Josef Polák

Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 2, 96–110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148603

ROZVOJ LOGICKÉHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ VE VÝUCE MATEMATIKY

JOSEF POLÁK

V současnosti za jeden z hlavních cílů výuky matematiky na ZŠ a SŠ je všeobecně považován rozvoj logického myšlení žáků. Tento cíl se formuluje a zdůrazňuje jak v *Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání* (RVP ZV) a *Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia* (RVP G), tak ve *Školních vzdělávacích programech* (ŠVP) většiny základních škol a gymnázií.

RVP ZV uvádí jako jedno z významných cílových zaměření vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* (str. 31):

- Vzdělávání v této vzdělávací oblasti vede žáka k rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování, srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.

Na 2. stupni zejména ve vzdělávacím okruhu *Matematika* v tematickém okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* je očekávaným výstupem (str. 37):

- Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

RVP G zdůrazňuje jako významné cílové zaměření vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* (str. 22):

- Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti vede žáka k rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů.

Zejména ve vzdělávacím okruhu *Matematika* v tematickém okruhu *Argumentace a ověřování* jsou očekávanými výstupy (str. 23):

- Žák čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematicky, užívá správně logické spojky a kvantifikátory, rozliší definici a větu, rozliší předpoklad a závěr věty, rozliší správný a nesprávný úsudek, vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost nebo nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení, zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému.

Při zvažování a realizaci uvedených cílů v RVP ZV a RVP G (a obdobně i na SOŠ) před každým učitelem vyvstávají tyto zásadní didaktické otázky:

- *Je logické myšlení žáků jen vrozeně dané, nebo je možné a nutné v procesu školního vzdělávání (nejen v matematice) všechny žáky cílevědomě učit logicky myslet?*
- *Je samozřejmostí, že ve výuce matematiky automaticky učíme žáky logicky myslet?*
- *Jaký význam má logické myšlení žáků pro porozumění matematice a jak systematicky rozvíjet jejich logické myšlení ve školské praxi?*

Odpovědi na tyto, popř. další s nimi související otázky, nejsou tak jednoduché a jednoznačné, jak by se na první pohled zdálo. Závisejí totiž zcela podstatně na pojetí odpovědi na základní (primární) otázku:

Co je vlastně *logické myšlení*?

Pojmy myšlení, logické myšlení, matematické myšlení

Pojem *myšlení* se definuje v psychologii; např. v publikaci (Kosíková, 2011, str. 36):

„*Myšlení* je zprostředkující a zobecňující poznávání skutečnosti na základě pochopení vzájemných vztahů a souvislostí, znamená proces zpracování a využívání informací, jehož výsledkem je nový poznatek.“ Z hlediska psychodidaktických aspektů se charakterizuje „myšlení jako schopnost chápat a řešit problémy“.

Pojem *logické myšlení* jako jeden z významných typů myšlení je definován v psychologii, popř. v pedagogice různými autory značně nejednotně, přičemž často není jednoznačně a exaktně vymezen. Velký psychologický slovník (Hartl, Hartlová, 2010) uvádí tuto jeho charakteristiku:

„*Logické myšlení* je vývojově vyšší forma myšlení, než je myšlení závislé na předmětné činnosti; správné usuzování podle zákonů formální logiky, v níž se jako základní rozlišuje odvozování z obecného ke specifickému, čili *dedukce*, a ze specifického k obecnému, čili *indukce*.“

Přitom pojem *logiky* je definován (Polák, 2014, str. 15) takto:

„*Logika* je věda o správném usuzování (vyvozování důsledků z daných předpokladů).“ Za jejího zakladatele je považován starořecký učenec Aristoteles. Původní řecké chápání logiky bylo ovšem poněkud širší (řec. slovo logos má více významů: řeč, slovo, myšlenka, rozum, smysl, zákon, . . .). V současnosti se rozlišuje *klasická (aristotelovská, neformální) logika a moderní (formální, matematická) logika.*

Souhrnně vyjádřeno: *Logické myšlení* se chápe jako myšlení založené na příčinách a jejich následcích, hledání logických vazeb a na nich postavených řešení problémů, vyvozování závěrů a zvážení, co se za daných podmínek může stát.

V běžném životě, ve vyučování i ve vědě je logické myšlení provázeno a často mu předchází *intuitivní myšlení*, tj. myšlení na základě intuice (z lat. slova in-tueor, in-tuitum = v-hled) znamenající vhled, náhled, náhlé poznání, chápání, které není zprostředkované vědomým uvažováním, ale jehož zdrojem je náhlý nápad. Na rozdíl od logického myšlení, jehož mozkovou doménou je levá hemisféra, doménou intuitivního myšlení je pravá hemisféra.

Téměř po celé 20. století se psychologové domnívali, že lidské chování, myšlení i dovednosti jsou podmíněny vrozenými dispozicemi a ovlivňovány společenskými faktory. Koncem 20. století díky novým vyšetřovacím metodám (např. užití počítačové tomografie) se začala podstatně rozvíjet neuropsychologie a fyziologie mozku. Rozsáhlými vědeckými výzkumy bylo mimo jiné prokázáno, že již při narození je náš *mozek strukturován* a *„naprogramován“*. Základem pro jeho činnost, myšlení a speciálně logické myšlení je dostatečné množství nervových buněk a silná struktura nervových spojů v dané oblasti mozku.

Optimistickým závěrem četných vědeckých výzkumů je, že nervové spoje se vytvářejí při jakékoliv duševní činnosti člověka po celý život. Speciálně *logické myšlení lze vhodnou duševní činností soustavně rozvíjet a zdokonalovat.* To je výzkumně prokázanou vědeckou odpovědí na první zásadní didaktickou otázku, kterou jsme položili v úvodní části článku:

- *Je logické myšlení žáků jen vrozeně dané, nebo je možné a nutné v procesu školního vzdělávání (nejen v matematice) všechny žáky cílevědomě učit logicky myslet?*

Současná pedagogika vychází z toho, že každá oblast lidské činnosti a každý vědní obor vyžaduje jistou specifickou formu myšlení, avšak nezbytnost logického myšlení je jim společná.

Pro moderní aktivizující metody vyučování je dále společné *kreativní myšlení*, tj. tvůrčí myšlení charakterizované otevřeným cílem a tvorbou různých alternativ. Zároveň soudobá liberální společnost požaduje rozvíjet *kritické myšlení*, tj. myšlení charakterizované snahou ze získaných poznatků (informací) se dobrat vlastním kritickým úsudkem objektivní pravdy.

Specifické myšlenkové procesy v matematice se nazývají *matematické myšlení* (Devlin, 2012), (Frobisher, Frobisherová, 2015). V I. části této didaktické publikace autoři zdůrazňují, že „rozvoj schopnosti matematického myšlení a využívání matematického myšlení na řešení problémů či úloh by mělo být základním cílem vyučování matematiky na každé úrovni vzdělávání a v každém věku“.

Matematické myšlení se rozděluje podle různých hledisek (viz typologie podle internetového vyhledávače Google), např. podle obsahového hlediska na aritmetické myšlení, algebraické myšlení, geometrické myšlení, pravděpodobnostní a stochastické myšlení, statistické myšlení, infinitesimální myšlení aj. Nebo podle sémantického hlediska se matematické myšlení rozděluje na algoritmické myšlení, funkční myšlení apod. Pro matematické myšlení jsou charakteristické zejména myšlenkové procesy *generalizace (zobecňování)* a *abstrakce.* Z tohoto hlediska se rozděluje na *konkrétní myšlení* a *abstraktní myšlení.* Zároveň pro matematiku a matematické myšlení je charakteristický specifický matematický jazyk a přislušná specifická matematická symbolika, viz (Polák, 2016). Četná literatura se zabývá vztahem matematického myšlení a logického myšlení, viz např. (Devlin, 2012).

V souvislosti se vztahem matematického myšlení k logickému myšlení se nyní vrátíme ke druhé a třetí zásadní didaktické otázce z úvodní části článku:

- *Je samozřejmostí, že ve výuce matematiky automaticky učíme žáky logicky myslet?*

Jak ukazuje školní praxe, odpověď na tuto otázku je žel negativní. Skutečnost, že matematika je exaktní věda, jejíž disciplíny jsou vytvářeny logickým myšlením na pevných logických základech, se nepřenáší zcela automaticky do výuky matematiky. V současnosti se na 2. stupni ZŠ a na SŠ lze poměrně často setkat s tím, že výuka matematiky je soustřeďována převážně jen na řešení typových určovacích (výpočetních či konstrukčních) úloh pouze formálním dosazováním do matematických vzorců bez zdůvodnění, resp. užitím formálně naučených algoritmů bez hlubšího porozumění. Na rozdíl od relativně nedávné minulosti se přešlo (z řady důvodů) v matematice i dalších předmětech od ústního a písemného zkoušení téměř výhradně jen k písemnému zkoušení. Výuka se tak v očích studentů jeví jako soustavný „běh od písemky k písemce“, přičemž důležitá je především rychlost řešení úloh (vedoucí často k jejich paměťovému učení).

- *Jaký význam má logické myšlení žáků pro porozumění matematice a jak systematicky rozvíjet jejich logické myšlení ve školské praxi?*

Význam logického myšlení je pro skutečné porozumění matematice zcela zásadní, bez něho jsou znalosti žáků pouze formální a netrvalé. Odpověď na druhou část otázky je proto velmi významná a budeme se jí věnovat v následujících částech článku.

Prelogické a logické myšlení v předškolním vzdělávání a na 1. stupni ZŠ

Pojetí a cíle *předškolního vzdělávání*, jeho vzdělávací oblasti a vzdělávací obsah jsou stanoveny *Rámcovým vzdělávacím progra-*

mem pro předškolní vzdělávání (RVP PV), který je chronologicky prvním ze systému rámcových kurikulárních dokumentů.

Ze stanovených dílčích vzdělávacích cílů (str. 19) jsou pro rozvoj matematického myšlení zejména důležité:

- rozvoj, zpřesňování a kultivace smyslového vnímání, přechod od konkrétně názorného myšlení k myšlení slovně-logickému (pojmovému), rozvoj a kultivace paměti, pozornosti, představivosti, fantazie,
- rozvoj tvořivosti (tvořivého myšlení, řešení problémů, tvořivého sebevyjádření).

Z očekávaných výstupů (str. 20) jsou pro rozvoj matematického myšlení nejdůležitější:

- chápat základní číselné a (další) matematické pojmy, elementární matematické souvislosti a podle potřeby je prakticky využívat (porovnávat, uspořádávat a třídit soubory předmětů podle určitého pravidla, orientovat se v elementárním počtu cca do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat více, stejně, méně, první, poslední, apod.),
- chápat prostorové pojmy (vpravo, vlevo, dole, nahoře, uprostřed, za, pod, nad, u, vedle, mezi apod.), elementární časové pojmy (teď, dnes, včera, zítra, ráno, večer, jaro, léto, podzim, zima, rok), orientovat se v prostoru i v rovině, částečně se orientovat v čase,
- řešit (přiměřené) problémy, úkoly a situace, myslet kreativně, předkládat „nápady“.

K naplňování těchto výstupů vzdělávání na mateřské škole je třeba zvlášť využívat vhodné hry a vytvářet podnětné *komunikační prostředí.*

V pedagogice předškolního vzdělávání je podnětnou publikací kniha Předmatematické činnosti pro předškolní vzdělávání (Kaslová, 2010), ve které se autorka zaměřila na charakteristiku pojmů *uvažování a usuzování v předškolním vzdělávání.* Jejich uplatnění ilustruje na příkladech vhodných *aktivit (praktických činností)* dětí, zejména her a předškolních vzdělávacích činností.

Uvažování autorka charakterizuje jako mentální proces, v němž jedinec hodnotí („váží“) určité (dané) informace podle jistých vlastních nebo zadaných kritérií.

Usuzování autorka charakterizuje jako vyšší mentální proces, ve kterém ze známých informací a vazeb mezi nimi dospíváme k novým informacím, přičemž hodnotíme pravdivost jednotlivých informací. Žádná pravidla usuzování (tvoření správných úsudků) se ovšem děti neučí. Používají je pouze intuitivně napodobováním usuzování učitele a pod jeho vedením.

Rozvoji matematického myšlení na úrovni *mateřské školy* se věnuje teoreticky i prakticky na ilustrativních příkladech publikace autorů (Melichar, Svoboda, 2003).

Ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ – v primárním vzdělávání moderní didaktika matematiky (zejména od 2. poloviny 20. století) pod přímým vlivem úspěchů psychologie při studiu kognitivních mentálních procesů zcela nově formulovala základní cíle výuky. Za hlavní cíl výuky matematiky se začal považovat a v kurikulu (viz RVP ZV) uplatňovat *rozvoj matematického myšlení žáků*. Tím se podstatně změnil a rozšířil tradiční hlavní cíl výuky matematiky v primárním vzdělávání, jímž bylo naučit žáky spolehlivě sčítat, odčítat, násobit a dělit přirozená čísla. Rozvoj matematického myšlení žáků je realizován zejména prostřednictvím řešení vhodných úloh, při němž se cílevědomě uplatňují mentální procesy *uvažování* a *usuzování*.

Tato nová koncepce výuky matematiky na 1. stupni ZŠ je podrobně popsána a četnými příklady ilustrována v publikaci britských autorů (Frobisher, Frobisherová, 2015) vydané ve slovenském překladu. Autoři se v ní zmiňují i o možnostech uplatnění některých *prvků logického myšlení* v primární výuce matematiky.

Logické pojmy ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ

Užití logiky proniklo do výuky matematiky na základní škole v 70.–80. letech 20. století v období tzv. modernizace školské matematiky (jejího množinově-logického pojetí). V tomto období bylo využití logiky ve výuce matematiky na ZŠ předmětem teoretického i praktického pedagogického výzkumu, viz např. článek

(Kuřina, 1974). Jeho výsledky byly experimentální učební texty a později učebnice matematiky pro ZŠ osmdesátých let. Představu o tomto pojetí výuky matematiky na ZŠ poskytuje publikace (Mikulčák, 1993). V úvodní kapitole Jazyk matematiky (str. 8–13) autor uvádí a na příkladech vysvětluje logické pojmy:

a) *Výrok* je takové jazykové vyjádření, o němž můžeme rozhodnout, zda je pravdivé, nebo nepravdivé.
b) *Výroková forma* má tvar výroku, ale obsahuje proměnnou.
c) *Matematická věta* je pravdivý matematický výrok, který se dá dokázat na základě známých matematických výroků.
d) *Definicí* zavádíme zvláštní názvy a označení pro matematické objekty, které se často vyskytují, aby vyjadřování v matematice bylo stručné a výstižné. V definicích užíváme zpravidla formulace „. . . se nazývá . . . “; podle této formulace rozlišíme definice od matematických vět. (Citovaný text je zestručněn a stylisticky upraven.)

Minimálně v tomto rozsahu by jistě bylo užitečné jejich uvedení a užívání i v současném pojetí výuky matematiky na 2. stupni ZŠ. Zde by též měli být žáci seznámeni s pravdivostním ohodnocováním výroků a umět rozlišovat *pravdivé výroky* a *nepravdivé výroky.* Dalšími užitečnými a snadno zvládnutelnými pojmy tu jsou logická operace *negování jednoduchých výroků* a vytváření *složených výroků* pomocí logické spojky *a* (ve významu slučovacím, tj. ve smyslu *a zároveň*) a pomocí logické spojky *nebo* (v nevylučovacím významu) – v porovnání se širším významovým pojetím příslušných gramatických spojek. V neposlední řadě je pak třeba žákům objasnit *vztah vyplývání* mezi pravdivými obsahově souvisejícími výroky a ukázat jim jeho zásadní logickou roli ve *správném usuzování.* Již od základní školy se žáci mají učit přiměřeně zdůvodňovat svá tvrzení. Proto by měli řešit nejen úlohy, jejichž řešení vyžaduje odpověď na otázku *„Jak?“*, ale též úlohy vyžadující odpověď na otázku *„Proč?“*. K rozvoji logického myšlení žáků také mohou přispět a jejich zájem v tomto směru posílit *logické hádanky* a hlavolamy (Polák, 2014, str. 24–25).

Poznámka. V RVP ZV se používají (viz str. 31) dva sobě blízké logické pojmy usuzování a argumentace, které mají tento význam:

Usuzování (úsudek) je myšlenkový proces (postup), jímž se odvodí, že z daných výroků tzv. *předpokladů (premis) úsudku* jako důsledek plyne výrok zvaný *závěr úsudku.*

Argumentace (zdůvodňování) je myšlenkový proces (postup), jímž se snažíme přesvědčit své partnery či oponenty o pravdivosti, popř. nepravdivosti nějakého výroku (*teze*) na základě jistých přesvědčivých odůvodňujících výroků (*argumentů*), které se nám podařilo nalézt. Výsledkem správné argumentace je vždy správný úsudek.

Matematická logika a její užití ve středoškolské matematice

Podrobný rozbor obsahové náplně a didaktických aspektů výkladu základních pojmů matematické logiky a jejího užití ve středoškolské matematice je uveden v autorových publikacích (Polák, 2015, str. 9–38) a (Polák, 2014, str. 15–29). V následujícím textu se proto soustředíme jen na některé z terminologických a metodických problémů.

Ve výrokové logice v matematice na SŠ při vytváření základních složených výroků zavedení pojmu *konjunkce výroků* $p \wedge q$ (pomocí logické spojky $\wedge$ čtené *a* ve významu *a zároveň*, tj. smyslu slučovacím) je snadno pochopitelné, neboť je ve shodě se základním pojetím gramatické spojky a v běžném (přirozeném) jazyce. Poněkud obtížnější je to v případě zavedení pojmu *disjunkce výroků* $p \vee q$ (pomocí logické spojky $\vee$ čtené *nebo* ve významu *alespoň jeden*, tj. ve smyslu nevylučovacím), neboť gramatická spojka *nebo* je používána v českém jazyce též ve smyslu vylučovacím (v písmu se pak před *nebo* píše čárka).

Podstatně obtížněji pochopitelné bývá zavedení *implikace výroků* $p \Rightarrow q$ (pomocí logické spojky $\Rightarrow$ čtené *jestliže ..., pak ...*, resp. *implikuje*), protože běžně v českém jazyce gramatická věta tvaru *„Jestliže ..., pak (tak)...“* (tzv. *podmínkové souvětí*) komunikačně a logicko-sémanticky nemusí mít vždy význam implikace, jež je ve výrokové logice jednoznačně definována tabulkou pravdivostních hodnot implikace. Z didaktického hlediska je proto vhodné definici (pravdivostní ohodnocení) implikace $p \Rightarrow q$ *motivovat* příkladem právě takového podmínkového souvětí, které má i v běžném životě význam implikace. Velmi vhodným motivačním příkladem z běžného života je např. *slib* vedoucího pracovníkovi: „Jestliže splníte stanovený pracovní úkol, dostanete určitou odměnu.“ Tento slib představuje implikaci $p \Rightarrow q$, jejíž pravdivostní ohodnocení dává vždy reálný smysl. Pokud nastalo p a následovalo q, slib vedoucího byl splněn (implikace $p \Rightarrow q$ je pravdivá). Pokud nastalo p, avšak nenásledovalo q, slib vedoucího byl porušen (implikace $p \Rightarrow q$ je nepravdivá). Pokud p nenastalo, tak slib vedoucího k ničemu nezavazoval, takže ať q udělal nebo neudělal, slib neporušil (a tedy implikace $p \Rightarrow q$ je pravdivá).

Ve výrokové logice se v logických operacích s výroky obecně nepředpokládá žádný *obsahový či kauzální (příčinný) vztah* mezi těmito výroky. Ve vědě a speciálně v matematice mají však význam především taková spojení výroků, mezi nimiž vztahy a souvislosti existují. Přitom ovšem je třeba si uvědomovat, že speciálně implikace $p \Rightarrow q$ není obecně totéž, co *vztah vyplývání* výroku q z výroku p. Ten existuje pouze v případě, že pravdivost výroku p zaručuje (má za *důsledek*) pravdivost výroku q, tj. nemůže nastat situace, že výrok p je pravdivý a zároveň q je nepravdivý.

Zobecněním tohoto vztahu je vztah *logického vyplývání* mezi premisami (předpoklady) a závěrem (důsledkem) v tzv. *správném (logickém) úsudku (usuzování)*: závěr logicky vyplývá z premis, když nemůže nastat situace, že premisy jsou pravdivé a závěr je nepravdivý. V matematice je tvoření správných úsudků významným logickým základem *důkazů* matematických vět.

Dále je třeba zdůraznit, že složené výroky s výrokovými proměnnými nejsou výroky, ale tzv. *výrokové formule*. Význam tohoto pojmu ve výrokové logice spočívá zejména v tom, že bez něho není možné exaktně definovat pojem *výrokové tautologie*! (Nelze jej definovat jako vždy pravdivý výrok. Např. složený výrok „Je-li noc, pak po ní nastane den“, je vždy pravdivý výrok, ale není tautologií.)

Tautologie je výroková formule vždy pravdivá (tj. pravdivá pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných). *Výrok je* *tautologicky pravdivý*, když mu přísluší výroková formule, která je tautologie. (Např. výrok „Prší nebo neprší“ je tautologicky pravdivý, neboť výroková formule $p \vee \neg q$ je tautologie.)

Říkáme, že *výrokové formule P, Q jsou logicky ekvivalentní*, právě když jejich ekvivalence $P \Leftrightarrow Q$ je tautologie. *Výroky p, q jsou logicky ekvivalentní*, právě když jejich ekvivalence $p \Leftrightarrow q$ je pravdivá, tj. výroky p, q jsou zároveň pravdivé, anebo zároveň nepravdivé.

Kromě uvedených pojmů *výrokové logiky* se ovšem korektně nelze na SŠ obejít bez základních pojmů *predikátové logiky*: *výrokové formy* a *operace s výrokovými formami.* Pojem výroková forma $v(x)$ je zejména nutný pro zavedení pojmu *kvantifikovaný výrok*, který je v matematice užíván k vyjádření *matematických vět.*
Například: $4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n \ldots$ výroková forma v proměnné $n \in \mathbb{N}$,
$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n \ldots$ matematická věta.

Příklady absence logického myšlení ve vyučování matematiky a důsledky ve formálnosti znalostí žáků

Vyjdeme v českém překladu z publikace (Hejný a kol., 1990): Teória vyučovania matematiky 2, str. 50:

„Před 40. lety se logika na střední škole učila jen okrajově, víceméně jako součást filozofie. Orientovaná byla aristotelovsky na obsah a rozsah pojmu, druhy soudů a sylogismus. Modernizace vyučování matematiky pojala logiku jako součást matematiky a zdůraznila v ní výrokový a predikátový kalkul. Naučila žáky konstruovat tabulky pravdivostních hodnot složených výroků, což se považovalo za hlavní činnost v učení se logiky.

Společným nedostatkem obou koncepcí logiky, klasické i moderní, je jejich malé spojení se životem. Logiku se žák učí na umělých, speciálně k tomu vytvořených příkladech a nemá potuchy, kde je možné tyto znalosti uplatnit. Často to, pravda, neví ani učitel a žákovu provokativní otázku „K čemu to je?“ buď mocensky umlčí – obvykle dříve, než se nahlas vysloví –, anebo zodpoví transcendentním poukazem na to, že logické myšlení patří k civilizaci a kultuře.

Předsudek, že učením se výrokovému počtu rozvíjíme logické myšlení, je běžně vžitý názor mnohých učitelů či autorů učebnic. Jsme přesvědčeni, že o rozvoji logického myšlení tu není možné hovořit o nic více než povězme při učení se úprav algebraických výrazů. Přesněji – míra, kterou toto učivo přispívá k rozvoji logického myšlení žáků, nezávisí od samotného učiva, ale od způsobu a přístupu, kterým jej učitel předkládá žákům.“

Lze žel konstatovat, že s obdobnou situací je velmi často možné se setkat i v současnosti ve středoškolské matematice, když pojmy z matematické logiky jsou v ŠVP na SŠ zařazeny jen na začátku 1. ročníku SŠ (resp. kvinty osmiletého G) a pak nejsou soustavně a cílevědomě používány v dalších partiích ve všech ročnících studia. Zároveň je třeba zdůraznit, že rozvoji logického a matematického myšlení zásadně neprospívá, je-li ve školské praxi výuka matematiky realizována převážně transmisivně, bez vhodných motivací s pouhým formálním uváděním a používáním nezdůvodněných vzorců, kalkulů a algoritmických postupů. Tak například když při probírání tématu kvadratická rovnice a její řešení je nejen opomíjena motivace, ale zejména když se vychází z neodvozeného vzorce pro kořeny kvadratické rovnice. Přitom právě důkaz tohoto vzorce vycházející z úpravy kvadratického trojčlenu „doplněním na úplný čtverec“ je neméně významnou součástí matematického vzdělání. Tato úprava se často využívá také v mnoha dalších matematických disciplínách (při konstrukci grafů kvadratických funkcí, v analytické geometrii kuželoseček, v matematické analýze aj.) i v četných aplikacích matematiky. Podobně v partiích geometrie o obsazích a objemech geometrických útvarů než jen formální znalost příslušných vzorců je důležitější vědět, jak se tyto vzorce dají postupně logicky odvodit a aplikovat. Obdobně v partii analytické geometrie kuželoseček z hlediska rozvoje matematického a logického myšlení je podstatné odvození jejich analytického vyjádření, které má zásadní význam pro jeho neformální porozumění i praktické použití.

Závěr

Matematika má důležité a nezastupitelné místo v rozvoji logického myšlení žáků. Již na ZŠ (zejména na 2. stupni) se žáci mají v matematice učit správně argumentovat, rozlišovat a umět svými slovy formulovat jednoduché matematické definice a věty, zdůvodňovat svá řešení úloh.

Základní pojmy matematické logiky v přiměřeném širším rozsahu je možné a účelné probírat až na úrovni 1. a 2. ročníku SŠ (čtyřletého gymnázia), v 1. ročníku pojmy výrokové logiky, ve 2. ročníku rozšířené o pojmy predikátové logiky. Přitom je třeba vysvětlovat a zdůrazňovat logickou podstatu těchto pojmů (nejen se omezovat na tabulky pravdivostních hodnot složených výroků). Vysvětlovat je a ilustrovat na vhodně zvolených příkladech i na řešení zajímavých logických úloh.

Zejména však by se zavedené logické pojmy a symboly měly soustavně využívat v celém průběhu studia matematiky! Jinak je jejich zavedení jen formální (bez hlubšího porozumění) a studenti si oprávněně kladou otázku, proč se tyto pojmy zaváděly, když se dále nepoužívají (a tedy se brzy zapomenou). Systematické využívání logických pojmů a logické symboliky v matematice je optimálně samozřejmou součástí nejen jejího výkladu, ale též řešení matematických problémů (úloh).

Literatura

[1] Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking.* Palo Alto, CA USA: Keith Devlin.

[2] Frobisher, L. & Frobisherová, A. (2015). *Didaktika matematiky I, II.* Bratislava: Raabe.

[3] Hartl, P. & Hartlová, H. (2010). *Velký psychologický slovník.* Praha: Portál.

[4] Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN.

[5] Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti pro předškolní vzdělávání.* Praha: Raabe.

[6] Kosíková, V. (2011). *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty.* Praha: Grada Publishing.

[7] Kuřina, F. (1974). Logika a vyučování matematice na základní škole. *Matematika a fyzika ve škole*, roč. 4, č. 6 a 7.

[8] Melichar, J. & Svoboda, J. (2003). *Rozvoj matematického myšlení I pro studium učitelství pro mateřské školy.* Ústí nad Labem: UJEP.

[9] Mikulčák, J. (1993). *Přehled učiva základní školy.* Praha: SPN.

[10] Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky.* (10. vyd.) Praha: Prometheus.

[11] Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. Konkrétní didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus.

[12] Polák, J. (2016). *Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. Obecná didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus.

Citované kurikulární dokumenty

[13] Kolektiv autorů (2018). *Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání* (RVP PV). Praha: NÚV, MŠMT ČR.

[14] Kolektiv autorů (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (RVP ZV). Praha: NÚV, MŠMT ČR.

[15] Kolektiv autorů (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* (RVP G). Praha: VÚP, MŠMT ČR.

Abstract

The development of the logical thinking of pupils is generally regarded as one of the chief goals in the education of mathematics. The paper is based on the analysis of the concepts of logical thinking and the relations between logical and mathematical thinking. The following parts of the paper are devoted to some basic aspects of pre-logical and logical thinking in pre-primary, elementary and secondary school education. Subsequently, some typical examples of the absence of the logical thinking in the education of mathe-

matics are mentioned and the consequences which lead to the formalism of the pupils' knowledge. In conclusion, the necessity of the systematic use of logical concepts and the logical thinking development in the whole progress of the education of mathematics is emphasized.

Josef Polák
Šimerova 11
301 00 Plzeň
e-mail: polak@kma.zcu.cz