David Nocar; Tomáš Zdráhal
Grafy funkcí

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 1, 26–37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148627

GRAFY FUNKCÍ

David Nocar, Tomáš Zdráhal[1]

Cílem článku je ukázat učitelům základní či střední školy, jak může graf funkce dvou proměnných pomoci při hledání a verifikaci řešení některých úloh i přesto, že se s takovými grafy žáci ještě nesetkali. Vše předvedeme na jedné úloze z „matematického folkloru".

Výchozí úloha. Tři kamarádi si chtěli na ohni ohřát společné jídlo. První přinesl 5 polínek, druhý 3 polínka. Třetí žádné dříví neměl, ale místo toho přispěl k ohřátí jídla 8 korunami. K ohřátí bylo zapotřebí právě všech 8 polínek, a třetí kamarád proto souhlasil s tím, že jeho 8 korun bude spravedlivě rozděleno mezi prvního a druhého kamaráda. Otázka zní: JAK?

Pokud žák (prakticky ihned) odpoví, že první kamarád s 5 přinesenými polínky PŘECE dostane 5 korun a druhý se 3 polínky dostane 3 koruny, položíme mu jinou „variantu" této úlohy:

Co když první kamarád donese 999 polínek, druhý 1 polínko a třetí dá místo polínek 1 000 korun?

Pokud i teď někdo odpoví, že první kamarád dostane 999 korun a druhý 1 korunu, přijdeme s tímto:

První dá skoro 1 000 000 polínek (skoro proto, že z posledního miliontého polínka bude chybět jedna malá tříska) a druhý dá jenom jednu třísku – přesně tak velkou, jaká chyběla v tom miliontém polínku prvního kamaráda. Jak by si tito dva měli rozdělit 1 000 000 korun, kterým kompenzuje dříví třetí kamarád?

Tady už určitě nenajdeme nikoho, kdo by byť jen chvíli uvažoval o tom, že by z toho milionu korun, který za ohřátí zaplatil třetí kamarád, měl něco dostat ten, který prakticky také žádné dříví nedonesl.

[1] Článek vznikl v rámci realizace projektu „Připravenost učitelů matematiky na rozvoj digitální gramotnosti žáků", č. proj.: IGA_PdF_2019_001.

Nebudeme zde rozvádět, jak je z didaktického hlediska důležité podobnými modifikacemi základního problému donutit žáky o svých řešeních přemýšlet. Budeme se zabývat stále jenom touto jednou úlohou, a to v souvislosti s její vizualizací matematickými grafy (grafy funkcí); i tyto úvahy se dají používat v nejrůznějších problémových úlohách.

Řešení původní úlohy. K ohřátí oběda bylo potřeba 8 polínek. Na jednoho kamaráda tedy připadlo $\frac{8}{3}$ polínka. Třetí kamarád za $\frac{8}{3}$ polínka zaplatil 8 korun; jedno polínko tedy má cenu $\frac{8}{\frac{8}{3}} = 3$ koruny. První kamarád dal navíc $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$ polínka; dostane za těch $\frac{7}{3}$ polínka $\frac{7}{3} \cdot 3 = 7$ korun. A druhý kamarád dostane zbytek, tedy 1 korunu. (Nebo jinak: Druhý kamarád dal navíc $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ polínka; dostane za tu $\frac{1}{3}$ polínka $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ korunu.)

Nyní se vrátíme k těm „extrémním“ variantám.

Začněme otázkou: Kdy ještě může druhý kamarád počítat s tím, že dostane za své dříví nějaké peníze? Označme počet polínek přinesených prvním kamarádem x a počet polínek přinesených druhým kamarádem y. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \geq y$. Z charakteru úlohy dále vyplývá, že $y \geq 0$. Podíl „spotřebovaných“ polínek na jednoho kamaráda je $\frac{x+y}{3}$. Zřejmě tedy musí být y takové, že $y - \frac{x+y}{3} \geq 0$. Odtud dostáváme, že $y \geq \frac{x}{2}$. Je tedy evidentní, že např. ve variantě „999 polínek, 1 polínko a 1 000 korun“ nemůže druhý kamarád nic dostat. (Výše finanční částky třetího kamaráda nemá žádný vliv na to, jestli nějaké peníze dostane druhý kamarád.)

První kamarád dal tedy „navíc“ $x - \frac{x+y}{3} = \frac{2x-y}{3}$ polínek, druhý kamarád pak $y - \frac{x+y}{3} = \frac{2y-x}{3}$ polínek „navíc“. Pokud třetí kamarád dal částku k korun za $\frac{x+y}{3}$ polínek, stojí jedno polínko $\frac{\frac{k}{x+y}}{3} = \frac{3k}{x+y}$. Proto první kamarád dostane $\left(\frac{2x-y}{3}\right) \cdot \left(\frac{3k}{x+y}\right) = k\frac{2x-y}{x+y}$ korun a druhý kamarád dostane $\left(\frac{2y-x}{3}\right) \cdot \left(\frac{3k}{x+y}\right) = k\frac{2y-x}{x+y}$ korun.

Naši úlohu pro 5 polínek, 3 polínka a 8 korun jsme tedy vyřešili „obecně“. Na obrázku 1 (x v řádku představuje počet polínek donesených prvním kamarádem a y ve sloupci představuje počet po-

x/y	1	2	**3**	4	5	6	7	8
1	4.00							
2	8.00	4.00						
3	10.00	6.40	4.00					
4	11.20	8.00	5.71	4.00				
5	12.00	9.14	**7.00**	5.33	4.00			
6	12.57	10.00	8.00	6.40	5.09	4.00		
7	13.00	10.67	8.80	7.27	6.00	4.92	4.00	
8	13.33	11.20	9.45	8.00	6.77	5.71	4.80	4.00

Obr. 1: Řešení úlohy 5 polínek, 3 polínka a 8 korun

línek donesených druhým kamarádem. Čísla uvnitř tabulky udávají počet korun, který by měl dostat první kamarád; je-li to číslo větší než 8, musí to „doplatit“ druhý kamarád.) je řešení vidět v průsečíku řádku označeného tučnou velkou 5 a sloupce označeného tučnou velkou 3 – je to tučné velké číslo 7.00 (7.00 korun pro prvního kamaráda s 5 polínky; druhý kamarád se 3 polínky pak pochopitelně dostane zbytek do 8 korun, tj. 1 korunu). Učitel by měl projít s žáky tabulku celou. Například takto: Co nám např. říká, že v průsečíku řádku s číslem 2 a sloupce s číslem 1 je číslo 8.00? [Řešení: Dal-li první kamarád 2 polínka, druhý kamarád 1 polínko a třetí kamarád 8 korun, tak první kamarád musí dostat 8 korun, tedy celou tuto částku sám.] Nebo: Co nám říká číslo 10.00, které je v průsečíku řádku s číslem 6 se sloupcem s číslem 2? [Řešení: Dal-li první kamarád 6 polínek, druhý kamarád 2 polínka a třetí kamarád 8 korun, tak první kamarád musí dostat 10 korun (8 korun od třetího a 2 koruny od druhého – tedy druhý kamarád nejenže z těch 8 korun třetího kamaráda nedostane nic. ale musí ještě doplatit 2 koruny ze svého.] A co říká „trojice“ (7, 6, 4.92)? (Tj. v průsečíku řádku s číslem 7 a sloupce s číslem 6 je číslo 4.92.) [Řešení: Dal-li první kamarád 7 polínek, druhý kamarád 6 polínek a třetí kamarád 8 korun, tak první kamarád musí dostat 4.92 koruny.] To, že vyšla „necelá“ částka (ve skutečnosti je to číslo $4.\overline{923076}$), nám nevadí – částku jednoduše zaokrouhlíme. Naopak nás to „posouvá“ dále. Představme si totiž, že by třetí kamarád kompenzoval skutečnost, že ničím do ohně nepřispěl, nějakou komoditou, která je měřitelná spojitou veličinou – například zlatem; dané množství zlata lze vážit stále přesněji a přesněji a výsledkem je jisté reálné číslo. Podobně, do ohně můžeme přikládat určitým množstvím dřeva, vyjádřeným opět reálným číslem udávajícím jeho hmotnost. Jinak řečeno, zajímá nás následující:

Spojitý případ. První kamarád dal x dřeva, druhý kamarád y dřeva a třetí kamarád k korun, kde x, y, k jsou reálná čísla: Za jakých podmínek a jak se mají první dva kamarádi o částku rozdělit?

Tuto úlohu jsme již vyřešili, jenom jsme neuvažovali o tom, že x, y, k jsou reálná čísla, splňující podmínku $x \geq y \geq 0$ a $y \geq \frac{x}{2}$. Můžeme se pokusit sestrojit tabulku podobné tabulce na obrázku 1, a tudíž tu třetí souřadnici uspořádané trojice $\left(x, y, k\frac{2x-y}{x+y}\right)$ pro konkrétní hodnoty x, y zjistit. Nezískáme tím však žádnou představu, jak se třetí souřadnice mění v závislosti na prvních dvou. Tuto představu získáme nakreslením grafu funkce $k\frac{2x-y}{x+y}$ (pro prvního kamaráda) a grafem funkce $k\frac{2y-x}{x+y}$ (pro druhého kamaráda). Chceme tedy nakreslit grafy dvou funkcí tří proměnných:

$$f_1(x, y, k) = k\frac{2x - y}{x + y}$$

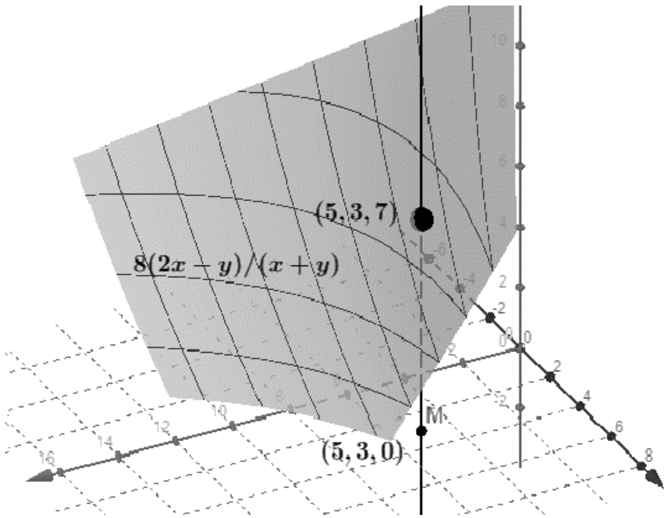
a

$$f_2(x, y, k) = k\frac{2y - x}{x + y}.$$

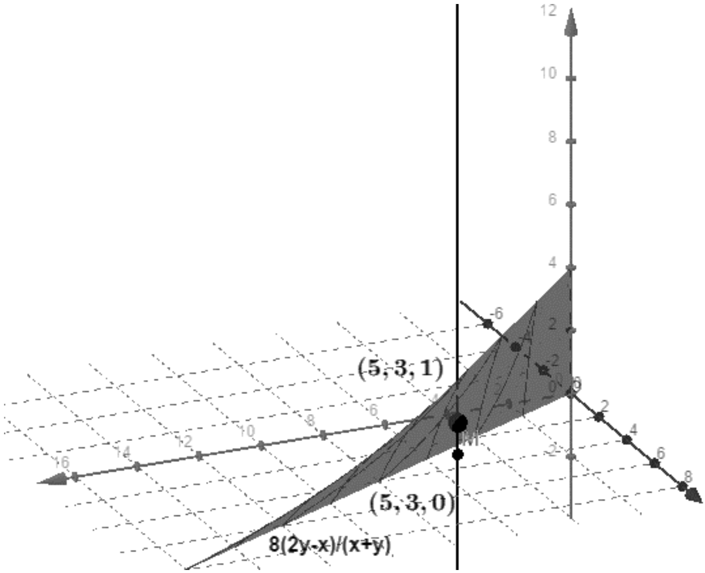
Protože grafem funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $(X, f(X))$, kde X je bod definičního oboru funkce f a $f(X)$ je funkční hodnota v tomto bodě, je jasné, že např. grafem funkce $f_1(x, y, k)$ bude množina uspořádaných dvojic $\big((x, y, k), f_1(x, y, k)\big)$, tedy chápeme-li každou proměnnou zvlášť, vlastně množina uspořádaných čtveřic $(x, y, k, f_1(x, y, k))$. Jinak řečeno, grafem takové funkce bude nějaká podmnožina čtyřrozměrného prostoru. Protože máme „k dispozici“ pouze tři geometrické rozměry, je zřejmé, že takovýto graf nakreslit nemůžeme. Na druhé straně naše funkce f_1 a f_2 závisí na k jenom lineárně, a proto dostaneme hodnotu funkce $f_1(x, y, k)$ jako k násobek hodnoty funkce $f_1(x, y, 1)$, tj. $f_1(x, y, k) = kf_1(x, y, 1)$. Označíme-li

$f_1(x, y, 1) \equiv f_{11}(x, y)$, máme $f_1(x, y, k) = kf_{11}(x, y)$. Vidíme tedy, že hodnotu funkce $f_1(x, y, k)$ tří proměnných x, y, k dostaneme tak, že vynásobíme číslem k hodnotu funkce $f_{11}(x, y)$ – dvou proměnných x, y. A graf funkce dvou proměnných je podmnožina trojrozměrného prostoru čili tento graf už nakreslit můžeme. Vynásobíme-li pak nalezenou hodnotu funkce $f_{11}(x, y)$ počtem korun k, dostaneme hledanou částku pro prvního kamaráda. Naprosto analogická situace je pro funkci $f_2(x, y, k)$, tedy pro částku, kterou má dostat druhý kamarád.

Protože ve školské matematice nemáme dostatek matematických vědomostí k tomu, abychom „ručně“ nakreslili grafy funkcí dvou proměnných, použijeme k nakreslení grafů funkcí $f_{11}(x, y)$ a $f_{21}(x, y)$ počítačový program pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu GeoGebra, který je distribuován zcela zdarma. Důležitost přesných konstrukcí a možnosti programů dynamické geometrie viz (Kotenkamp, 1998). Z důvodu vizualizace původní varianty úlohy (5 polínek, 3 polínka a 8 korun) necháme GeoGebru nakreslit grafy funkcí $8f_{11}(x, y) = 8\frac{(2x-y)}{x+y}$ a $8f_{21}(x, y) = 8\frac{(2y-x)}{x+y}$.



Obr. 2: Graf funkce $8\frac{(2x-y)}{x+y}$ pro $x \geq y \geq 0$ a $y \geq \frac{x}{2}$ a řešení úlohy 5 polínek, 3 polínka a 8 korun: 7 korun pro prvního kamaráda



Obr. 3: Graf funkce $8\frac{(2y-x)}{x+y}$ pro $x \geq y \geq 0$ a $y \geq \frac{x}{2}$ a řešení úlohy 5 polínek, 3 polínka a 8 korun: 1 koruna pro druhého kamaráda

(Na tomto místě si dovolujeme čtenáři vřele doporučit, aby všechny obrázky udělal v programu v GeoGebra sám, a měl tak možnost si grafy prohlédnout „ze všech stran“. Kresba 3D grafů je v programu GeoGebra opravdu velmi snadná…, viz (Nocar, Zdráhal, 2015).)

Pokusme se nyní řešení naší úlohy znázornit graficky prostředky matematiky základní školy – tedy grafem nějaké známé funkce jedné proměnné. Základní idea je následující (v této části by měl učitel žákům především základní školy asistovat): Najít funkci vyjadřující poměr vyplacených částek prvního a druhého kamaráda v závislosti na poměru počtu přinesených polínek prvního a druhého kamaráda, tedy

$$\frac{kf_{11}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{y}\right)}{kf_{21}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{y}\right)}.$$

Dostáváme tak

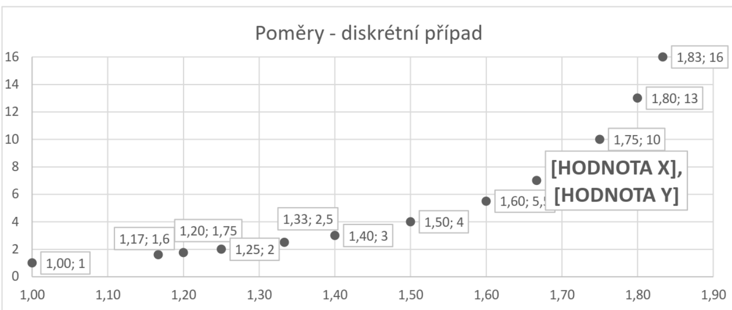
$$\frac{\frac{k(2x-y)}{x+y}\frac{1}{y}}{\frac{k(2y-x)}{x+y}\frac{1}{y}} = \frac{2\frac{x}{y}-1}{2-\frac{x}{y}}$$

a položíme-li $t := \frac{x}{y}$, vidíme, že máme opravdu jednoduchou funkci jedné proměnné $\frac{2t-1}{2-t}$, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola. (Pro naši úlohu musí platit, že $x \geq y \geq 0$ a $y \geq \frac{x}{2}$. Tedy $1 \leq t < 2$; ostrá nerovnost je zde proto, že jmenovatel zlomku $\frac{2t-1}{2-t}$ nemůže být roven nule.) Tato funkce pro naši úlohu 5 polínek, 3 polínka a (obecně) k korun dává výsledek

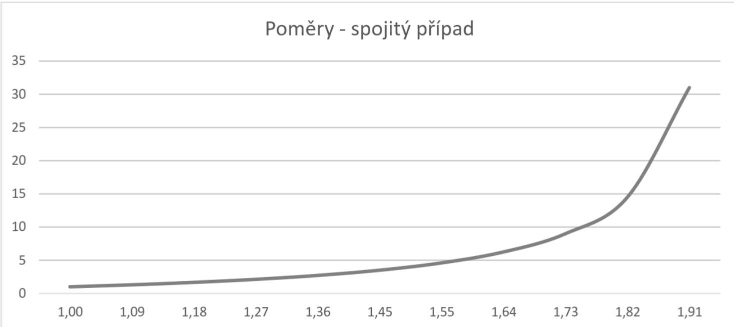
$$\frac{2\frac{x}{y}-1}{2-\frac{x}{y}} = \frac{2\frac{5}{3}-1}{2-\frac{5}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7.$$

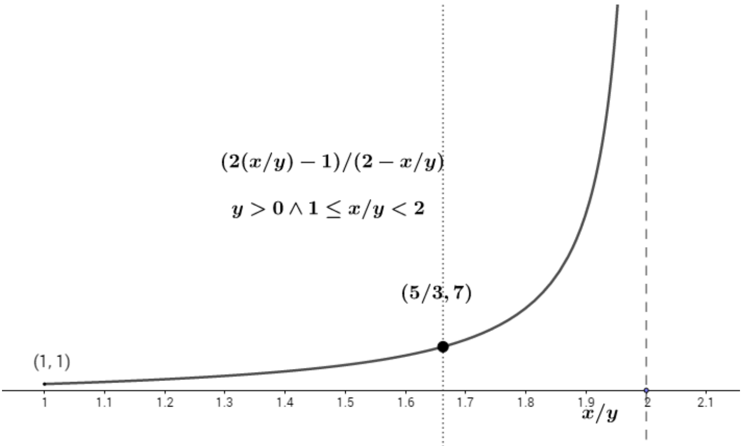
V MS Excel dostaneme tabulku a grafy. (Opět nejprve uvažujeme „diskrétní" případ – zde tím máme na mysli skutečnost, že t je racionální číslo. Teprve potom případ spojitý – t je reálné číslo; tady nakreslíme graf navíc i v programu GeoGebra, protože je názornější, viz obrázek 4.) V následující tabulce první řádek představuje zlomky a druhý řádek je jejich vyjádření zaokrouhlenými desetinnými čísly.

$t = \frac{x}{y}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{6}$
	1.00	1.17	1.20	1.25	1.33	1.40	1.50	1.60	1.67	1.75	1.80	1.83
$\frac{2t-1}{2-t}$	1	1.6	1.75	2	2.5	3	4	5.5	7	10	13	16



t	1.00	1.09	1.18	1.27	1.36	1.45	1.55	1.64	1.73	1.82	1.91	2.00
$\frac{2t-1}{2-t}$	1.00	1.30	1.67	2.13	2.71	3.50	4.60	6.25	9.00	14.50	31.00	∞





Obr. 4: Výpočet hodnot a grafy funkce $\frac{2t-1}{2-t}$

Je vidět, že grafické řešení „poměrové“ funkce jedné proměnné $t := \frac{x}{y}$ není příliš názorné. Obrázky funkce dvou proměnných jsou rozhodně více vypovídající, a můžeme tedy říci, že existují případy (tento je jeden z nich), kdy redukcí počtu proměnných nezískáme názornější řešení. Samozřejmě ale musíme mít k dispozici nějaký matematický software, který nám pomůže původní grafy nakreslit.

Zobecnění úlohy. Budeme naši úlohu modifikovat:

Předpokládejme, že kamarádi jsou jenom dva. Jeden dá polínka, druhý koruny. Po ohřátí oběda si ten s polínky vezme koruny a není co řešit.

Co když budou kamarádi čtyři? Zřejmě nám nepřinese nic nového situace, kdy polínka dají jenom dva. Pak by totiž ti dva zbývající „platící" kamarádi museli dát stejně peněz a měli bychom situaci, kdy dva donesou polínka a mají se rozdělit o jistou částku – což není nic jiného než naše původní úloha.

Tedy, jsou čtyři kamarádi, tři z nich donesou polínka v počtu x, y, z a dostanou za ně od čtvrtého k korun. Jak se o tuto částku mají rozdělit?

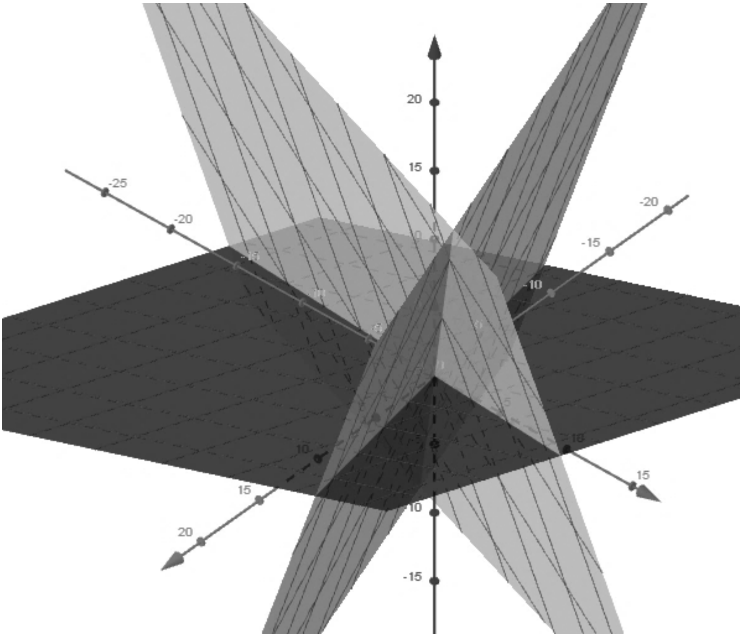
Postup řešení bude v podstatě stejný jako nahoře pro tři kamarády. Protože v dalším zobecníme naši úlohu pro n kamarádů, kde by bylo již nepohodlné je „řadit" podle počtu přinesených polínek, upusťme už zde od podobné podmínky, jakou byla nerovnost $x \geq y$ v případě tří kamarádů.

Označme počet polínek přinesených prvním kamarádem x, počet polínek přinesených druhým kamarádem y a počet polínek přinesených třetím kamarádem z. Obdobně jako v případě tří kamarádů je vidět, že podíl „spotřebovaných" polínek na jednoho kamaráda je $\frac{x+y+z}{4}$. Zřejmě tedy musí být x, resp. y, resp. z takové, že $x - \frac{x+y+z}{4} \geq 0$, resp. $y - \frac{x+y+z}{4} \geq 0$, resp. $z - \frac{x+y+z}{4} \geq 0$. Odtud dostáváme, že $x \geq \frac{y+z}{3}$, resp. $y \geq \frac{x+z}{3}$, resp. $z \geq \frac{x+y}{3}$.

Obrázek 5, kde jsou nakresleny roviny $x = \frac{y+z}{3}$, $y = \frac{x+z}{3}$, $z = \frac{y+z}{3}$, poskytuje představu o tom, jak tento podprostor trojrozměrného prostoru vypadá. (Opět apelujeme na to, aby si čtenář příslušný obrázek sám v programu GeoGebra nakreslil, a mohl tak „odhalit" trojice (x, y, z), pro které má tato „úloha z praxe" smysl; nesmíme pochopitelně zapomenout, že se pohybujeme pouze v prvním oktantu $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.)

Pokračujme dále v řešení.

První kamarád dal tedy „navíc" $x - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3x-y-z}{4}$ polínek, druhý kamarád dal „navíc" $y - \frac{x+y+z}{4} = \frac{-x+3y-z}{4}$ polínek a třetí pak $z - \frac{x+y+z}{4} = \frac{-x-y+3z}{4}$ polínek „navíc". Pokud čtvrtý kamarád dal částku k korun za $\frac{x+y+z}{4}$ polínek, stojí jedno po-



Obr. 5: Roviny $x = \frac{y+z}{3}, y = \frac{x+z}{3}, z = \frac{x+y}{3}$

línko $\frac{\frac{k}{x+y+z}}{4} = \frac{4k}{x+y+z}$. Proto první kamarád dostane $\left(\frac{3x-y-z}{4}\right) \cdot \left(\frac{4k}{x+y+z}\right) = k\frac{3x-y-z}{x+y+z}$ korun a druhý kamarád dostane $\left(\frac{-x+3y-z}{4}\right) \cdot \left(\frac{4k}{x+y+z}\right) = k\frac{-x+3y-z}{x+y+z}$ korun a třetí kamarád pak dostane $\left(\frac{-x-y+3z}{4}\right) \cdot \left(\frac{4k}{x+y+z}\right) = k\frac{-x-y+3z}{x+y+z}$ korun.

Zobecnění úlohy pro n kamarádů je po předchozích úvahách snadné: Z celkem n kamarádů dalo $n-1$ polínka a 1 dal k korun. Jak se měli ti, kteří dali polínka spravedlivě, o těch k korun rozdělit? (Již bylo řečeno, že pokud by peníze dali dva, případně m kamarádů (vždy stejnou částku!), přešla by tato úloha v úlohu o $n-1$, případně o $n-m$ kamarádech.)

Nechť x_i označuje počet polínek donesený i-tým kamarádem, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, a k počet korun n-tého kamaráda. Podíl „spotřebovaných“ polínek na jednoho kamaráda je $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n}$. Opět není problém vypočítat (viz modifikace úlohy pro čtyři kamarády), že musí být splněno těchto $n-1$ nerovností: $x_i \geq \frac{\sum_{j\neq i, j=1}^{n-1} x_j}{n-1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dalšími výpočty už snadno zjistíme, kolik který kamarád má dostat korun: i-tý kamarád ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) dostane

$$k\frac{(n-1)x_i - \sum_{j\neq i, j=1}^{n-1} x_j}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \text{ korun.}$$

Pro naši původní úlohu (5 polínek, 3 polínka a 8 korun) dostáváme dosazením do tohoto vzorce už dříve nalezené řešení
1. kamarád $8\frac{2x_i - x_2}{x_1 + x_2} = 8\frac{2\cdot 5 - 3}{5+3} = 7$,
2. kamarád $8\frac{2x_2 - x_1}{x_1 + x_2} = 8\frac{2\cdot 3 - 5}{5+3} = 1$.

Necháváme už na čtenáři, aby tuto úlohu z matematického folkloru „přeformuloval“ v poněkud „serióznější“ problém. Např.: „Na zakázce se mělo podílet n subdodavatelů. Každý, až na jednu výjimku, ke splnění zakázky nějak přispěl (něco proinvestoval). Ten, který ničím nepřispěl, kompenzoval svou neúčast na zakázce jistou finanční částkou (musel, protože potřeboval být pod zakázkou také uvedený). Za jakých předpokladů a jak se o tuto částku mohou ostatní subdodavatelé rozdělit, aby to odpovídalo tomu, co do ní investovali?“

Literatura

[1] Kotenkamp & U. H., Richter-Gebert, J. (1998). *Geometry and Education in the Internet Age.* [online]. [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: `http://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehrstuhl/PublikationenJRG/24_GeometryAnd_EducationXX.pdf`

[2] Nocar, D. & Zdráhal, T. (2015). The Potential of Dynamic Geometry for Inquiry Based Education. In *EDULEARN15 Proceedings.* Barcelona: IATED.

Abstract

The article shows how graphs of functions in two variables could help elementary school pupils in finding and verifying solutions of some tasks, even though they have not met such graphs yet; the images of the functions in two variables are sufficiently comprehensible in these cases. On the other hand, by reducing the number of variables, the solution does not become more understandable. It is stressed that pupils must have some mathematical software to help them draw the original graphs.

David Nocar
e-mail: david.nocar@upol.cz

Tomáš Zdráhal
e-mail: tomas.zdrahal@upol.cz

Katedra matematiky PdF UP
Žižkovo nám. 5
771 40 Olomouc