

# Učitel matematiky

---

František Kuřina

Metody a cíle vyučování matematice

*Učitel matematiky*, Vol. 27 (2019), No. 3, 169–179

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148612>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2019

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## METODY A CÍLE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

FRANTIŠEK KUŘINA

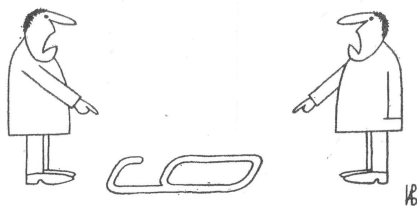
### 1. Úvod

Na každý problém, přírodní či společenský, tedy i na problémy pedagogické, se můžeme dívat z různých stran. Je smutnou skutečností, že řada autorů nedokáže respektovat, ba ani vnímat, názory druhé strany. Přitom „naše schopnost vzít se do ostatních a podívat se na svět jejich očima, je čistě lidská a patří mezi základní vlastnosti, jež hrály roli v naší úspěšné evoluci“ (Linkley, 2017, s. 165).

Jiný názor na vyučování matematice bude mít matematik – vědec, jiný matematik – pedagog. Vědec bude zdůrazňovat spíše výsledky vzdělávacího procesu (co žák „umí“), učitel vidí především otázku, jak matematiku u žáků rozvíjet. Toto dilema **cesty** a **cíle** se mi jeví jako důležité. Matematik – vědec má tendenci hodnotit i vyučování matematice např. z hlediska matematických struktur, z hlediska logické stavby teorie nebo z hlediska aplikací matematiky. Učitel vidí matematiku, která je jádrem jeho práce, prismatickým pedago­gickým, psychologickým a společenským problémem. Učitel není profesionální matematik, který tvoří matematické teorie, není ani badatelem v oblasti pedagogiky či psychologie. Ovšem: leží na něm břímě praxe vyučování matematice. Ačkoliv matematika je jádrem jeho profese, jeho činnost má charakter společenský: od otázek motivace, snahy o to, aby žáci nejen matematice rozuměli, ale měli ji i rádi (nebo ji aspoň příznivě přijímali), ale také ji „uměli“, až k problémům kázně ve třídě, provozu školy a spolupráci s rodiči. Je-li matematika jádrem práce učitele matematiky, musí matematiku na určité úrovni dobře znát. Jinak by

nemohl účinně přispívat k růstu matematických poznatků v myslích žáků, nemohl by matematiku žákům úspěšně zprostředkovávat. Bez dobrého matematického vzdělání učitele byly by hodiny matematiky formálním předáváním poznatků, které nemůže žáky zaujmout a zakládá možnost, že žáci reprodukují matematiku bez porozumění a nejsou schopni matematické poznatky využít při řešení úloh.

Je zajímavé, že diametrálně různě mohou hodnotit vyučování matematice i lidé s analogickým vzděláním. Tak např. absolvent matematicko-fyzikální fakulty *Karel Janeček* píše: „Hejného metodu vnímáme nejen jako skvělý nástroj pro výuku matematiky, ale také pro rozvoj osobnosti žáka. Ve vzdělávání považujeme za zásadní vnímat každého žáka jako jedinečného, rozvíjet jeho kreativitu, kritické myšlení a vnitřní motivaci“ (Hejný a kol., 2015). Absolvent téže fakulty *Luboš Motl* zastává tento názor: „Hejného projekt ohrožuje vzdělanost národa a budoucnost průmyslového srdce Evropy (ČR). (...) Řada důležitých profesí v Česku spoléhá na děti, které nedokážou znovuobjevit všechno jako Euler, Gauss (...), ale zvládnou se podobné věci naučit ve škole nebo s cizí pomocí. Přežití těchto profesí může být položeno na oltář lživosti a laciné popularity pro pana Hejného a jeho pomocníky“ (Nové metody výuky matematiky?, 2018).



Není vhodné srovnávat vyučování matematice např. s vyučováním dějepisu, přesto si dovoluji uvést následující příklad.

*Milan Hejný* píše v článku (Lojdrová, 2015): „Tradiční představa o cílech vyučování matematice na prvním stupni je hbité sčítání, odčítání, násobení a dělení. To je představa velice špatná. Podstatou matematického poznání není hbité počítání, ale hluboké porozumění, tj. dynamicky se rozvíjející síť vzájemně propojených zkušeností a znalostí.“

*Alice Masaryková* se již před 100 lety rozhodla učit dějepis „jako disciplínu, jež pomáhá rozvíjet duchovní a mravní vědomí žáků, a nikoli jako suše faktografický popis uplynulých dějů a událostí“ (Lovči, 2007, s. 83).

S jakým ohlasem se tito dva autoři setkali?

*Jana Mazáčová*, učitelka ZŠ, hodnotí Hejného žáky takto: „Mají hluboké nedostatky v základních počtech, nezvládají vy počítat součet dvojciferných čísel z hlavy, neumí malou násobku, tudíž nezvládnou ani dělení (...)“ (Nové metody výuky matematiky?, 2018).

Alice Masaryková se stala předmětem kritiky svých kolegů, „že mnoho nenaučí a její svěřenkyně nejsou s to udávat z hlavy data významných válečných srážek a konfliktů“ (Lovči, 2007, s. 84).

Otázka metod a cílů vyučování matematice je složitá a budeme se jí dále věnovat.

## 2. O škole

Relativně nízká úroveň výsledků matematického vzdělávání u nás není důsledkem alternativních metod vyučování, ale spíše ne vždy uspokojivou prací tradiční školy. Ta souvisí se společenským postavením učitelů, malým důrazem společnosti na problémy vzdělávání, ale i s nízkou úrovní některých absolventů fakult vzdělávajících učitele. Tento problém není ovšem nový. Např. *Karel Čapek* napsal již v roce 1930: „Je-li něco nemoderního a nepružného v našich středních školách, (...) znamená to, že tkví něco nemoderního a nepružného v našich univerzitách“ (Čapek 1970, s. 20). Podle mého názoru není pro učitelské vzdělávání vhodné strukturované studium (bakalářské a magisterské). Vzdělání učitelů by mělo být hlubší v matematice (zejména v elementární matematice) a daleko větší péče by se měla věnovat školní praxi. Na některých univerzitách nefungují fakultní školy jako pracoviště s univerzitou úzce spolupracující, se zkušenými dobrými učiteli a s možností provádět pedagogický výzkum. Podrobněji jsem o této problematice psal v článku z r. 2014.

Významný nizozemský pedagog *Fred Korthagen* napsal v práci z r. 2011: „Učitelé učí tak, jak byli sami vzděláváni, a ne tak, jak se

jim říká, že mají učit.“ Dobrý učitel se začíná utvářet již na škole základní a střední a univerzita by ho neměla „pokazit“ formálními přístupy k matematice. Názory, že matematika je disciplína, v níž je „každý pojem přesně definován“ (Bušek, Boček, Calda, 1992, s. 7) a v níž již „při prvním čtení je především nutno studujícím podávat pojmy a věty skutečně exaktně formou „definice, věta, důkaz“, a to proto, aby se naučili správnému matematickému myšlení a vyjadřování“ (Zelinka, 1976, s. 9), nepokládám za správné. Vyučování matematice pro budoucí učitele by podle mého názoru nemělo mít charakter klasického schématu „definice, věta, důkaz“. Nejen z toho důvodu, že nefunguje dobře. Zakládá i nesprávný přístup k matematice na základní a střední škole. Vzdělávání by mělo spíše klást otázky a prostřednictvím úloh učit vidět potřebu zavádění pojmů, formulací definic, domněnek, vět a důkazů. Považuji za účelné spojovat matematickou a didaktickou složku, a to od počátku studia matematiky, klást důraz na proces utváření pojmů a postupů při soustavné péči o porozumění matematice. Uvedme příklad takového přístupu z Pedagogické fakulty UK, a to v předmětu analytická geometrie. V úvodu publikace Úvod do studia analytické geometrie (Stehlíková a kol., 2005) autoři zdůrazňují: „Při studiu budeme uvažovat o tom, jak je možné tu nebo onu myšlenku analytické geometrie zpřístupnit žákům střední a základní školy. Tento cíl zdánlivě náleží předmětu Didaktika, a nikoliv do analytické geometrie. Na druhé straně podle našich zkušeností a podle našeho přesvědčení každé hluboké zamyšlení nad tím, jak budeme tu nebo onu část matematiky vyučovat, nám přináší nové, hlubší a ucelenější poznání matematiky samé. (...) Kromě toho představa, že jednou sám bude podobné věci učit, motivuje posluchače k větší intenzitě učení, prosvětluje jeho práci radostí z očekávaného, mění jeho postoj k předmětu. Nepříliš povzbudivé je učení pro jednorázovou zkoušku, radostná je ale příprava pro práci s žáky.“ Je přirozené, že v didakticky koncipované analytické geometrii nemohou autoři začít definicí  $n$ -dimenzionálního prostoru, ale využívají zkušeností studentů, aby se postupně do  $n$ -té dimenze vyšplhali po „dimenzionálním žebříku“. Studenti spojení matematické teorie s otázkami didaktickými velmi vítají,

neboť vidí aplikace toho, co se učí, v pedagogické praxi, nacházejí smysl probírané teorie a hlouběji problematice rozumějí. Jsem si vědom toho, že takto koncipované vyučování je náročné na čas i na učitele. Podle mého názoru by přesto matematické vzdělání učitelů mělo být od samého začátku zaměřeno na konstrukci matematických pojmů, nikoli na předávání hotových matematických struktur. Budoucí učitel by měl na vlastním vzdělávání pocítit, že podstatnou složkou vzdělávacího procesu je porozumění problematice, které se rozvíjí kladením otázek, řešením problémů, zaváděním pojmů, formulací domněnek a dokazováním vět. Základní otázka spočívá v tom, jak koncipovat učitelské vzdělávání jako školu myšlení a nikoli jako zařízení na přenos matematických poznatků do poznámek studentů. Kloním se tedy k názoru *Bertranda Russella*, který píše např. „Místo, aby se v geometrii začínalo únavným aparátem falešných důkazů pro zjevné a samozřejmé pravdy, by se mělo studentovi dovolit, aby předpokládal pravdivost všeho zřejmého, a pak by se mu měly vysvětlovat důkazy vět, které jsou jak překvapující, tak snadno ověřitelné obrázkem (...). Abstraktní důkazy by tak měly tvořit jen malou část výuky, a mělo by se k nim přistupovat teprve, když se studenti již seznámili s konkrétními ilustracemi“ (Russell, 2016, s. 51).

Takovýto přístup jsem se snažil po několik let realizovat v přednáškách z elementární matematiky na Univerzitě v Hradci Králové a píše o něm v publikaci (Hošpesová a kol., 2011). Vidíme tedy, že i na vysokoškolské úrovni lze k výuce matematiky přistupovat různě. Tím spíše to platí o matematice na základní a střední škole.

V roce 1979 jsem popsal dva přístupy k vyučování matematice:

„A: Učitel předává třídě matematické učivo zpracované takovým způsobem, aby je mohli žáci pochopit a osvojit si je.

B: Žáci sami, vlastní činností, kterou učitel organizuje, docházejí k novým matematickým poznatkům.“

Přístup B je patrně progresivnější, je však časově náročnější a musí být podle mého názoru v praxi kombinován s přístupem A. Realizace přístupů A a B závisí nejen na úrovni třídy, ale i na tom, jak chápe učitel matematiku jako vědu. Může v matematice vidět vědu o strukturách (Krygowská, Bourbaki), může ji ovšem chápat

jako ideální techniku (Alexandrov) či jako metodu předpovídání pomocí formálních kalkulů (Gnedenko, Vopěnka). Matematika na základní škole by měla být patrně ovlivněna především názorem Vopěnkovým: žák řeší úlohy výpočty, tedy formálními kalkuly.

### 3. O školní matematice

Má matematika na základní škole blíže k vědě nebo k řemeslu? Vědec bádá, řemeslník „maká“. „Osobnosti se (...) neformují posloucháním a mluvením, ale prací a aktivitou. (...) Nejdůležitější metodou výchovy bylo vždy to, že žák byl nucen něco skutečně dělat. To se týká stejně tak prvních pokusů o psaní v obecné škole jako doktorské dizertace na univerzitě, memorování básně, napsání slohového úkolu, výkladu a překladu textu, řešení matematického problému nebo provedení cviku v tělesné výchově“ (Einstein, 1995, s. 23). V matematice by měli žáci počítat, rýsovat, řešit úlohy, a tedy i objevovat. Podle mého názoru je nerealistická teze, že žák by měl objevit celou matematiku základní školy. Ne každé dítě je disponováno na tvoření objevů, i vědci stavějí na výsledcích předchozích generací. Ovšem řešení vhodných úloh může mít charakter hledání nových cest, tedy charakter tvorby.

Připomeňme v této souvislosti poměr lidí k matematice. Můžeme rozlišit čtyři kategorie. Osoby, které vytvářejí nové matematické teorie, formulují nové poznatky, které uspořádávají do definic, vět a důkazů (množina  $T$  tvůrců matematiky). Jistě početnější je skupina  $K$  konzumentů matematiky, tedy osob, které užívají matematiku ve svých profesích. Jsou to např. technici a přírodovědci. My, učitelé, distribuujeme matematické poznatky a tvoříme množinu  $D$ . Vysokoškolští učitelé matematiky by měli patřit do průniku všech tří připomenutých množin. Nejvíce osob ovšem patří do doplňku množin  $T$ ,  $K$ ,  $D$ . Jsou to osoby, které nepotřebují matematiku ve svých profesích, ani matematiku nevytvářejí, a nejsou ani učiteli. Matematické vzdělání na základní škole musí ovšem sloužit všem. Musí poskytnout dobrý základ pro další studium, ať už teoretické nebo praktické, musí ovšem i kultivovat žáka, rozvíjet jeho představivost, myšlení, vyjadřování, paměť i pracovní návyky. Učitel by měl připravovat žáky pro všechny

čtyři kategorie lidí. Ve třídě mu sedí budoucí lékař, inženýr, umělec i žena v domácnosti.

Jsem přesvědčen, že každé vysokoškolské vzdělávání je účelné diferencovat podle zamýšleného profilu absolventů – ne jen co do obsahu, ale i co do metod.

Probírat v učitelském vzdělání nejdříve (více méně formálně) různé matematické teorie a pak (opět více méně formálně) teorie pedagogické, psychologické a didaktické, nemůže účinně přispívat k výchově dobře připravených učitelů.

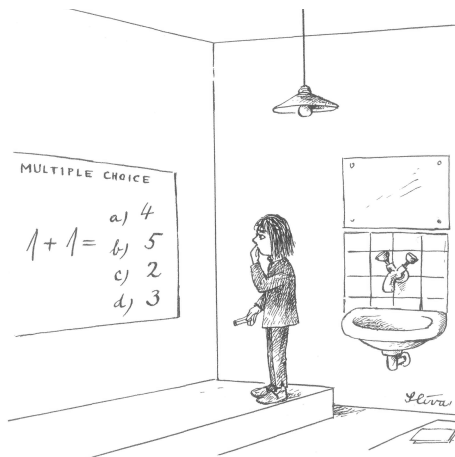
Matematika v učitelském vzdělávání by měla být od samého začátku, jak už jsem poznamenal, prodchnuta otázkami didaktického charakteru. Cesta a cíl matematického vzdělávání musí být v souladu, je to podle mého názoru nutný předpoklad kvalitního vzdělání učitele.

Další stránka matematického vzdělávání žáků souvisí ovšem s realitou konkrétní třídy ve specifických společenských poměrech. *Petr Vopěnka* kdysi napsal: „Není krásnější poslání než učit žáky, kteří se učit chtějí, a není horší zaměstnání než učit žáky, kteří se učit nechťejí.“ A učitel má ve třídě zpravidla žáky obou kategorií. Podle *Petra Špiny* může být žáků, kteří se nechťejí učit nic, kterým nevdí ani špatné známky, někdy až třetina třídy. Umění kantorské spočívá v tom, aby učitel všechny žáky nejen naučil soubor matematických poznatků, ale vypěstoval u žáků i dobrý poměr k práci. To může zvládnout jen dobrý učitel, který je náležitě vzdělán a oddán svému povolání.

V současné době se zdůrazňuje kultivace matematické gramotnosti. K této otázce se nyní vyjádřím. Jiří Mareš definuje s odvoláním na americkou autorku *G. Sarigovou* gramotnost jako takové vědění a učení, které se snaží zpracovávat znalosti způsobem promyšleným, reflexivním a tvořivým a pokouší se využívat při tom náročnější myšlenkové operace (Mareš, 2013, s. 106). V *Pedagogické encyklopedii* zpracovala oddíl Gramotnost *Jana Doležalová*, která rozlišuje gramotnost čtenářskou, matematickou a další druhy gramotností, které tvoří základ *obecné gramotnosti* považované za „nezbytnou pro současného člověka – občana“. Vymezení jednotlivých druhů gramotností přebírá z publikací (Straková,



2002) a (Úlohy pro měření čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti, 2000) v tomto smyslu (Průcha, 2009, s. 225): „Matematická gramotnost je definována jako způsobilost rozpoznat a pochopit matematiku, zabývat se jí a být schopen podložených soudů o úloze matematiky v soukromém životě jednotlivce, v zaměstnání, ve společnosti. Čtenářská gramotnost představuje . . . schopnost porozumět psanému textu, přemýšlet o něm a používat jej k dosažení vlastních cílů, k rozvoji vlastních vědomostí a potenciálu a k aktivní účasti ve společnosti.“ O vztahu tzv. funkční gramotnosti a gramotnosti školní píše v citované encyklopedii Milada Rabušicová, při čemž zdůrazňuje, že „funkční gramotnost . . . představuje výlučně gramotnost dospělých“ (Průcha, 2009, s. 235).



Podle mého názoru nemají takto chápané pojmy pro školní praxi hlubší význam, neboť formulace „pochopit matematiku, zabývat se jí a být schopen soudů o ní“ postrádají konkrétní obsah. Proto jsem před několika léty formuloval pro potřeby didaktiky matematiky následující pojetí gramotnosti:

„Matematickou gramotností na úrovni  $n$ -té třídy  $k$ -tého stupně rozumíme

- schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému),

- schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie,
- dovednost řešit úlohy, jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostřední) aplikací probraného učiva.

K řešení úloh problémového charakteru je třeba větší míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické kultury. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy. Pěstování matematické gramotnosti je nejdůležitější úkol každého stupně školy“ (Hošpesová, 2011, s. 26). Matematickou gramotnost může dobře posoudit zodpovědný učitel, jen zčásti ji lze hodnotit na základě jednorázového testování. O těchto otázkách jsem psal v článku (Kuřina, 2014).

#### 4. Závěry

Jak pomoci zlepšovat vyučování matematice (a ne jen matematice) v našem státě? Uvedu zde svůj pohled na věc založený na dlouholeté zkušenosti učitele matematiky.

Dlouhodobě je nutné věnovat systematickou péči vzdělávání učitelů spolu se snahou zlepšovat jejich postavení.

K zlepšení výsledků práce by mělo přispět zavedení celostátně platných osnov s vyjádřením nepodkročitelného minima požadavků na žáka.

Ministerstvo školství by mělo zajistit vypracování dlouhodobé koncepce vyučování matematice. Realizace přijaté koncepce by měla být podpořena vytvořením učebnic, které by byly doporučeny všem školám. Tyto učebnice se ovšem prosadí, budou-li lepší než stávající soubory učebnic. Plošné testování všech žáků by mělo být zrušeno, neboť může vést k biflování odpovědí na předpokládané otázky testů. Úroveň matematického vzdělání žáků lze zjistit výběrovým statistickým šetřením. Učitelé by měli věnovat pozornost jak žákům zaostávajícím, tak i žákům nadaným, kteří by mohli studovat na nižších gymnáziích (jejich počet je účelné redukovat).

Zlepšení práce školy spočívá, jak jsem již několikrát uvedl, na dobré práci dobrých učitelů a je to úkol dlouhodobý.

Z hlediska výuky matematiky by škola měla usilovat o dosahování těchto cílů:

1. Dovést všechny žáky na úroveň matematické gramotnosti potřebné pro život a další studium.
2. Rozvinout matematickou kulturu nadaných žáků k prvním krokům tvořivosti.
3. Pěstovat důležité psychické funkce, zejména vnímání, soustředění, myšlení, cítění.
4. Rozvíjet důležité společenské funkce, zejména odpovědnost, pracovitost, vytrvalost, kritičnost.

Vřele souhlasím s následující charakteristikou školy, kterou publikoval *Václav Jamek* v r. 1998. „Škola není místo, kde by dítě mělo získat co nejvíce vědomostí a přitom se pokud možno vůbec nenamáhat. Koncept „školy hrou“ spíše žádá, aby škola využívala spontánní objevovací schopnost dítěte a tak je k námaze motivovala, ne však, aby je veškeré námahy ušetřila“ (Jamek, 1998, s. 184).

Ještě jednou opakují: Vyučování matematice mohou zlepšit jen dobří učitelé. Eduard Čech zdůrazňoval: „Dobrý učitel bude učit dobře i podle špatné učebnice a špatný učitel bude učit špatně, i kdyby měl učebnici vynikající.“

## Literatura

- [1] Bušek, I., Boček, L. & Calda, E. (1992). *Matematika pro gymnázia. Základní pojmy z matematiky*. Praha: Prometheus.
- [2] Čapek, K. (1970). *Místo pro Jonathana*. Praha.
- [3] Einstein, A. (1995). *Jak vidím svět II*. Praha: Nakladatelství Lidové noviny.
- [4] Hejný a kol. (2015). *Matematika A. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. Praha: H – mat.
- [5] Hošpesová, A. a kol. (2011). *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: JU.
- [6] Jamek, V. (1988). *O patřičnosti v jazyce*. Praha: Nakladatelství Franze Kafky.

- [7] Korthagen, F. (2011). *Didaktika realistického vzdělávání učitelů*. Paido: Brno.
- [8] Kuřina, F. (1979). *K pojetí vyučování matematice na základní škole*. MÚAV České republiky.
- [9] Kuřina, F. (2014). Když dvě a tři je méně než pět. *Pedagogika*, LXIV, 119–125.
- [10] Linkley, P. (2017). *Malá vítězství*. Praha: Beta.
- [11] Nové metody výuky matematiky? 2018 <http://vyukamatematiky.math.cas.cz>
- [12] Průcha, J. (2009). *Pedagogická encyklopedie*. Praha: Portál.
- [13] Russell, B. (2016). *Mystika logika a jiné eseje*. Praha: Academia.
- [14] Stehlíková, N., Hejný, M. & Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie*. Praha: Pedagogická fakulta.
- [15] Straková, J. (2002). *Vědomosti a dovednosti*. Praha: UIV.
- [16] Zelinka, B. (1976). Předmluva překladatele. In Marcus, S., *Matematická analýza čtená podruhé*. Praha: Academia.

## Abstract

The author presents his views of the goals of teaching mathematics. The text is complemented by a number of quotations by writers and public figures related to education. The goals are considered in relation to the ways people will use mathematics in their future life. Finally, the author presents some recommendation how to improve teaching mathematics.

*František Kuřina*  
*Univerzita Hradec Králové*  
*Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky*  
*Rokitanského 62*  
*500 03 Hradec Králové*  
*e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz*