Učitel matematiky

Naďa Vondrová

Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 2, 66–93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148634

PŘÍČINY POUŽÍVÁNÍ POVRCHOVÝCH STRATEGIÍ ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH A JAK JIM PŘEDCHÁZET

Naďa Vondrová[1]

Slovní úlohy patří mezi tradiční učivo matematiky. Tvoří jakýsi most mezi světem matematiky a světem mimo školu. Schopnost žáků řešit slovní úlohy je pro ně výhodná nejen ve škole, ale i při řešení problémů z každodenního života. V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání[2] se slovní spojení „slovní úlohy" vyskytuje pouze v souvislosti s nestandardními aplikačními úlohami a problémy: „(Žák) řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky." Ovšem mezi cíli vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace nalezneme požadavek na „používání matematiky v reálných situacích", „praktickém životě", či dokonce schopnost „matematizovat reálnou situaci". Vhodným prostředkem k naplnění těchto cílů mohou být právě slovní úlohy.

Žáci jsou v řešení slovních úloh často neúspěšní, a to z různých důvodů. Přirozeně tomu tak může být proto, že nezvládají matematizaci slovní úlohy – nedovedou vytvořit matematický model situace. V tomto článku však upozorníme na jinou možnou příčinu, a sice na použití povrchových strategií řešení. Jde o případy, kdy se žáci nepokusí o představu situace (o situační model slovní úlohy) a snaží se matematický model slovní úlohy vyvodit z různých povrchových aspektů zadání slovní úlohy.

---

[1] Článek byl zpracován za finanční podpory projektu GA ČR 16-06134S *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům.*

[2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, verze platná od 1. 9. 2013; s. 26 a 29.

1. Slovní úlohy a proces jejich řešení

Za slovní úlohu zde budeme považovat úlohu, která je zasazena do kontextu (Divíšek et al., 1989; Kuřina, 1989), tedy ne každou úlohu, která je formulována slovně (např. Vyšín, 1962). Proces jejího řešení je v odborné literatuře rozdělován do různého počtu kroků. Zde se přidržíme Reussera (1985), který dělí řešení slovní úlohy do pěti fází.

1. Zpracování textového zadání do sémantického modelu (porozumění textu ve smyslu překladu obtížných slov, zjednodušení gramaticky složitých vět, převyprávění úlohy vlastními slovy).

2. Vytvoření *situačního modelu*, který stanovuje problém, o co v zadání jde, k čemu má řešení směřovat. Součástí této fáze je zaznamenání klíčových aspektů situačního modelu prostřednictvím tzv. zápisu nebo legendy (Novotná, 2000).

3. Konstrukce *matematického modelu* na základě procesu abstrahování situačního modelu. Matematický model může být nejen numerický (např. výpočet) a algebraický (např. rovnice), ale také nenumerický (např. schéma). Proces, kterým ze situačního modelu vzniká matematický model, bývá nazýván matematizací (např. Odvárko et al., 1990).

4. Provedení výpočtu, vyřešení rovnice apod., včetně případné numerické zkoušky.

5. Provedení sémantické zkoušky a vytvoření odpovědi, v níž je výsledek interpretován v kontextu situace úlohy i reálného světa.

Vlastní proces řešení nebývá přímočarý, může se skládat ze slepých uliček, z nichž se žák opakovaně vrací do jednotlivých fází (např. znovu uchopuje zadání). Ke kolapsu řešení může dojít v kterékoli z nich. Může se také stát, že se žák nejdříve o situační model pokusí, ale není úspěšný, a proto se uchýlí k povrchové strategii. Závažnější jsou případy, kterých jsme byli svědky při rozhovorech s žáky (Vondrová et al., 2019), kdy se žáci k povrchovým strategiím uchylovali jako k první volbě, vůbec se tedy nepokusili o situační model a přecházeli přímo k modelu matematickému. Na možné příčiny těchto povrchových strategií řešení se nyní zaměříme.

2. Možné příčiny povrchových strategií

Jen z písemných řešení žáků je zpravidla obtížné zjistit, co je vedlo k povrchové strategii. Příkladem je dívka ze 3. ročníku, která řešila následující úlohu:[3]

Princezna. Princeznu Zuběnu přilétli požádat o ruku dva draci. Drak Strašlivák měl 3 hlavy a na každé z nich měl 5 očí a tlamu s 8 zuby. Drak Zákeřňák měl 2 hlavy a na každé z nich měl 7 očí a tlamu s 16 zuby. Kolik dračích očí se na princeznu koukalo?

(29 očí)

Její řešení, které je na obrázku 1, neodpovídá smyslu zadání, ale je možné, že za ním stála nějaká racionální úvaha. V každém případě v jejím řešení kromě zápisu nevidíme snahu situaci porozumět (např. pomocí obrázku).

Obr. 1: Řešení úlohy Princezna podle žákyně 3. ročníku

V dalším textu pomineme situace, kdy se žák ani nesnaží úlohu řešit, a soustředíme se na případy, kdy se žák o řešení pokusí, ale jeho řešení není založeno na porozumění situaci popsané v zadání, ale spíše na povrchové struktuře úlohy. Příčiny některých takových řešení nám pomohly osvětlit rozhovory nad řešením úloh, které byly s žáky provedeny převážně v rámci projektu GAČR *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům.*

[3] Úloha pochází z učebnice pro 3. ročník *Matýskova matematika* (nakl. Nová škola, s.r.o.), kde je uvedena s jinými čísly.

Při rozhovorech jsme byli svědky povrchových strategií takříkajíc z první ruky. Někteří žáci četli zadání jen tak dlouho, než narazili na první číselné údaje a nějaké klíčové slovo, které by jim naznačilo, jakou operaci mají použít. Výsledky testů, které jsme v rámci zmíněného projektu zadali, nám v některých případech umožňují odhadnout i podíl žáků, kteří se ilustrovaných povrchových strategií dopustili. Testy byly zadávány velkým vzorkům žáků na šesti pražských školách a žáci nebyli do výzkumu nijak vybíráni; účastnily se celé třídy. Níže uvedené úlohy řešili žáci různých ročníků, kteří byli rozděleni do výkonnostně vyrovnaných skupin. Každý žák řešil jen jednu z variant. Sběr dat a zejména způsob jejich vyhodnocení je podrobně popsán v knize (Vondrová et al., 2019), z níž pocházejí takřka všechny úlohy, které jsou v článku uvedeny jako ilustrativní. Každou z variant řešila jiná skupina žáků.

2.1. Návodná čísla

Nejdříve se podíváme, jak může tvorbu povrchové strategie ovlivnit volba čísel do zadání slovní úlohy. Následující úlohu jsme zadali žákům 6. až 9. ročníku:

Autíčka, varianta A. Na rovné dráze jede jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Jedou stejně rychle, ale červené autíčko vyjelo dříve. V okamžiku, kdy mělo modré autíčko ujeto 150 cm, červené autíčko mělo ujeto 300 cm. Autíčka se zastavila ve stejném okamžiku. Jestliže modré autíčko ujelo celkem 600 cm, kolik centimetrů ujelo červené autíčko? (750 cm)

Inspiraci pro tuto úlohu jsme získali ze studie (Fernández et al., 2012). Jedná se o tzv. aditivní úlohu, která se řeší aditivní operací (výpočtem $600 + 150$). Svou povrchovou strukturou však připomíná úlohu proporční, která se řeší pomocí přímé úměrnosti. Stejnou úlohu jsme zadali i s jinými čísly:

Autíčka, varianta B. Na rovné dráze jede jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Jedou stejně rychle, ale červené autíčko vyjelo dříve. V okamžiku, kdy mělo modré autíčko ujeto 80 cm, červené autíčko mělo ujeto 120 cm. Autíčka se zastavila ve stejném okamžiku. Jestliže modré autíčko ujelo celkem 200 cm, kolik centimetrů ujelo červené autíčko? (240 cm)

Podle očekávání se ukázalo, že se mnozí žáci nechali zmást povrchovou strukturou úlohy a řešili ji jako úlohu „na přímou úměrnost“ (což jsme nazvali proporční strategií), ale také, že se tak mnohem častěji dělo u varianty A než u varianty B. Na použití proporční strategie tedy měla vliv použitá čísla. Čísla (150, 300, 600) jsou totiž svázána vztahy ($150 \cdot 2 = 300$, $300 \cdot 2 = 600$, $150 \cdot 4 = 600$), které lehce navodí představu rovnosti poměrů $300 : 150 = x : 600$, a žáci tak došli k výsledku 1 200 cm. Obecně byly v našem testování aditivní úlohy s celočíselným poměrem (zde 300 : 150) pro žáky obtížnější než aditivní úlohy s neceločíselným poměrem (zde 120 : 80). Dělo se tak i u žáků, kteří jinak dosahovali v našich testech dobrých výsledků (tedy u žáků s vyšší latentní schopností), ve hře tedy bylo i jejich implicitní očekávání týkající se zadané slovní úlohy (viz oddíl 2.4). Dodejme, že pro trojici čísel, která jsou svázána podobnými vztahy a s nimiž má žák dostatek zkušeností, používá M. Rendl (1997) termín *triáda s dobrým tvarem*. Např. obsahuje-li slovní úloha čísla 3 a 15, může to žáky vést k použití operace dělení, protože žáci mají zautomatizováno, že $3 \cdot 5 = 15$.

Další ilustrace se týká následující úlohy:

Plachetnice. Firma provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři. Na každé plachetnici se plaví 40 turistů, o které se musí starat 30 členů posádky. Minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo? (450 členů)

Poměrně velké procento žáků 6. ročníku (cca 8 %; Vondrová et al., 2019: s. 104) začalo úlohu řešit výpočtem $600 : 30 = 20$. Rozhovory ukázaly, že přinejmenším někteří tak učinili ne proto, že by chtěli dělit počet turistů počtem členů posádky, ale proto, že číslo 30 dělí číslo 600 (o situační model úlohy se tito žáci vlastně nepokusili). Jeden žák při rozhovoru řekl, že zvolil dělení proto, aby zjistil, zda mu „vyjde něco logického“. Výsledek 20 mu logický nepřipadal, protože to bylo malé číslo. Návodnost čísel tedy tohoto žáka vedla k operaci dělení, ale tuto povrchovou strategii následně korigoval částečným situačním modelem.

I u další úlohy, kterou jsme vytvořili úpravou úlohy z testování CERMAT v 9. ročnících z roku 2006, se projevila návodnost čísel:

Krmivo. Zásoba krmiva dovezená na ranč vydrží čtyřem poníkům 6 dnů. Počet dnů, během nichž se zásoba krmiva spotřebuje, je nepřímo úměrný počtu poníků žijících na ranči. Na jak dlouho by vydržela stejná zásoba krmiva dvanácti poníkům? Kolika poníkům by zásoba krmiva vystačila na 4 dny? (2 dny, 6 poníků)

Žákyně 9. ročníku okamžitě po přečtení úlohy provedla výpočet 12 : 6 s komentářem, že dělí 12 těmi 6 dny. Vyšel jí sice správný výsledek, ale nesprávným postupem. K dělení ji inspirovala dvojice čísel 12 a 6, protože, slovy Rendla (1997), (2, 6, 12) tvoří triádu s dobrým tvarem.

Rezervace. V rezervaci jsou ohrožené druhy opic chovány na několika oplocených pozemcích. Na každém pozemku je 6 stromů a obývá ho 18 opic. V rezervaci žije celkem 540 opic. Kolik je tam stromů? (180 stromů)

Téměř 14 % žáků 5. ročníku v našem výzkumu řešilo úlohu výpočtem 540 : 6 = 90, tedy celkový počet opic dělili počtem stromů na jednom pozemku (Vondrová et al., 2019: s. 109). Tento význam však výpočtu nedávali, je pravděpodobnější, že roli hrála návodnost čísel; 540 je zjevně dělitelné šesti.

Poslední ilustrace návodnosti čísel pochází z řešení následující úlohy s nadbytečným numerickým údajem:

Plechovky. V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. V pondělí jich vyrobili o 319 méně než ve čtvrtek. Celková cena vyrobených plechovek byla 12 500 EUR. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů? (5 101 plechovek)

Jeden z žáků 7. ročníku po chvilce uvažování navrhl výpočet $12\,500 + 14\,685$ a jako důvod uvedl, že pak vyjde číslo 25 000 ze zadání. Když ho tazatel ještě upozornil na přítomnost dalšího čísla, které nepoužil (319), žák navrhl, že by ho ještě přičetl. Zde je návodnost čísel skutečně skrytá, tvůrce úlohy tato možnost nenapadla.

Výše řečené ukazuje, jak je důležité zvažovat výběr čísel do zadání slovní úlohy. Problémem jsou zejména úlohy, kde návodnost čísel ke správnému výsledku vede. Nám se to stalo u úlohy Tábor (i úlohy Kružítko, viz oddíl 2.2).

Tábor. Na letní tábor se zaměřením na sportovní aktivity a angličtinu se přihlásilo 36 dětí. Pokojů je třeba objednat 4krát méně, než je přihlášeno dětí. Kolik je třeba objednat pokojů?

(9 pokojů)

Při řešení úlohy mohli být úspěšní i žáci používající povrchovou strategii. Mají dostatek zkušeností s tím, že číslo 36 je dělitelné čtyřmi, a navíc jsou zde přítomna klíčová slova „krát méně“, která naznačují dělení. Pokud se žáci s takovými úlohami setkávají často, mohou si svou tendenci k povrchovým strategiím upevnit, protože se jim opakovaně osvědčují.

2.2. Klíčová slova, signály

Velmi častým typem povrchové strategie řešení slovních úloh je *strategie signálních slov* (Hejný, 2014: s. 117), kdy žák ze zadání slovní úlohy vybere čísla a snaží se na základě klíčových slov (která pro něj pak fungují jako signály) vyvodit matematický model. Příklad jsme uvedli už u úlohy Tábor. Podobně se to stalo u varianty B úlohy Autíčka z oddílu 2.1, kterou žákyně 6. ročníku řešila součtem $120 + 80$, protože „rychleji znamená přičíst“.

Vleky. V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů. Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek a ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový. Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku? (450 m)

Jedna z žákyň 5. ročníku při rozhovoru vysvětlila své řešení $600 - 400 = 200$ tím, že „v úloze jsou jen dvě čísla a starý je pomalejší, tak jsem odečetla ta dvě čísla“.

Kružítko. Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, mikrotužka je třikrát dražší než pravítko. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? (18krát)

Jeden z žáků 4. ročníku nejdříve provedl správný výpočet $6 \cdot 3 = 18$, ale pak se ukázalo, že mu neumí dát význam. Nejdříve formuloval odpověď jako „Kružítko je o . . . “, poté napsal 18 : 6 a nakonec napsal „Kružítko je o . . . kružítko je šestkrát dražší než pravítko“. Je zřejmé, že jeho strategie řešení byla povrchová, vzal dvě čísla a svázal je násobením zřejmě kvůli slovu „dražší“.

Žák 7. ročníku řešil výše uvedenou úlohu **Plechovky** tak, že nejdříve vydělil číslo 14 685 číslem 319. Když se tazatel zeptal, k čemu dospěl, žák se nejistě zeptal, zda neměl raději použít odečítání. Ukázal přitom na slovo „méně“. Pak navrhl ještě násobení a posléze sčítání a pokaždé se pátravě díval na tazatele, kterou operaci schválí. Žák se v žádném kroku svého řešení nepokusil získat do situace vhled (např. výpisem hodnot, které známe, tabulkou nebo nákresem, přeformulováním úlohy svými slovy), ignoroval text a soustředil se jen na čísla, s nimiž se snažil provádět výpočty.

Strategie signálních slov může být v jednoduchých úlohách úspěšná (viz úloha Tábor či Kružítko výše). Specifickým příkladem diagnostických úloh, které prokáží, zda si žák tvoří situační model takové jednoduché úlohy, nebo ne, jsou *úlohy s antisignálem* (Hejný, 2014: s. 51), tedy úlohy, v nichž signální slovo či slova navádějí na operaci opačnou, než je ta, která vede ke správnému řešení. I výše uvedené úlohy můžeme přeformulovat na úlohy s antisignálem:

Tábor, varianta s antisignálem. Na letní tábor se zaměřením na sportovní aktivity a angličtinu se přihlásilo 36 dětí. Dětí je přihlášeno 4krát více, než je potřeba objednat pokojů. Kolik je třeba objednat pokojů? (9 pokojů)

Podle očekávání byla tato varianta pro žáky 3. ročníku statisticky významně obtížnější než výše uvedená varianta se signálem (Vondrová et al., 2019: s. 225). Žáci dosáhli průměrné úspěšnosti řešení 73 % u původní varianty a jen 44 % u varianty s antisignálem. Největší procento chybných řešení představovalo použití násobení (kvůli slovu „více“) místo dělení.

Kružítko, varianta s antisignálem. Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, pravítko je třikrát levnější než mikrotužka. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? (18krát)

Slovní úloha Kružítko je ještě komplikována faktem, že se jedná o tzv. *operátorovou úlohu* (Hejný, 2014: s. 173). Všechna čísla jsou v ní v roli operátoru (v tomto případě multiplikativního operátoru) a žádné číslo v roli stavu (ten by představovala např. cena mikrotužky). Pro žáky byla tato úloha velmi obtížná i ve variantě se signálem.

Úlohám s antisignálem jsme v naší knize (Vondrová et al., 2019) věnovali celou kapitolu. Pro žáky se jednoznačně prokázaly jako obtížnější než původní varianty úloh, přičemž ve více než polovině případů se jednalo o statisticky významný rozdíl. Žáci se podle očekávání nejvíce dopouštěli záměny správné operace za operaci inverzní. Nesplnilo se naše očekávání, že vliv antisignálu bude s věkem slábnout, protože žáci získávají zkušenosti s řešením složitějších úloh. To ukazuje na sílu strategie signálu, která je upevňována i tím, že v úlohách používaných na 1. stupni často vede ke správnému výsledku.

2.3. Porovnání s prototypickou úlohou

Další typ povrchové strategie spočívá ve snaze žáků zařadit řešenou slovní úlohu do nějakého typu, vybavit si nějakou *prototypickou úlohu* (Martin & Bassok, 2005), pro niž mají schéma řešení. Náchylné na tento způsob řešení jsou tedy zejména úlohy podobné úlohám, pro něž se ve škole vyučují standardní algoritmy (např. úlohy o pohybu, úlohy vyžadující úměrnosti).

Příklad jsme viděli již výše u úlohy Autíčka, kde u aditivní varianty úlohy žáci použili řešení založené na přímé úměrnosti. Testování schopnosti žáků odlišit aditivní úlohy od proporčních jsme prováděli na více úlohách a věnovali jsme mu celou kapitolu (Vondrová et al., 2019). Ukázalo se, že nejvíce záměn aditivních úloh za proporční se děje v 7. ročníku, kdy se testovaní žáci seznamují s úměrnostmi. Předložené aditivní úlohy se tito žáci snaží automaticky řešit s předpokladem, že půjde o přímou úměrnost. Učitelé jistě znají ze své praxe případy, kdy žák řeší pomocí trojčlenky i úlohy, které nepopisují situace přímé ani nepřímé úměrnosti.

V našem výzkumu jsme použili i „falešnou“ úlohu o pohybu:

Spotřeba, varianta A. Z místa A vyrazil nákladní automobil rychlostí 60 km/h. Ve stejnou dobu vyrazila proti němu z místa B dodávka s dělníky rychlostí 85 km/h. Vzdálenost mezi oběma místy je 120 km. Kolik nafty spotřebují obě vozidla dohromady za hodinu cesty, když průměrná spotřeba nákladního automobilu je 20 litrů nafty na 100 km a průměrná spotřeba dodávky s dělníky 10 litrů nafty na 100 km? (20,5 l)

Tato varianta obsahuje jazykové indikátory typické pro úlohy o pohybu („objekty se pohybují ze stejného místa ve stejném směru, nebo z různých míst proti sobě“). Druhá varianta tyto indikátory neobsahuje (obě varianty obsahují větu s nadbytečným numerickým údajem).

Spotřeba, varianta B. Průměrná spotřeba nákladního automobilu je 20 litrů nafty na 100 km. Dělníci cestují v dodávce, jejíž průměrná spotřeba je 10 litrů nafty na 100 km. Cena nafty je 30 Kč za litr. Kolik nafty spotřebují obě vozidla dohromady za hodinu cesty, když průměrná rychlost nákladního automobilu je 60 km/h a průměrná rychlost dodávky s dělníky 85 km/h? (20,5 l)

Výsledky odpovídaly našim předpokladům. Mezi variantami se ukázaly věcné rozdíly v úspěšnosti žáků (varianta A 45 % vs. varianta B 57 %; Vondrová et al., 2019: s. 176). Osm ze 47 žáků, kteří řešili variantu A, postupovalo v souladu s postupy běžně používanými pro úlohy o pohybu. Náčrtek typický pro tyto úlohy zakreslila necelá polovina žáků. Někteří se snažili využít vzorec

$v = s/t$, který se při řešení slovních úloh o pohybu používá, ale pro tuto úlohu není relevantní. Výsledky dokládají, že se chybující žáci orientovali na základě povrchových rysů úlohy a nevytvořili si kvalitní situační model.

Závěrem uvedeme ještě další typ povrchové strategie spočívající v hledání prototypické situace pro řešenou slovní úlohu. Pro výše uvedenou úlohu Plachetnice asi 7 % námi testovaných žáků 2. stupně uvedlo výsledek 600 (Vondrová et al., 2019: s. 104). Při rozhovoru s jedním žákem 6. ročníku jsme zjistili pravděpodobnou příčinu. Vysvětlil totiž: „No, protože když je jich 40, tak se stará 30, takže když jich bude 600, tak se bude starat 500.“ Toto řešení je založeno na povrchové podobnosti úlohy s úměrností a je projevem jevu, který je v zahraniční literatuře pojmenován *iluze linearity* (De Bock et al., 2007). Zadání úlohy v žákovi vyvolalo známé schéma, a sice předpoklad lineárního vztahu mezi čísly („když číslu 40 je příslušné číslo 30, tedy o 10 méně, pak číslu 600 bude příslušné číslo 500, což je analogicky o 100 méně“). I téměř 8 % žákovských řešení, která obsahují výpočet $600 - 10 = 590$, je zřejmě projevem iluze linearity. Žáci ho zdůvodňovali tím, že i rozdíl mezi 40 a 30 je 10.

2.4. Didaktické příčiny

Rozhovory poukázaly i na možné didaktické příčiny použití výše uvedených povrchových strategií. Někdy se tazatel žáků při rozhovoru ptal i na to, jakým způsobem slovní úlohy žáci obvykle řeší a jak to dělají v hodinách matematiky. Žáci se vesměs vyjadřovali v tom smyslu, že jako první krok se **musí** udělat zápis. Jejich slova nijak nenaznačovala, že jsou si vědomi nutnosti udělat si představu o situaci (např. neuváděli, že by si měli situaci představit, nakreslit, nějak zaznamenat, modelovat či převyprávět vlastními slovy). Naopak, občas explicitně zmiňovali, že vyhledávají slova naznačující operaci (klíčová slova). Při rozhovorech se stávalo, že žáci úlohu ani nedočetli do konce, průběžně si vypisovali známé informace (zejména čísla) a při prvním výskytu signálního slova se snažili navrhnout výpočet. Občas byla patrná i obava, zda dělají zápis „správně“, jako by existoval nějaký algoritmus, jak vytvořit správný zápis slovní úlohy. Tento návyk „jako první musím udělat zápis“ může být kontraproduktivní i v tom, že žáci očima přebíhají od zadání slovní úlohy k zápisu, místo aby si nejdříve přečetli celé zadání a soustředili se na význam celé úlohy.

Tendenci vést žáky ke strategii signálních slov potvrzují i výsledky, k nimž jsme dospěli na základě dotazníku. Podle něj 90 % dotazovaných učitelů 1. stupně ($N = 645$) vede své žáky k vyhledávání slov, která signalizují početní operaci (Vondrová et al., 2015: s. 72), a 77 % dotazovaných učitelů 2. stupně ($N = 244$) souhlasilo s tím, že při výuce slovních úloh žákům doporučují, aby v úloze vyhledali slova odkazující k určité početní operaci. Tento přístup může být úspěšný v počátcích, kdy se žáci začínají učit, co to znamená řešit slovní úlohu, jak vyhledávat v textu informace a odhalovat matematickou strukturu úlohy. Je však třeba mít na paměti, že strategie signálních slov představuje určité riziko, neboť svádí k rutině a odvádí pozornost řešitele od kontextu a skutečného významu textu.

Další svou podstatou didaktická příčina povrchových strategií řešení spočívá ve faktu, že v učebnicích zejména pro 1. stupeň vesměs převažují typické úlohy, u nichž tyto strategie vedou ke správnému výsledku. Užitečnost povrchových strategií je tak opakovaně potvrzována.

Během své školní výuky může žák získat i další potenciálně nebezpečná přesvědčení a implicitní očekávání, která výzkum u žáků různého věku identifikoval (např. Greer, Verschaffel & De Corte, 2003) a s nimiž se mnozí učitelé setkávají v praxi: každá slovní úloha má řešení, a to je jediné a jednoznačné, výsledek se získá pomocí jedné nebo více matematických operací s čísly ze zadání, slovní úloha je řešitelná známými matematickými procedurami a musí se pro ni využít všechna zadaná čísla, v zadání jsou všechny nutné údaje a žádný navíc, operaci napoví klíčová slova. Pro získané přesvědčení, že při řešení je nutno ignorovat případné nekonzistence s intuicí či každodenní zkušeností, se v odborné literatuře vžil výstižný termín „word problem game“ (De Corte & Verschaffel, 1985). Vysvětluje do jisté míry fakt, že žáci často odpoví na otázku slovní úlohy nesmyslně, v nesouladu s každodenní zkušeností a „selským rozumem". Nemusí jít o to, že si žáci nesmyslnost své odpovědi vůbec neuvědomují. Naopak, mohou si jí být vědomi, ale jejich přesvědčení a očekávání jim umožňují tento fakt ignorovat, protože podle nich je v matematice normální, že něco nedává smysl. M. Hejný (2014: s. 65) popisuje jiné získané přesvědčení žáků, a sice, že jediná přípustná cesta, jak řešit slovní úlohy, vede přes jazyk písmen (zpravidla neznámou x).

2.5. Psychologické příčiny

Používání povrchových strategií může mít rozmanité psychologické příčiny příslušné konkrétnímu žákovi. Významnou příčinou je i naučená bezmocnost, resp. nízká důvěra žáka ve vlastní schopnost řešit slovní úlohu. Žák může být přesvědčen, že úlohu tak jako tak nevyřeší, proto se o tvorbu situačního modelu vůbec nepokusí. Další možný důvod uvádějí Havlíčková, Hříbková a Páchová (2015: s. 128–131). Tvorba situačního modelu je relativně obtížná a kognitivně náročná činnost a použití povrchových strategií může být z tohoto pohledu vnímáno jako snaha předejít kognitivnímu přetížení, k němuž dochází, pokud je zahlcena pracovní paměť. Povrchové strategie řešení tak vlastně kapacitu pracovní paměti šetří. Podobný argument používají Rendl a Páchová (2013) pro vysvětlení toho, proč žáci dostatečně nereflektují reálnost výsledku u slovní úlohy (neprovedou sémantickou zkoušku; důvodem může být i výše zmíněná „word problem game").

> Druhá okolnost „absence selského rozumu" spočívá v tom, že porovnání kontextu úlohy s realitou znamená zahrnutí dalšího kontextu navíc, a tedy nárok na pracovní paměť. Je-li však vyčerpána, nebo dokonce zahlcena složitostí počítané úlohy, není implicitní zahrnutí dalšího kontextu možné. (Rendl & Páchová, 2013: s. 155)

Výše řečené se do jisté míry ukázalo i při našich rozhovorech. Mnozí žáci v prvním pokusu o řešení použili povrchovou strategii a snažili se úlohu vyřešit za pomoci malého kognitivního úsilí. Teprve když tato strategie selhala, vrátili se k úloze a snažili se vytvořit situační model. Pokud tak sami neučinili a tazatel je vyzval, aby si úlohu znovu přečetli, případně je upozornil na nějakou část zadání, mnozí byli nakonec v řešení úspěšní. Žáci tedy často matematické znalosti potřebné pro řešení slovní úlohy mají, ale rezignují na tvorbu situačního modelu. Příčinou je jejich naučené řešitelské chování, metakognitivní nastavení.

Situace je ovšem z psychologického hlediska ještě komplikovanější. Někdy hrají roli i preference žáka, které nesouvisí s řešenou úlohou, ale spíše s jeho osobnostním nastavením. V knize (Vondrová et al., 2019) uvádíme příklad žákyně, která řešila všechny předložené úlohy bez ohledu na jejich strukturu sčítáním a jako vysvětlení uvedla, že je to tak jednodušší. Nebo příklad žáka, který řekl, že sčítal, protože to někdy tipuje a někdy to ví „tak půl napůl“.

3. Didaktická doporučení

Tendenci k povrchovému řešení slovní úlohy si žáci osvojují již na 1. stupni základní školy, proto je důležitá prevence. Z výše řečeného je zřejmé, že u hojně využívané strategie signálních slov převažují spíše rizika. Může být nicméně užitečná v počátcích výuky.

> Je přirozené, že na počátku výuky operací s přirozenými čísly se žáci učí, jak všelijak se dá vyjádřit sčítání a odčítání („dohromady, celkem, přidat, dostat, ztratit, odejít, dát pryč“), a to s porozuměním, na jim známých situacích, pomocí modelování, přehrávání scének atd. Jestliže však po upevnění této prvotní logiky operací sčítání a odčítání není žák již v prvním vzdělávacím období veden dále, takříkajíc od logiky klíčového slova k logice textu jako celku, zůstává zřejmě do jisté míry promarněna příležitost učit žáky, aby přemýšleli o textu úlohy jako celku a nabývali konceptuálního vhledu do toho, proč danou operaci provádějí. (Vondrová et al., 2015: s. 404)

Strategie signálních slov tedy působí problémy později, kdy už se žáci naučí na ni spoléhat, ale ona sama přestává vést ke správným výsledkům. Žáci by měli být důsledně vedeni k tvorbě situačního modelu, a to i jednoduchých úloh. Uvedeme některá doporučení, která k této tvorbě mohou vést.

3.1. Volba úloh

Pokud povrchové strategie vedou ke správnému řešení úlohy, žák necítí potřebu si situační model úlohy tvořit. Proto se jako vhodné ukazují úlohy s nějakým komplikujícím faktorem, v nichž jsou povrchové strategie neúčinné. Jsou jimi výše zmíněné úlohy s antisignálem nebo úlohy s nadbytečným údajem či úlohy s narušeným pořadím informací v zadání. Příkladem je dvojice úloh, z nichž první je s vlastním pořadím informací (které odpovídá tomu, jak informace používáme ve výpočtu) a druhá s narušeným pořadím (Vondrová et al., 2019: s. 194–195):

Pasáček, varianta A. Když dnes ráno vyrážel pasáček do hor, měl stádo 20 ovcí. Dopoledne mu jich 8 uteklo, ale 6 se jich brzy vrátilo. Odpoledne se mu 4 ovce zaběhly, ale několik jich do večera našel. Večer měl pasáček 17 ovcí. Kolik ovcí pasáček odpoledne našel? (3 ovce)

Pasáček, varianta B. Dnes ráno vyrazil pasáček do hor se svým stádem ovcí. Dopoledne mu jich 8 uteklo, ale 6 se jich brzy vrátilo. Odpoledne se mu 4 ovce zaběhly, ale několik jich do večera našel. Večer měl pasáček 17 ovcí. Když ráno vyrážel do hor, měl 20 ovcí. Kolik ovcí pasáček odpoledne našel? (3 ovce)

Úspěšnost řešení žáků 4. ročníku byla ve variantě A 81 %, zatímco ve variantě B jen 48 %, což ilustruje, že narušené pořadí informací je komplikující faktor. Další vhodné úlohy s komplikujícím parametrem lze nalézt v příloze knihy (Vondrová et al., 2019).

Dále uvedeme jeden na první pohled paradoxní výsledek, k němuž jsme dospěli v souvislosti s použitím neznámého kontextu v zadání slovní úlohy (Vondrová et al., 2019: s. 323–324):

> Napříč parametry se ukazuje, že některý potenciálně komplikující parametr může paradoxně vést k menšímu použití povrchových strategií žáků a ke snaze o tvorbu situačního modelu (v čemž ovšem žák nemusí být úspěšný, není zde tedy přímá cesta k menší obtížnosti úlohy). To jsme pozorovali konkrétně u parametru *zkušenostní kontext* v souvislosti s parametrem, u něhož jsme prokázali vliv na obtížnost slovní

úlohy [nadbytečný numerický údaj, pořadí informací, návodnost dobrých triád]. Pokud varianta obsahovala neznámý kontext, žáci se u obtížnější varianty z hlediska druhého parametru (tedy např. u varianty s nadbytečným numerickým údajem) méně často uchylovali k povrchovým strategiím řešení, jako by u známého kontextu byli žáci na rozdíl od neznámého kontextu vedeni pocitem, že není třeba vynakládat velké úsilí. Došlo tedy u nich k automatické evokaci známého schématu, které kvůli komplikujícímu parametru nevede ke správnému řešení.

Výše řečené ukazuje, že úloha s nízkými kognitivními nároky, která inspiruje k povrchovým strategiím, může být potenciálně stejně nevhodná jako úloha s vysokými kognitivními nároky, která vede ke kognitivnímu přetížení.

Tvorbě situačního modelu může zabránit i automatické vyvolání nějaké procedury (např. trojčlenky). To je dobře vidět v době, kdy se probírají úlohy vyžadující úměrnosti, kdy mají žáci tendenci řešit všechny slovní úlohy pomocí tohoto postupu. Proto je třeba používat i úlohy, které neobsahují přímou nebo nepřímou úměrnost, nebo ji obsahují jen zdánlivě (tedy např. si k nim žáci mohou říct „čím víc, tím víc“, ale přitom neplatí „kolikrát víc, tolikrát víc“).

Závěrem tohoto oddílu uvedeme ještě úlohu, kterou vymyslela studentka učitelství v rámci své souvislé praxe a jejímž hlavním cílem bylo upozornit na nutnost sémantické zkoušky. Teprve ta ukáže, že úloha nemá řešení.

Výlet. V Hradci Králové uspořádali výlet do Prahy. Jedna třetina lidí chce jít na Pražský hrad, jedna čtvrtina chce navštívit Národní divadlo, zvířata v ZOO chce vidět jedna pětina a jedna dvacetina chce jít do Technického muzea. Zbývajících 7 lidí chce jít do Aquaparku. Kolik lidí se zúčastní výletu?

3.2. Diskuse o zadání slovní úlohy, dramatizace

Ke zlepšení porozumění jazyku slovních úloh může výrazně napomoci také vytvoření dobrých podmínek pro žákovské diskuse. Jejich vhodným podkladem jsou úlohy, které připouštějí více správných interpretací („Pavlínka s Tondou a Věrkou byli v létě s rodiči u moře. Jeli autobusem, ve kterém bylo 20 dospělých a 10 dětí. Kolik jelo celkem v autobuse lidí?“), nebo úlohy s nejednoznačnou otázkou („Čtyři preclíky a dvě limonády stojí 76 korun. Dva preclíky a pět limonád stojí 126 korun. Kolik stojí limonáda a preclík?“). Vhodné jsou i již zmíněné úlohy s nadbytečnými nebo naopak chybějícími údaji, které si žáci musí dohledat nebo domyslet, či dokonce tzv. kapitánské úlohy (tedy úlohy, které obsahují údaje, z nichž se nedá otázka zodpovědět). Klasickým příkladem je úloha, která byla v různých obměnách použita ve výzkumu a u níž bylo opakovaně zjištěno, že žáci použijí čísla ze zadání a nějakou odpověď poskytnou: „Na lodi je 26 ovcí a 10 koz. Jak starý je kapitán?“ Radatz (1983) dokonce ukázal, že četnost irelevantních řešení se se školní zkušeností žáků zvyšuje, což potvrzuje již zmíněný fenomén „word problem game“. Ten zahrnuje i přesvědčení, že každá úloha zadaná v matematice musí mít řešení (i když v reálném světě nedává smysl).

Úlohy, o jejichž zadání se dá diskutovat, a tím projasňovat jejich situační model, mohou být zařazovány již od 1. ročníku základní školy. Důležité je vytvořit v žácích návyk, že text úlohy je třeba vždy pečlivě číst a situaci je třeba si nějak představit nebo modelovat. Zmiňovaná strategie signálních slov může ve spojení s nácvikem řešení typových úloh způsobit přesný opak – žáci přestanou být vůči textu vnímaví a zaměří se pouze na vyhledávání signálních slov. Tvorbě situačního modelu můžeme napomoci i jednoduchým pokynem, aby si žáci text znovu přečetli, převyprávěli svými slovy či nějak zaznamenali.

3.3. Tvorba zápisu (legendy)

Z žákovských řešení v našem výzkumu je patrné, že žáci jsou v hodinách matematiky vedeni k zápisům zadání slovní úlohy, ovšem ne vždy je pro ně tento zápis funkční. Někdy je zápis zjevně jen formální a žáci ho dopisují až dodatečně, protože je po nich vyžadován, ne proto, že na jeho základě vyvozují situační a následně matematický model. Tvorba zápisu je jistě užitečná věc, neměl by však mít podobu jakéhosi algoritmu. Žáci by měli být vedeni, aby si zaznamenávali strukturu úlohy různými způsoby a vybrali si ten, který jim pro danou úlohu bude dávat smysl a budou ho schopni použít pro matematizaci úlohy. Rozhodně nelze doporučit postup, kdy žák postupně píše zápis, jak čte jednotlivé věty, aniž by si nejdříve udělal představu o celém zadání. Dokonce lze uvažovat i o tom, že zápis nemusí být neměnný.

> U složitějších úloh žák teprve hledá strukturu úlohy, jeho vhled může být jen částečný, může být chybný, může zcela absentovat. Z těchto důvodů také nelze požadovat, aby úvodní zápis byl definitivní. Logické je, že zápis může být v průběhu úlohy doplňován či měněn. Nelze se domnívat, že zápis musí zprostředkovat úplný vhled do úlohy. (Vondrová et al., 2015: s. 408)

Hotová forma, kterou žákům často nabízí učitelé či zprostředkovaně učebnice a která se nám zdá jasná a jednoduchá, je výsledkem složitého procesu hledání. Ten bychom žákům neměli odepřít, žáci by měli mít možnost projít si tímto procesem nalézání vhodné formy zápisu sami.

Žáci v našem výzkumu v naprosté většině tvořili slovní legendy i tam, kde by lepší vhled do situace poskytla legenda obrázková nebo tabulková. I diagram může vystihnout strukturu úlohy, proto by žáci měli být vedeni i k těmto podobám legendy. U mnoha slovních úloh si lze představit, že strukturu úlohy uchopíme modelováním (pomocí zástupných předmětů), či dokonce dramatizací situace pomocí krátké scénky (Hejný, 2014), případně simulovanou dramatizací. V každém případě nestačí, aby se žáci s jednotlivými legendami seznamovali nárazovitě a v pasivní podobě, tedy aby legendy tvořil zejména učitel. Žáci by měli dostat prostor, aby si postupně vytvářeli svůj způsob záznamu, i když jim přirozeně učitel svým příkladem vhodné způsoby nabízí (viz také níže oddíl 3.5). Aby se žák naučil např. s obrázkovou legendou pracovat (tvořit ji a rozumět jí, pokud ji vytvoří někdo jiný), musí se její tvorbě učit, aby v ní byl natolik zběhlý, že jí nebude muset věnovat přílišné množství mentální energie. Je třeba předejít kognitivnímu přetížení, kdy je žák natolik zaměstnán tvorbou grafické reprezentace, že mu už nezbývá energie na vlastní řešení úlohy.

3.4. Žákova aktivní participace na tvorbě matematického modelu

S tvorbou legendy souvisí také proces matematizace. Podobně jako je tomu se zápisem úlohy, i na matematizaci, která zahrnuje tvorbu matematického modelu v podobě výpočtu, rovnice, ale také náčrtku nebo jiného grafického záznamu úlohy (např. tabulky, diagramu), by se měli žáci aktivně podílet, aby rozuměli jejímu smyslu. Učitel by měl žáky k vizualizaci různých situací vyzývat a rovněž jim různé formy vizualizace představovat a nabízet. Rozhodně by neměli být za jiný postup nebo jinou formu řešení penalizováni. Velmi často se stává, že učitelé tuto klíčovou část řešení slovní úlohy provedou za žáky (viz mnohé příklady v knize Vondrová, 2019) a ti pak získají falešný pocit porozumění (protože jim v tu chvíli předložené řešení dává smysl, sami by ho však vytvořit nedovedli). Je třeba nechat žáky, aby se snažili ke správné matematizaci dospět, což vyžaduje dostatek času. Ten se však vrátí později ve schopnosti žáků slovní úlohy řešit.

S žákovou aktivní participací na tvorbě matematického modelu souvisí i snahy, zejména v zahraničí, posílit aplikační složku slovních úloh. Výsledky většiny intervenčních studií zaměřených na zlepšení schopnosti žáků řešit slovní úlohy prostřednictvím řešení reálných úloh, které zpracovali ve své metaanalýze L. Verschaffel et al. (2010), jsou s ohledem na úspěšnost žáků a jejich motivaci k učení povzbudivé. Základním předpokladem jejich úspěchu však bylo, že žáci dostali dostatek času a příležitostí, aby při řešení komplexních slovních úloh vynakládali kognitivní úsilí. Tím se konkrétně myslí, že žáci řeší realističtější a náročnější úlohy, než jsou běžně používané slovní úlohy (dobře zadané a s jednoznačným výsledkem). Musí formulovat, co je jejich úkolem, aplikovat své každodenní zkušenosti, vybrat si nástroje k řešení, diskutovat o různých možnostech řešení, rozhodnout se o úrovni přesnosti (co z reálné situace zanedbat a co použít), interpretovat a hodnotit získaný výsledek atp. Tedy přibližovat se spíše řešení reálných problémů než typových úloh.

Účinnou aktivitou pomáhající žákům odhalovat v textu matematickou strukturu může být opačný úkol, při němž nemají žáci slovní úlohy řešit, ale vytvářet (např. na základě zadaného číselného vztahu nebo celého výpočtu nebo zadaných čísel a slov, které by měli v úloze použít).

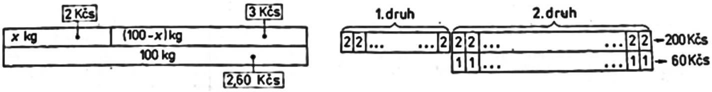
3.5. Vizuální reprezentace řešení slovní úlohy

V našem výzkumu jsme identifikovali pozitivní korelaci mezi latentní schopností žáků a frekvencí používání obrázku a vysokou úspěšnost žáků využívajících řešitelský obrázek (Vondrová et al., 2019: s. 155). Metastudie (Hembree, 1992) jasně ukázala, že pozitivní vliv na úspěšnost žáků i studentů od 1. ročníku základní školy až po vysokou školu v řešení slovních úloh má používání náčrtů a obrázků. Uvedeme příklad novější studie, která tento pozitivní vliv prokázala u žáků 3. ročníku základní školy (Csikos, Szitányi & Kelemen, 2012). V rámci intervence v délce dvaceti vyučovacích jednotek se učitelé v experimentálních třídách soustředili na různé typy vizuálních reprezentací slovních úloh. Vyzývali žáky, aby si u každé úlohy dělali náčrtek, a současně se snažili ovlivnit jejich přesvědčení o důležité roli vizualizace při řešení úloh. Důležitým předpokladem bylo, že se z kreslení náčrtů stala určitá rutina, a nezabíralo tedy velkou část kognitivní kapacity žáků.

V knize (Vondrová, 2019: s. 108–112) je ukázáno několik příkladů grafické reprezentace řešení slovních úloh. Uvedeme ukázky z českých knih. Na obrázku 2 jsou dvě varianty ikonického modelu pro následující úlohu (Kuřina, 1989: s. 63):

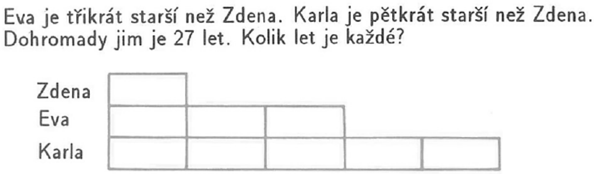
Směs. Ze dvou druhů krmiva má být vyrobeno celkem 100 kg směsi v ceně 2,60 Kč za kilogram. Míchá se krmivo v ceně 2 Kč za kilogram s krmivem v ceně 3 Kč za kilogram. Jaké je složení směsi?

Model vlevo vede k rovnici $2x + (100 - x) \cdot 3 = 2{,}6 \cdot 100$, zatímco model vpravo vede přímo k řešení (do směsi je nutno dát 60 kg krmiva druhého druhu).



Obr. 2: Dva ikonické modely jedné slovní úlohy (Kuřina, 1989: s. 63)

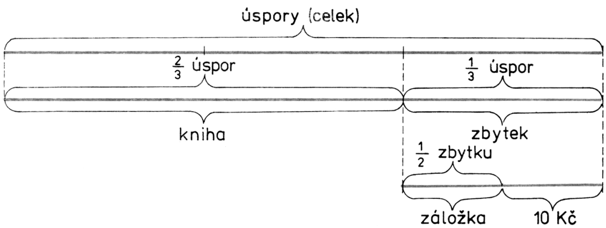
Na obrázku 3 je ilustrace modelu pro řešení slovní úlohy z experimentálních učebnic matematiky vydaných Matematickým ústavem AV ČR.



Obr. 3: Úloha z učebnice matematiky pro 4. ročník základní školy (Koman, Kuřina & Tichá, 1993: s. 22)

Poslední ilustrace pochází z učebnice matematiky pro primu, z řady pro osmiletá gymnázia z nakladatelství Prometheus, kde je tímto způsobem řešena úloha Dárek (obr. 4).

Dárek. Mirek se rozhodl koupit za uspořené peníze dárky k narozeninám pro svou sestru. Nejprve jí koupil knihu, za kterou zaplatil 2/3 svých úspor. Za polovinu zbytku pak koupil do knihy záložku a ještě mu zbylo 10 Kč na karafiát. Kolik korun měl Mirek na nákup dárků? (60 Kč)



Obr. 4: Vizuální model úlohy z učebnice matematiky pro primu osmiletých gymnázií (Herman et al., 1994: s. 18)

I v dalších řadách učebnic matematiky se občas vizuální model řešení slovní úlohy vyskytne. Žáci však zpravidla nejsou vyzýváni k systematickému využívání vizualizace. To je rozdíl oproti tzv. Singapurskému modelu, který je podrobněji popsán ve výše zmíněné knize (Vondrová, 2019). Tento model je běžnou součástí učebnic základní školy, žáci se s ním seznamují postupně už od 1. stupně a využívají ho při řešení stále obtížnějších slovních úloh. Žáci se pohybují mezi třemi reprezentacemi: textovou, obrázkovou a numerickou či algebraickou. Protože singapurští žáci dosahují v mezinárodních testováních výborných výsledků, je tomuto modelu věnována výzkumná pozornost i v zahraničí. Shrnutí poskytuje Kaur (2018), která dokládá, že Singapurský model pomáhá více při řešení aritmetických slovních úloh než algebraických (tedy řešitelných rovnicemi) a že žákům usnadňuje vizualizaci vztahů u slovních úloh se zlomky a u jednokrokových úloh s multiplikativním operátorem. Přínos se ukazuje i u žáků s potížemi v matematice. Ani použití modelu stoprocentní úspěšnost řešení žáků nezajistí, i tak se mnozí žáci dopouštějí chyb v matematizaci. Žáci však v jeho podobě dostávají další možnost, jak k řešení slovních úloh přistupovat. Byly provedeny i výzkumné studie mimo Singapur, které ukázaly, že žáci jsou schopni model pochopit a začít ho po relativně krátké době využívat.

3.6. Rozvoj metakognitivních dovedností

V oddíle 2 jsme viděli řadu případů, kdy žáci nebyli v řešení úlohy úspěšní kvůli svému naučenému řešitelskému chování. Neuvědomovali si nutnost situačního modelu, používali místo toho strategii signálních slov nebo jinou povrchovou strategii. Některé účinné intervenční výzkumy jsou založeny na myšlence, že je třeba především rozvíjet metakognitivní dovednosti žáků.

Příkladem je intervenční výzkum Verschaffela et al. (1999), v jehož rámci byli žáci 5. ročníku vedeni k tomu, aby si uvědomovali různé fáze řešitelského procesu (vytvoř si mentální reprezentaci úlohy, rozhodni se, jak řešit úlohu, proveď výpočty, interpretuj výsledek a formuluj odpověď, zhodnoť řešení) a aby byli schopni svou činnost v průběhu těchto fází monitorovat a hodnotit. Dále byli seznamováni s osmi heuristickými strategiemi, které se dají použít v prvních dvou fázích řešitelského procesu: nakresli si obrázek, vytvoř seznam, schéma nebo tabulku, odděl relevantní údaje od nerelevantních, použij znalosti z reálného života, zapiš si plán, odhadni a zkontroluj, hledej závislost, zjednoduš čísla. Žáci řešili komplexní, realistické úlohy, které jsou nejen řešitelné různými strategiemi, ale mohou mít i více řešení. Neméně důležitou součástí výuky bylo vytvoření určitých socio-matematických norem předcházejících vzniku potenciálně nebezpečných implicitních očekávání a přesvědčení (viz oddíl 2.4). O nich se při výuce diskutovalo. Žáci zpravidla pracovali v heterogenních skupinách na řešení úloh, které bylo následně společně diskutováno. Zatímco zpočátku učitel upozorňoval žáky na výše uvedené heuristiky a fáze řešení úlohy často, postupně žáci získávali jistotu a učitel jim předával v řešení úloh více autonomie.

Intervence trvala 4 měsíce (20 vyučovacích jednotek). Žáci v experimentální skupině prokázali lepší schopnost řešit úlohy jak po samotné výuce, tak s odstupem. Řešení aplikačních úloh je také více bavilo a prokázali v jejich řešení větší vytrvalost. Současně se ukázalo, že experimentální výuka negativně neovlivnila výkony žáků v běžných školních úlohách. Důležitým výsledkem byl také fakt, že z experimentální výuky profitovali i žáci v matematice spíše slabí (Vondrová, 2019: s. 106).

Dodejme, že v případě použití heuristických strategií řešení (nejen slovních) úloh máme k dispozici i výzkum s českými žáky střední školy (Eisenmann et al., 2015), který také dospěl k povzbudivým výsledkům.

3.7. Jazykové záležitosti

Řešení slovních úloh je do značné míry závislé na porozumění textu. Neporozumění konkrétním slovům či slovním spojením se lehce odstraní. Někdy však mohou mít žáci problém s pochopením zadání úlohy jako celku. V takovém případě může pomoci výzva k převyprávění úlohy jinými slovy a již zmíněná diskuse nad významem zadání. Dobře mohou posloužit i různé techniky rozvoje čtenářské gramotnosti, které však jdou již nad rámec tohoto textu.

Prostor dáme doporučení lingvistů z našeho výzkumného týmu, kteří zdůrazňují obousměrný vztah mezi slovními úlohami a českým jazykem (Vondrová et al., 2019: s. 329):

> Z pohledu jazykového vzdělání a dalšího rozvoje práce s textem jako nezbytné podmínky jazykové gramotnosti nelze doporučit jazykové zjednodušování úloh, a to zejména proto, že práce s nimi by mohla dobře podporovat sémantizaci vyučování češtině jako jeden z jejích žádoucích atributů. Naopak např. postup, kdy žáci spontánně pracují s aktivem a pasivem, je třeba vítat, podchytit a využít pro další uvědomělou práci v českém jazyce (funkce aktiva a pasiva při výstavbě jazykového projevu). Ukazuje se, že slovní úlohy jsou jedinečným jazykovým materiálem, jehož prostřednictvím lze tříbit žákův smysl pro jemné významové odstíny, pro odhalování denotačních i konotačních významů výrazů, pro poznání různých funkcí (synonymických) syntaktických struktur, pro rozvoj slovní zásoby i pro oblast věcného čtení. V tom se výuka matematiky a českého jazyka může vzájemně významně a s užitkem obohacovat.

4. Závěr

V článku bylo ukázáno, že příčiny použití povrchových strategií řešení slovních úloh žáky mohou být různé. Některé jsou spojeny s psychologickými charakteristikami žáka či s rysy slovních úloh samotných, jiné do velké míry vycházejí ze způsobu výuky. Přirozeně to, co se nám na první pohled může jevit jako povrchová strategie bez snahy o porozumění úloze, může být ve skutečnosti založeno na racionální úvaze, kterou může být obtížné až nemožné odhalit. Někdy mohou zkusmé výpočty, které se jeví jako projev některé z povrchových strategií, vést k získání vhledu do struktury úlohy a nakonec i ke správnému řešení (Vondrová et al., 2015: s. 403).

Poznatky shrnuté v oddíle 3 dobře ilustrují fakt, že pro rozvoj dovednosti řešit slovní úlohy nestačí dávat důraz na ten či onen aspekt, ale že je nutno řešit problematiku komplexně, předjímat různé příčiny vzniku tendence k povrchovým strategiím, jak byly uvedeny v tomto článku, a snažit se jim předcházet. Uvedli jsme příklad jedné takové intervence (Verschaffel et al., 1999). Přirozeně jsme problematiku výuky slovních úloh nevyčerpali v úplnosti. Protože v centru naší pozornosti byla snaha ukázat, jak žáky vést k potřebě tvorby situačního modelu, nevěnovali jsme se výslovně dalším fázím řešení slovní úlohy jako například rozvíjení různých způsobů matematizace slovní úlohy.

Literatura

[1] Csikos, C., Szitanyi, J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z.

[2] De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Netherlands: Springer.

[3] De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3–21.

[4] Divíšek, J. et al. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

[5] Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2.

[6] Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, 27(3), 421–438. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0.

[7] Greer, B., Verschaffel, L. & De Corte, E. (2003). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable*

in mathematics education? (pp. 271–292). New York: Kluwer Academic Publishers.

[8] Havlíčková, R., Hříbková, L. & Páchová, A. (2015). Slovní úlohy jako kritické místo matematiky 1. stupně základní školy. In N. Vondrová et al., *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 27–132). Praha: Karolinum.

[9] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[10] Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242–273. `http://dx.doi.org/10.2307/749120`.

[11] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E. & Šimša, J. (1994). *Matematika: Racionální čísla. Procenta*. Praha: Prometheus.

[12] Kaur, B. (2018). The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, 51(1), 151–168. `https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y`.

[13] Koman, M., Kuřina, F. & Tichá, M. (1993). *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Praha: Matematický ústav AV ČR.

[14] Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN.

[15] Martin, S. A. & Bassok, M. (2005). Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word-problem solving and equation construction tasks. *Memory & Cognition*, 33(3), 471–478. `https://doi.org/10.3758/BF03193064`.

[16] Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: PedF UK.

[17] Odvárko, O., Calda, E., Šedivý, J. & Židek, S. (1990). *Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN.

[18] Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematik Didaktik*, 4(3), 205–217.

https://doi.org/10.1007/BF03339231.

[19] Rendl, M. (1997). Vývoj počítání v první třídě. In *Zpráva projektu GAČR406/94/1417 Žák v měnících se podmínkách současné školy* (s. 171–228). Dostupné z: http://kps.pedf.cuni.cz/etnografie/vyzkum/1/5rendl.pdf, cit. 1. 8. 2019.

[20] Rendl, M. & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In Rendl, M. et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Praha: PedF UK.

[21] Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving „situation problems". Technical report no. 143.* University of Colorado: Institute of Cognitive Science.

[22] Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 195–229. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0103_2.

[23] Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31, 9–29. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0007-x.

[24] Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* Praha: PedF UK.

[25] Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M. & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Nakladatelství Karolinum.

[26] Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A. & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Nakladatelství Karolinum.

[27] Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN.

Abstract

The article focuses on such solving strategies for word problems which are only based on superficial features of the problem and not on its complete situational model. Several possible causes of the use of these strategies are described and illustrated by examples from the author's research and interviews with pupils. These causes comprise the presence of cues in the word problem statement in the form of numbers and of words suggesting a mathematical operation, and the tendency to compare the solved problem with some prototypical word problems. Attention is devoted to didactic and psychological causes, too. In the second part of the article, some didactic recommendations are given, complemented with research results documenting their efficiency. For example, it is suggested to use word problems for which the strategy of signal words does not work, to develop pupils' metacognitive skills and to lead them towards using visualisation of the word problem structure.

Naďa Vondrová
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz