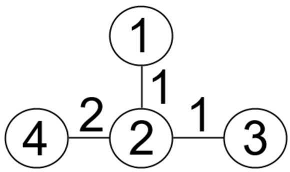
a) V je neprázdna konečná množina vrcholov grafu,
b) H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u \neq v$, nazývaných hrany grafu (Znám, 1982).

Teraz pristúpime k definícii graciózneho ohodnotenia grafov:

Definícia 2. Daný je graf $G = (V, H)$, v ktorom platí: $V = \{1, 2, \ldots, m\}$.

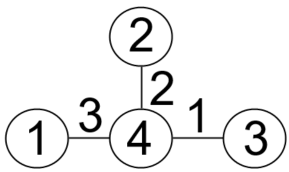
Ohodnotenie, ktoré každému vrcholu m-vrcholovému grafu G priradí jednoznačnú hodnotu z množiny $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ tak, že žiadne dva vrcholy nemajú rovnakú hodnotu a každej hrane priradí jednoznačnú hodnotu rovnú absolútnej hodnote rozdielu hodnôt vrcholov, s ktorými susedí, pričom žiadne dve hrany nemajú rovnakú hodnotu z množiny $H = \{1, 2, \ldots, m-1\}$, sa nazýva graciózne ohodnotenie grafu $G = (V, H)$ (Huang et al., 1982).

Definícia graciózneho ohodnotenia grafu sa na prvý pohľad zdá byť nie úplne jednoduchá, ale v skutočnosti nejde o nič ťažké na pochopenie. Najprv si ukážeme, čo nie je graciózne ohodnotenie grafu (obr. 1):



Obr. 1: Nejde o graciózne ohodnotenie grafu

Vidíme, že vrcholy majú hodnoty $1, 2, 3, 4$, ale hodnoty hrán sú $1, 2$, pričom hodnota 1 je použitá dvakrát, teda chýba hrana s hodnotou 3. Základná úvaha, ktorú by v tomto momente mali žiaci zvládnuť, je všimnúť si, že hranu s hodnotou 3 je možné podľa definície vytvoriť iba ako rozdiel hodnôt vrcholov 1 a 4, preto je zrejme výhodnejšie skúsiť vložiť číslo 4 do stredu grafu, a vytvoriť tak graciózne ohodnotenie grafu. Situácia je zobrazená na obrázku 2:

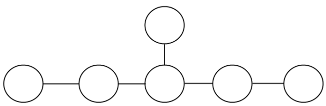


Obr. 2: Graciózne ohodnotenie grafu

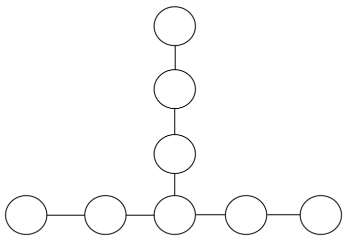
V tomto prípade už vidíme, že hodnoty vrcholov grafu sú $1, 2, 3, 4$ a hodnoty hrán grafu sú $1, 2, 3$, pričom každý vrchol a každá hrana má jednoznačne pridelené ohodnotenie. Ide preto o graciózne ohodnotenie grafu. Na jednoduchom grafe sme si ilustrovali vyššie uvedenú definíciu, aby sme lepšie pochopili graciózne ohodnotenie grafov. Zároveň je vhodné uvedomiť si, že rovnako tak pri vysvetľovaní gracióznehoohodnotenia žiakom je veľmi vhodné použiť obrázky. Žiaci prakticky ihneď pochopia definíciu gracióznehoohodnotenia grafu z obrázku a učiteľ v nich udrží záujem o nový typ úloh, ktorým graciózne ohodnotenie grafov nepochybne je. Jedným z prvých slovenských matematikov, ktorý sa venoval gracióznemu ohodnoteniu grafov, bol už prof. Alexander Rosa v roku 1961, kedy vyslovil hypotézu, že každý strom je možné graciózne ohodnotiť, a keďže nebola dodnes dokázaná, ide o viac ako 50 rokov starý otvorený problém (Ivaška, 2008).

Teraz si môžeme predstaviť rôzne druhy úloh na graciózne ohodnotenie grafov. Prvým typom úlohy je už vyššie načrtnuté graciózne ohodnotenie grafu konkrétneho grafu. Úlohy zamerané na graciózne ohodnotenie grafov je možné podľa uváženia učiteľa voliť ľahšie až po veľmi náročné s vysokým počtom vrcholov. Ukážeme si grafy s ľahkou, strednou a ťažkou náročnosťou:

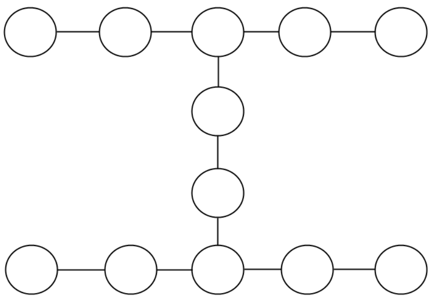
Úloha 1. Priraďte grafom na obrázkoch 3, 4 a 5 graciózne ohodnotenie.



Obr. 3: Ľahká náročnosť



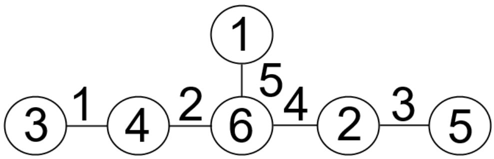
Obr. 4: Stredná náročnosť



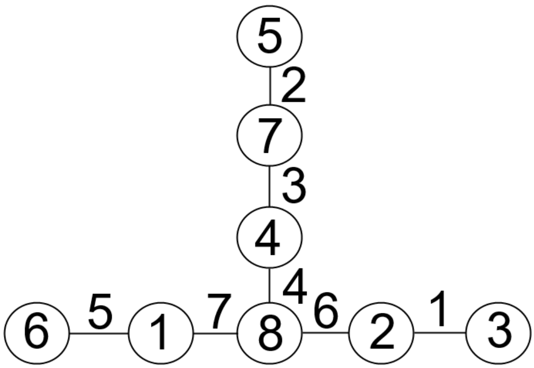
Obr. 5: Ťažká náročnosť

Môžeme vidieť, že prvý graf má 6 vrcholov. Nájsť ohodnotenie tohto grafu by malo byť pre žiakov jednoduché a malo by trvať len niekoľko minút, samozrejme v závislosti od ročníka, v ktorom sa žiaci nachádzajú. Druhý graf obsahuje 8 vrcholov a ide už o trochu náročnejší graf, aj keď ide o podobný graf ako v prvom prípade – vzniká pridaním dvoch vrcholov a dvoch hrán k prvému grafu.

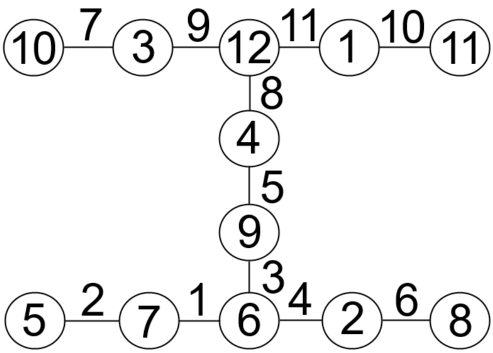
Tretí graf je už pomerne náročný. Riešenia všetkých troch grafov (obr. 6, 7, 8):



Obr. 6



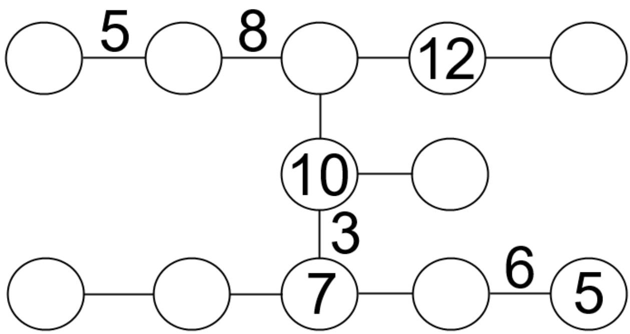
Obr. 7



Obr. 8

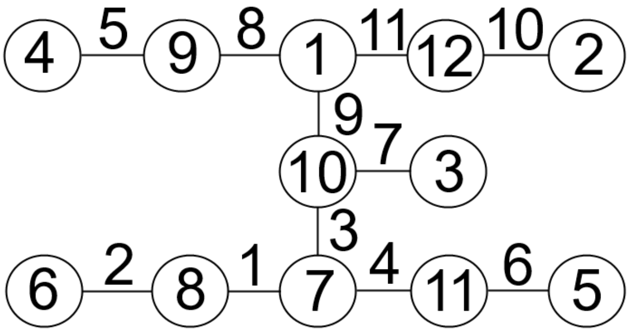
Ďalšia možnosť práce s gracióznym ohodnotením grafov na hodinách matematiky je ponúknuť žiakom čiastočne graciózne ohodnotený graf s podmienkou, aby doplnili chýbajúce hodnoty vrcholov a hrán.

Úloha 2. Doplňte hodnoty vrcholov a hrán tak, aby bol graf na obrázku 9 graciózne ohodnotený.



Obr. 9

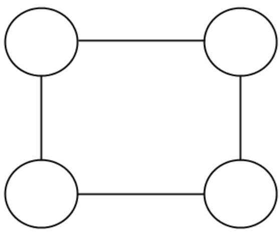
Žiaci si pri vyššie uvedenom grafe ihneď môžu všimnúť, že má 12 vrcholov, teda najvyššia hodnota hrany bude 11 a jediný spôsob, ako túto hodnotu možno získať, je pri vrchole s hodnotou 12 ako rozdiel čísel 1 a 12. Z toho logicky vyplýva, že pre hodnotu 11 pre hranu sú len dve možnosti a vrchol s hodnotou 1 bude ležať bezprostredne vedľa vrcholu s hodnotou 12. Počet možností ako získať hranu s hodnotou 5 a 8 je taktiež obmedzený. Hodnotu hrany 6 dole vpravo na grafe je tiež možné vytvoriť len jediným spôsobom, a to ohodnotením prázdneho vrcholu hodnotou 11. Z toho automaticky vyplýva hodnota hrany medzi vrcholom s hodnotou 7 a 11, je to hodnota 4. Takýmito postupnými úvahami môžu postupne žiaci dospieť ku kompletnému gracióznemu ohodnoteniu grafu. Riešenie (obr. 10):



Obr. 10

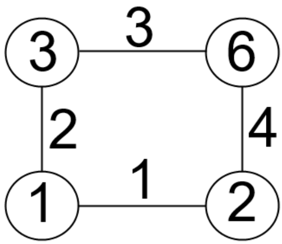
V predchádzajúcom texte sme sa zaoberali gracióznym ohodnotením stromov. Je zrejmé, že každý m-vrcholový graf obsahuje $m-1$ hrán. V prípade kružníc sa však situácia mení, pretože m-vrcholový graf, ktorý obsahuje práve jednu kružnicu, ma práve m hrán. Z toho vyplýva, že najvyššia hodnota hrany je rovnaká ako najvyššia hodnota vrcholu, a to je spor s definíciou, pretože jediný spôsob, ako je možné získať hodnotu hrany, je urobiť rozdiel hodnôt vrcholov. Z toho logicky vyplýva, že graf obsahujúci kružnicu nie je možné graciózne ohodnotiť (Cabaniss et al., 1992). Napriek tomu sa v nasledujúcom príklade o to pokúsime.

Úloha 3. Ohodnoťte graciózne kružnicu so štyrmi vrcholmi a štyrmi hranami na obrázku 11.



Obr. 11

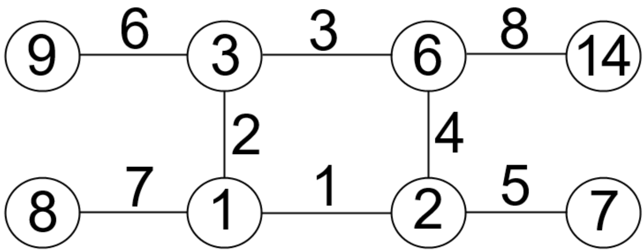
Ak by sme začali vrcholom s hodnotou 1, mohli by sme dve s ním susediace hrany ohodnotiť hodnotami 1 a 2. Tak by sme získali hodnoty 2 a 3 pre ďalšie dva vrcholy. Avšak práve teraz nastáva problém, pretože aby sme získali hodnotu 4 pre poslednú hranu, posledný vrchol by musel mať hodnotu 6. Vrcholy s hodnotami 4 a 5 by preto museli chýbať a definícia graciózneho ohodnotenia nie je splnená. Situácia je znázornená na obrázku 12.



Obr. 12

Jednoduchou úvahou je možné dokázať, že danú kružnicu nie je možné graciózne ohodnotiť. Množina hodnôt vrcholov je $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a množina hodnôt hrán je $H = \{1, 2, 3, 4\}$. Hodnoty hrán je možné získať len ako absolútne hodnoty rozdielov hodnôt vrcholov, z toho vyplýva, že nie je možné získať hodnotu 4 pre hranu. Pomocou čísel $1, 2, 3, 4$ a operácie rozdielu to nie je možné. Situáciu je možno ľahko zovšeobecniť pre ľubovoľnú m-vrcholovú kružnicu, ktorej množina hodnôt vrcholov je $V = \{1, 2, \dots, m\}$ a množina hodnôt hrán je $H = \{1, 2, \dots, m\}$. Hodnotu m nie je možné pomocou čísel $1, 2, \dots, m$ a operácie rozdielu získať. Napriek tomu si čitateľ môže všimnúť, že na obrázku 12 hrany obsahujú hodnoty $1, 2, 3, 4$, teda hodnoty hrán zachovávajú vlastnosť pôvodnej definície. Dostali sme teda v istom slova zmysle slabšie ohodnotenie, v ktorom hodnoty hrán sú z množiny $H = \{1, 2, \dots, m\}$, pričom každá hodnota je použitá práve raz a žiadna sa neopakuje, no hodnoty vrcholov sú ľubovoľné. Pre žiakov môže byť zaujímavá úloha ohodnotiť graf obsahujúci kružnicu tak, aby najvyššia hodnota vrcholu bola čo najnižšia (Rosa, 1967).

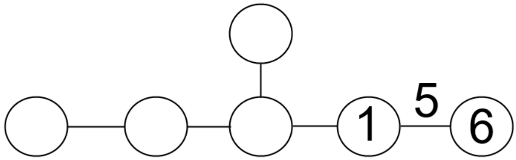
Ak by sme v kružnici pridali vrchol, logicky by pribudla aj jedna hrana, teda počet vrcholov a počet hrán by sa zvýšil o 1 a nemožnosť graciózneho ohodnotenia by bola zachovaná. Pridajme ku kružnici na obrázku 11 hneď 4 vrcholy a 4 hrany (obr.13).



Obr. 13

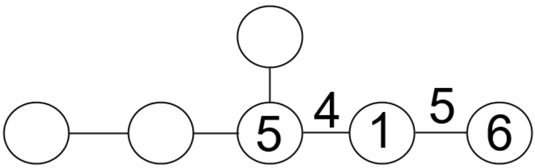
Vidíme, že hodnoty hrán sú opäť zachované, no chýbajú hodnoty vrcholov $4, 5, 10, 11, 12, 13$ a najvyššia hodnota pre vrchol vyskočila až na číslo 14. Situácia sa ďalej komplikuje s postupným pridávaním vrcholov (Rosa, 1967b).

Pre učiteľov, ktorých zaujme tento článok a chceli by na svojich hodinách skúsiť so žiakmi ohodnocovať grafy gracióznym ohodnotením, ponúkame metodiku, ako to robiť čo najefektívnejšie. Hneď na začiatku je však potrebné uvedomiť si, že zrejme neexistuje algoritmus, ktorý hneď od začiatku vedie jednoznačne ku gracióznemu ohodnoteniu grafu, a pri grafoch s vysokým obsahom vrcholov bude často vznikať situácia, kedy je potrebné urobiť v postupe krok späť. Napriek tomu však existuje niekoľko skutočností, ktoré si môžeme uvedomiť hneď na začiatku. Prvá z nich je už vyššie opísaná vlastnosť, ktorá hovorí, že v m-vrcholovom grafe existuje práve jedna možnosť, ako získať hranu s hodnotou $(m - 1)$, a to práve rozdielom vrcholov s najvyššou a najnižšou hodnotou. Z toho vyplýva, že v m-vrcholovom grafe vrchol s hodnotou m a vrchol s hodnotou 1 budú vždy vedľa seba. Ďalej sa už ale možnosti pre ohodnotenie vrcholov a hrán zväčšujú a situácia si vyžaduje častokrát viacero pokusov ohodnotiť daný graf. Poďme sa pokúsiť graciózne ohodnotiť graf na obrázku 3, ktorý je už graciózne ohodnotený na obrázku 6, no tento krát najvyššiu hodnotu 6 a najnižšiu hodnotu 1 dáme vedľa seba na iné miesta. Situácia je znázornená na obrázku 14:



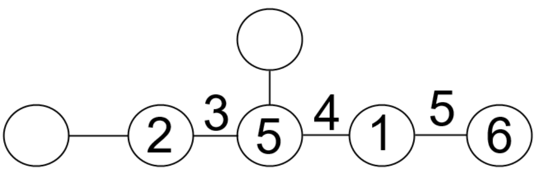
Obr. 14

V tejto chvíli musíme do grafu vhodne dosadiť ešte vrcholy s hodnotami $2, 3, 4, 5$ a hrany s hodnotami $1, 2, 3, 4$. Lenže možnosť, ako získať v grafe hranu s hodnotou 4, je opäť len jedna, a to tak, že vrchol s hodnotou 5 položíme hneď vedľa vrcholu s hodnotou 1. Opakujeme tak vyššie vysvetlenú úvahu. Situácia je znázornená na obrázku 15:



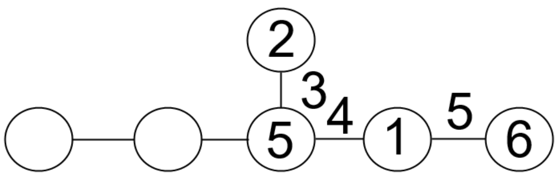
Obr. 15

V tejto chvíli musíme do grafu vhodne dosadiť ešte vrcholy s hodnotami $2, 3, 4$ a hrany s hodnotami $1, 2, 3$. Avšak oproti predchádzajúcej situácii máme teraz dve možnosti, ako získať hranu s hodnotou 3. Prvá možnosť je položiť vrchol s hodnotou 2 vedľa vrcholu s hodnotou 5 vľavo, druhou možnosťou je položiť vrchol s hodnotou 2 v grafe nad ním. Nie je jasné, ktorá možnosť je lepšia, môžeme sa preto intuitívne rozhodnúť pokračovať prvým spôsobom, teda skúsime položiť vrchol s hodnotou 2 vľavo od vrcholu s hodnotou 5. Situácia je znázornená na obrázku 16:



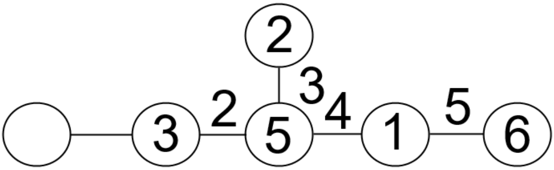
Obr. 16

V tejto chvíli musíme do grafu vhodne dosadiť ešte vrcholy s hodnotami 3,4 a hrany s hodnotami 1,2. Môžeme pokračovať v algoritme, ktorý sme doteraz použili, a pokúsime sa vytvoriť hranu s hodnotou 2, pričom opäť sa ponúkajú dve možnosti. Lenže ak by sme hranu s hodnotou 2 vytvorili tak, že by sme dosadili vrchol s hodnotou 4 vedľa vrcholu s hodnotou 2, ostala by nám hodnota 3 pre posledný vrchol a hodnota 1 pre poslednú hranu, ale to nie je vyhovujúce, keďže posledný voľný vrchol má hodnotu 5 a $5-3 \neq 1$. Druhou možnosťou je dosadiť hranu s hodnotou 1 nad vrcholom s hodnotou 5. V takomto prípade by sme taktiež získali vrchol s hodnotou 4, no ostali by nám hodnoty 3 pre vrchol a 2 pre hranu. Keďže jediný voľný vrchol je vrchol s hodnotou 2, opäť sme sa dostali spor, pretože $2 + 2 \neq 3$. V tejto chvíli sme sa dostali do situácie, kedy sme zistili, že predchádzajúci krok bol chybný, preto urobíme krok späť v algoritme a dostaneme sa do situácie, ktorá je znázornená na obrázku 15. V tomto momente sa rozhodneme pre druhú možnosť, ako sme sa rozhodli v minulom kroku, a hranu s hodnotou 3 a vrchol s hodnotou 2 dosadíme nad vrcholom s hodnotou 5. Situácia je znázornená na obrázku 17:



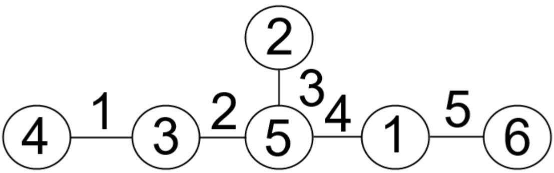
Obr. 17

Podobne ako v predchádzajúcom kroku, aj teraz musíme do grafu vhodne dosadiť ešte vrcholy s hodnotami 3,4 a hrany s hodnotami 1, 2. Nie je ťažké všimnúť si, že ak by sme vytvorili hranu s hodnotou 1 hneď vedľa vrcholu s hodnotou 5, ostala by nám hodnota 3 pre vrchol a hodnota 2 pre hranu. To by ale opäť viedlo k sporu, keďže posledný voľný vrchol má hodnotu 4 a $4 - 2 \neq 3$. Jediný spôsob, ako pokračovať, je položiť vedľa vrcholu s hodnotou 5 hranu s hodnotou 2, čím získame vedľa vrcholu s hodnotou 5 vrchol s hodnotou 3. Situácia je znázornená na obrázku 18:



Obr. 18

V tejto chvíli musíme do grafu vhodne dosadiť už len posledný vrchol s hodnotou 4 a poslednú hranu s hodnotou 1. Je však hneď vidieť, že práve to sú hodnoty, ktoré nám chýbajú do úplného gracióznego ohodnotenia grafu. Po dosadení dostávame graciózne ohodnotený graf na obrázku 19:



Obr. 19

V postupe algoritmu, ktorý sme práve opísali, sme boli nútení vrátiť sa o krok späť len jeden krát, avšak nie je možné odhadnúť, koľko krát bude potrebné vrátiť sa pri iných grafoch, najmä pri viac vrcholových grafoch v situáciách, kedy v nejakom kroku nie je možné jednoznačne rozhodnúť, ktoré ohodnotenie je potrebné zvoliť, je však možné predpokladať vyšší počet spätných krokov. Ako sme si mohli všimnúť, získali sme rozdielne graciózne ohodnotenie ako na obrázku 6, aj keď ide o rovnaký graf. Túto skutočnosť je dobré uvedomiť si aj na hodinách, pretože sa môžu v triede vyskytnúť viaceré správne graciózne ohodnotenia toho istého grafu.

Literatura

[1] Cabaniss, S., Low, R., & Mitchem, J. (1992). On edge-graceful regular graphs and trees. *Winnipeg: Ars Combinatoria, 34*, 129–142.

[2] Huang, C., Kotzig, A. & Rosa, A. (1982). Further results on tree labelings, Antigonish. *Utilitas Mathematica*, 21C, 31–48.

[3] Ivaška, M. (2008). *Vrcholové ohodnotenia jednoduchých grafov* [Dizertačná práca]. Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici.

[4] Rosa, A. (1967a). On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Internat. Symposium)* (p. 349–355). Rome.

[5] Rosa, A. (1967b). Cyclic steiner triple systems and labelings of triangular cacti. *Scientia, 1*, 87–95.

[6] Znám, Š. (1982). *Kombinatorika a teória grafov.* Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského.

Abstract

The topic of graceful labeling of a graph is now completely unknown in schools, which is a great pity, as it is undoubtedly an area of graph theory that has a great potential to help pupils develop mathematical thinking. In solving the tasks of graceful labeling of a graph, pupils are encouraged to think and strategically seek appropriate solutions to the problem. This is a part of mathematics that can serve very well as a supplementary material in mathematics lessons to revive the lessons and attract pupils with something new.

Milan Lekár
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Bratislava
Mlynská dolina
842 48 Bratislava