Lukáš Vízek

Poznámky k odmocňování

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 1, 1–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148593

POZNÁMKY K ODMOCŇOVÁNÍ

Lukáš Vízek[1]

Tento příspěvek je věnován algoritmu odmocňování přirozených čísel druhou odmocninou, který je z matematického hlediska založen na druhé mocnině dvojčlenu (resp. troj a více členu) a který byl v minulosti běžně vyučován na (dnešními slovy) základních školách.[2] V současné době pochopitelně není do výuky standardně zařazován a to díky všeobecnému rozšířední výpočetní techniky nebo používání tabulek. Vyzkoušet si jej však považujeme za podnětné, neboť jím můžeme zajímavě vyzdvihnout geometrickou interpretaci známého vztahu pro $(a + b)^2$ (resp. $(a + b + c)^2$ atd.) a zároveň (pro zpestření hodin matematiky) objevit dovednost, kterou před tím „vládla pouze kalkulačka“.

Smyslem článku pochopitelně není volat po návratu výuky odmocňování na školy. Chceme upozornit na určité úskalí, se kterým se při užívání algoritmu potýkáme, přiblížit jeho výklad v historických početnicích a konečně zmínit některé závěry. Nejprve představme samotný princip algoritmu.

Způsob určení odmocniny

Odmocňování bylo nejprve nacvičováno na čtyřciferných čtvercových číslech, a tedy bylo založeno na tvrzení, $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)b$. Předveďme jej na výpočtu druhé odmocniny čísla 2 116. Poznamenejme nejprve, že počet cifer druhé mocniny přirozeného čísla je roven dvojnásobku počtu jeho cifer nebo o jednu zmenšenému dvojnásobku počtu jeho cifer.

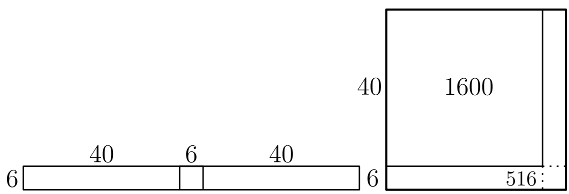
[1]Práce vznikla díky podpoře projektu Specifický vysokoškolský výzkum č. 2101/2017.

[2]Na středních školách bylo odmocňování čísel představování také a propojeno s odmocňováním algebraických výrazů s proměnnými. Viz stručnou poznámku níže (číslo 12) ke středoškolským učebnicím aritmetiky.

Z toho plyne, že $\sqrt{2\,116}$ je dvouciferné číslo (a také způsob, jakým odmocňujeme). Algoritmus můžeme zapsat následujícím způsobem a doplnit jej výstižnou geometrickou interpretací.[3]

Postupujeme tak, že nejprve po dvou zprava (od jednotek) oddělíme cifry odmocněnce. Obdržíme 21|16. Z první skupiny určíme první cifru výsledku. Je rovna odmocnině z nejvyššího čtvercového čísla menšího než (v našem případě) 21, tedy odmocnině ze 16, resp. 4. Číslo 16 od 21 odečteme a k získanému rozdílu, tedy k 5, a sepíšeme druhou (zbývající) skupinu odmocněnce, tj. 16.

$$\begin{array}{r} \sqrt{21|16} = 46 \\ -16 \\ \hline 516 : 8 \\ -48 \\ \hline 36 \\ -36 \\ \hline 0 \end{array}$$



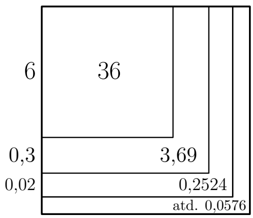
Z geometrického hlediska hledáme délku strany čtverce majícího obsah roven 2 116 (nějakých čtverečných jednotek, atp. dále). Rozklad $2\,116 = 1\,600 + 516$ interpretujeme tak, že do daného čtverce vepisujeme menší čtverec o obsahu 1 600 a o straně 40 (nějakých délkových jednotek, atp. dále). Pás, který je k němu připojen po dvou stranách, má obsah zbývajících 516. Můžeme jej rozvinout do obdélníku s neznámou kratší stranou a s delší stranou rovnou dvojnásobku 40 přičteného ke kratší straně. Pro její stanovení proto dělíme číslo 516 dvojnásobkem 40, resp. stanovíme první cifru podílu 51/8. Je rovna 6, počtu jednotek určované odmocniny. Následně odečteme 48 od 51, resp. provedeme $516 - 480$. Platí zde, že 480 je obsah dvou obdélníků tvořících připojený pás. Od získaného rozdílu 36 odečteme druhou mocninu nalezené druhé cifry odmocniny, tj. 6^2. Uvažujeme tedy $36 - 36$. Tento rozdíl je roven nule, z čehož plyne, že není žádný zbytek při odmocňování čísla 2 116 (jedná se o čtvercové číslo) a dále, že 6 je skutečně počet jednotek odmocniny, 6 je délka kratší strany

[3]Zápis algoritmu uvádíme v rozvinuté podobě. Při větší zběhlosti můžeme některé řádky vynechat tak, jak jsme zvyklí u písemného dělení. Viz níže.

připojeného pásu a odečítaných $6^2 = 36$ je obsah „prostředního čtverečku“ tohoto pásu.

Pro osvojení algoritmu je dobré opakovat postup na jiných čtvercových čtyřciferných číslech a dále jej aplikovat na trojciferná čísla. U nich se setkáváme pouze s drobnou odlišností; první skupinu tvoří jen jedna cifra. Následně již odmocňujeme šesticiferná, pěticiferná a víceciferná čtvercová čísla. Zde v podstatě využíváme vztahy $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$ (resp. „$(a+b+c+d)^2$ a vyšší“). Celkově však pracujeme naprosto analogicky s předchozím. Podobně je tomu při odmocňování čísel, která nejsou čtvercová. Jediným rozdílem je, že algoritmus zde má nekonečně mnoho kroků. Lze jej přirovnat k písemnému dělení se zbytkem se zadanou přesností. Ukažme jej na výpočtu odmocniny z čísla 40. Všimněme si, že po vyznačení desetinné čárky sepisujeme vždy dvě nuly pro další kroky. Zápis uveďme pro zajímavost v jedné ze zkrácených variant.

$\sqrt{40} \doteq 6{,}324$
400 : 123
3100 : 1262
57600 : 12644
7024



Zdůrazněme, že dílčí výsledky jsou vždy menší než hledané číslo. Zde bylo odmocněno s přesností na tři desetinná místa se zbytkem rovným 0,007 024 ($\sqrt{40}$ zaokrouhlená na tisíciny je rovna číslu 6,325). „Dolní aproximace“ skutečné hodnoty odmocniny je dobře patrna také na přiložené ilustraci.

Komplikace algoritmu

V porovnání s běžnými algoritmy písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení však může popsaný způsob odmocňování chybovat. Ilustrujme tuto skutečnost na výpočtu $\sqrt{256}$. Viz zápis níže vpravo. O první cifře odmocniny rozhodneme bez potíží. Je rovna 1. Následně určujeme podíl 15 : 2. Pokud na základě něho „standardně“ stanovíme jako druhou cifru odmocniny 7, nebudeme moci odečíst 49, tj. 7^2, od zbytku rovnému 16. Musíme se proto vrátit a napravit chybu tím, že jako výsledek dělení 15 : 2 „vezmeme“ jen číslo 6. Zbývající kroky již provedeme bez problémů.

Výsledek pochopitelně není překvapující (nejen proto, že $\sqrt{256}$ je „notoricky známá“). Obdobně algoritmus chybuje ještě při odmocňování trojciferných čtvercových čísel 225, 289, 324, 361, 729, 784 a 841 (15^2, 17^2, 18^2, 19^2, 27^2, 28^2 a 29^2) a čtyřciferných čtvercových čísel 1444, 1521 a 2401 (38^2, 39^2 a 49^2). Podívejme se však na problém podrobněji. Tabulkou na následující straně vystihujeme všechna trojciferná a čtyřciferná přirozená čísla (tj. nejen čtvercová), při jejichž odmocňování je třeba uvažovat příslušný podíl „nižší“.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6 \\
\sqrt{2|56} = & 1\cancel{7} \\
\underline{-1} & \\
156 : 2 & \\
\underline{-14} & \\
16 & \\
\underline{-49} & \quad \textit{nelze} \\
156 : 2 & \\
\underline{-12} & \\
36 & \\
\underline{-36} & \\
0 &
\end{array}
$$

Nejmenší takové „problematické“ číslo je 120. Viz první sloupec tabulky. Odmocnit číslo 121 komplikované není. Následující „problematická“ jsou rovna 140, 141, 142 a 143. Jsou čtyři. „Problém se zastaví“ před číslem 144, resp. před 12^2. Komplikace opět nastane u devíti čísel větších rovno 160 a menších než 169, tj. 13^2. Pro další viz nižší řádky prvního sloupce tabulky. Všimněme si, že rozdíl mezi „prvními problematickými“, tedy 120 a 140, 140, 160 atd. je roven 20. Označme jej jako Δ. Viz záhlaví tabulky. Počet čísel v „problematických skupinách“ označme jako p. Viz pravý (krajní) sloupec.

Zajímavé je, že komplikace některá čísla „přeskakuje“. Pozor si musíme dávat při odmocňování přirozených čísel n pro která platí, $(200 \leq n < 400) \vee (680 \leq n < 900) \vee (1\,380 \leq n < 1\,600) \vee$ $\vee (2\,320 \leq n < 2\,500)$. Až na tyto případy je však rozdíl Δ pro jednotlivé sloupce tabulky roven násobkům 20 a počet p roven druhým mocninám přirozených čísel.

20	40	60	80	100	120	140	160	180	Δ \ p
120	440	960	1680	2600	3720	5040	6560	8280	1
11^2	21^2	31^2	41^2	51^2	61^2	71^2	81^2	91^2	
140	480	1020	1760	2700	3840	5180	6720	8460	4
143	483	1023	1763	2703	3843	5183	6723	8463	
12^2	22^2	32^2	42^2	52^2	62^2	72^2	82^2	92^2	
160	520	1080	1840	2800	3960	5320	6880	8640	9
168	528	1088	1848	2808	3968	5328	6888	8648	
13^2	23^2	33^2	43^2	53^2	63^2	73^2	83^2	93^2	
180	560	1140	1920	2900	4080	5460	7040	8820	16
195	575	1155	1935	2945	4095	5475	7055	8835	
14^2	24^2	34^2	44^2	54^2	64^2	74^2	84^2	94^2	
200	600	1200	2000	3000	4200	5600	7200	9000	25
	624	1224	2024	3024	4225	5624	7224	9024	
	25^2	35^2	45^2	55^2	65^2	75^2	85^2	95^2	
	640	1260	2080	3100	4320	5740	7360	9180	36
	675	1295	2115	3135	4355	5775	7395	9215	
	26^2	36^2	46^2	56^2	66^2	76^2	86^2	96^2	
	680	1320	2160	3200	4440	5880	7520	9360	49
		1368	2208	3248	4488	5928	7568	9408	
		37^2	47^2	57^2	67^2	77^2	87^2	97^2	
		1380	2240	3300	4560	6020	7680	9540	64
			2303	3363	4623	6083	7743	9603	
			48^2	58^2	68^2	78^2	88^2	98^2	
			2320	3400	4680	6160	7840	9720	81
				3480	4760	6240	7920	9800	
				59^2	69^2	79^2	89^2	99^2	
				3500	4800	6300	8000	9900	100
399	899	1599	2499	3599	4899	6399	8099	9999	
20^2	30^2	40^2	50^2	60^2	70^2	80^2	90^2	100^2	

Celkově tedy počet „problematických“ trojciferných čísel je roven 542. Jedná se o $60{,}\overline{2}$ % ze všech. Ve stejném poměru tomu je u pěticiferných čísel. To je zřejmé, neboť záleží na první, druhé a třetí cifře odmocněnce (tj. počtu desetitisíců a „set“ odmocněnce). Analogicky s tímto se situace opakuje u vyšších čísel s lichým počtem cifer. Čtyřciferných „problematických“ čísel je 2 668, tedy $29{,}6\overline{4}$ % ze všech. Procentuálně stejně pro vyšší přirozená čísla o sudém počtu cifer.[4]

[4] Z pohledu dějin matematiky má prezentovaný postup odmocňování pů-

Odmocňování v dobových učebnicích

Přiblížení algoritmu a jeho obtíží nyní doplňme o drobný historický exkurz. Uveďme několik komentářů k tomu, jakým způsobem bylo odmocňování druhou odmocninou zpracováno v historických početnicích. Omezujeme se přitom na učebnice aritmetiky, které byly publikovány českými autory od 80. let 19. století do poloviny 20. století. V tomto období došlo k tisku mnoha studijních textů na našem území. V poznámkách si všímáme zejména toho, zdali v nich bylo upozorněno na komplikace algoritmu a zdali v nich byla vystihnuta geometrická podstata výpočtu.[5]

Nejstarší *Početnice pro měšťanské školy*[6] sepsali František Kneidl (1855–1928) a Michael Marhan (1851–1928) v roce 1886. Odmocňování druhou odmocninou vysvětlili ve svazku pro 2. ročník.[7] Algoritmus podrobně popsali, nevěnovali se však geometrickému významu jednotlivých kroků a nezmínili výše přiblížené

vod ve starověké a středověké matematice. Je popsán například v kapitole Bečvářová M., *Středověké početní algoritmy* (In Bečvář J. (ed.), *Matematika ve středověké Evropě*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001, str. 252–254). Zde je představen výpočet „komplikované“ odmocniny čísla 56169 a je označen jako *příklad, který byl pravděpodobně pro nezkušené středověké počtáře obtížný a problematický*. Následně je uvedeno, *algoritmus pro nalezení odmocniny se tedy nedal užívat zcela bezmyšlenkovitě, velmi často docházelo k výše naznačeným „komplikacím“*. Tuto poznámku, resp. ono *často*, upřesňujeme tabulkou všech čísel s „problematickým“ výpočtem odmocniny (a jejich procentuálním „zastoupením“).

[5]V posledních desetiletích 19. století došlo ke značnému rozkvětu publikování původních českých učebnic, které byl podmíněno jednak ustanovením obyčejných obecných a měšťanských škol jako systému elementárního školství, jednak rozvojem vyučování v českém jazyce na středních školách.

Soupis všech dohledaných učebnic aritmetiky pro obyčejné obecné a měšťanské školy uveřejnil autor tohoto článku v kapitole *Početnice* v monografii (Vízek, 2018, str. 45–57 a 103–106). Zde viz informace o autorech jednotlivých knih a odkazy na další literaturu.

[6]Početnice pro obyčejné obecné školy odmocňování neobsahovaly. Uvedené učebnice jsou řazeny chronologicky podle data prvního vydání.

[7]Odmocňování druhou odmocninou bylo učebními osnovami zařazeno do 2. ročníku měšťanské školy, resp. 7. ročníku obyčejné obecné školy (srov. se 7. třídou současné základní školy). Doplňme, že v posledním ročníku chlapecké měšťanské školy bylo vyučováno také odmocňování třetí odmocninou (podle vztahů „vycházejících z $(a+b)^3$“). Pro informace o systému vzdělávací soustavy a učebních osnovách matematiky viz (Vízek, 2018, str. 41–45).

„problémy“. Ty zařadili až do neřešených úloh na procvičení a přitom značně sporadicky (Kneidl, Marhan, 1886, str. 40–45). Prakticky totožně zpracoval látku Mikuláš Benda (1843–1925) ve druhém dílů své *Arithmetiky pro měšťanské školy* (Benda, 1895, str. 18–23). Za průlomové lze považovat učebnice Josefa Horčičky (1870–1938) a Jana Nešpora (1879–1931) vycházející od roku 1899, v nichž je v příslušné části *Dvojmocnění čísel dvojmístných* otištěn obrázek ilustrující platnost vztahu pro $(a+b)^2$. Na geometrickou interpretaci umocňování je následně účelně navázáno při popisu techniky odmocňování (Horčička, Nešpor, 1905, str. 5–10).[8] S velkým důrazem na porozumění ji popsal ve svých *Početnicích pro měšťanské školy* také Josef Úlehla (1852–1933), který její výklad zcela založil na geometrickém významu prováděných operací (Úlehla, 1909, str. 45–47). Obrázky však k textu nepřipojil a společně s J. Horčičkou a J. Nešporem též nepředstavil naznačené komplikace.

Před první světovou válkou vyšly ještě *Početnice pro měšťanské školy* v roce 1913 autorské dvojice Kamil Buzek (1874–1950) a Josef Krůta (1874–1950). Tyto knihy upoutají na první pohled kvalitní typografickou úpravou kapitoly *Druhá mocnina o odmocnina*, která obsahuje řadou obrázků a která svým pojetím zajímavě rozvíjí Úlehlovy postupy. O chybách algoritmu se však také nezmiňuje (Buzek, Krůta, 1921,[9] str. 2–15).

Učebnice aritmetiky pro měšťanské školy sepsané v období první republiky zcela navazují svým pojetím na přechozí svazky z počátku 20. století. Výklad odmocňování je v nich nejen značně provázán s geometrickými interpretacemi. Je také předznamenáním konstruktivistických přístupů k vyučování ve 2. polovině 20. století v současnosti, neboť svým pojetím důsledně vede čtenáře k přemýšlení a objevování principu jednotlivých kroků algoritmu. Komentáře k jeho obtížím lze však v nich dohledat pouze dva. První je obsažen v *Početnici pro pražské školy občanské. Díl II.*

[8] Ve všech početnicích pro měšťanské školy, resp. v učebních osnovách, bylo odmocňování zařazeno za umocňování, jež bylo rovněž založeno na druhé mocnině dvoj a více členu.

[9] Jedná se o třetí vydání učebnice. První z roku 1913 autor neměl k dispozici.

Karla Jona (?–?) a Antonie Maxové (1889–1954). Zde je u výpočtu $\sqrt{361}$ u příslušného kroku (resp. určování „problematického“ podílu) napsáno: *Musím však dáti pozor, aby... mi zbylo dost...* (Jon, Maxová, 1923, str. 17) Druhou poznámku (bezpochyby nejpropracovanější) čteme v *Početnici pro II. třídu měšťaksých škol* od kolektivu autorů vedeného Vladimírem Dubským (?–?). Je uvedena u výpočtu $\sqrt{784}$ a formulována následujícím způsobem. Nejprve je na patřičném místě „správně“ určeno, 4 *ve* 38 *je* 9*krát.*[10] Poté je však konstatováno: *Násobení provedu a hned odčítám od* 384*. Vidíme, že* 9 *je mnoho, ač původní odhad byl správný. Proč? Bude obsaženo jen* 8×*. (Násobení provedu a hned odčítám od* 384*.) Provedu zkoušku! Tento postup si dobře zapamatujte a několikrát si jej hlasitě opakujte! Při stanovení druhého místa ve výsledku dáme pozor na odhadnutou číslici. Je-li vyšší než 5, snadno odhadneme vysoko* (Dubský, 1939, str. 118).

Ve dvou dalších učebních textech jsou ještě vyřešeny celkem tři komplikované příklady. První je obsažen v *Početnici pro druhou třídu měšťanských škol* napsané Josefem Vlčkem (1889–?). Bez vysvětlení ukazuje výpočet $\sqrt{0{,}1444}$, u něhož je třeba „vzít“ jako podíl čísel 54 a 6 „jen“ 8 (Vlček, 1935, str. 81).[11] Zbývající dvě úlohy zahrnul do početnice *Z říše čísel. Díl II.* její autor Karel Rakušan (?–?). Představil zápis odmocnění čísel 2 401 a 127 449 s tím, že na příslušných místech poznamenal: 8 *v* 80 *je* 9 *krát* a 6 *v* 37 *je* 5 *krát*. Žádné zdůvodnění však neformuloval (Rakušan, 1936, str. 59–60).[12]

[10] Výpočet $\sqrt{784}$ doporučujeme laskavému čtenáři provést.

[11] V početnicích, resp. na tehdejších elementárních školách, byla odmocňována také desetinná čísla. V této úloze bylo postupováno podle rovnosti, $\sqrt{0{,}1444} = 0{,}01\sqrt{1444}$. Atp. u ostatních příkladů tohoto typu.

[12] Z historických středoškolských učebnic je patrná „vyšší matematická úroveň“ čtenářů, resp. středoškolských studentů. Například v *Algebře pro střední školy* (1875, Praha: L. Kober, 287 stran) napsané Josefem Smolíkem (1832–1915) je v kapitole *VI. Dobývání kořene druhého stupně* nejprve vysvětleno výše zmíněné odmocňování výrazů a stať *Má-li se z dekadického čísla dobývati kořene* je pojata jako určitý dovětek. Podobně je zpracována také *Arithmetika pro II. třídu středních škol* (1910, Praha: Jednota českých mathematiků, 80 stran) publikovaná Ladislavem Červenkou (1874–1947). Obsahuje pečlivé upozornění na komplikace algoritmu. K příslušnému kroku je zde poznamenáno: *součin odečteme od celého částečného prvního zbytku...*

Závěr

Pokud bychom měli čtenáři doporučit některé učebnice pro inspiraci ke konceptu „zajímavé hodiny“ o odmocňování na základní škole, vyzdvihli bychom prvorepublikové početnice pro měšťanské školy, i když jejich kvality byly v tomto příspěvku spíše jen naznačeny.[13] Rovněž můžeme využít výše otištěnou tabulku „problematických čísel“, jejichž odmocňování je dobré se zprvu vyvarovat.

Za závěr si dovolíme položit otázku, na jaké úrovni dovedl absolvent měšťanské školy odmocňovat v praxi či „všedním životě“? Domníváme se totiž, že v dobových učebnicích nebyl postup odmocňování z metodického hlediska vždy dostatečně propracován. Když pomineme, že zmíněné Kneidlovy, Marhanovy a Bendovy texty předkládají algoritmus značně mechanicky, bez zdůvodnění a geometrického významu, nemůže nás než zarazit, že upozornění na jeho komplikace je v aritmetikách obsaženo jen výjimečně. Navíc lze dohledat i zvláštní poznámky, jako uvedené „8 v 80 je 9 krát“. Pokud bychom jej vytrhli z kontextu, mohli bychom nad jeho pravdivostí vést při a snad učinit závěr, že se mládež na měšťanské škole příliš odmocňovat nenaučila. Tato domněnka by mohla být podpořena i na základě metodik matematiky pro učitelské ústavy (vzdělávacích institucí pro budoucí učitele obecných škol). Tyto svazky buďto odmocňování nerozebírají[14] nebo se k jeho využití staví skepticky. Viz například úryvek z Horčičkovy Nešporovy práce *Methodika počtův*: *Jeť odmocňování výkonem po přednosti rázu toliko formálního; oživuje se jím pouze zájem pro cvičení v počtářství a značně prohlubuje pojem čísel. – V praxi dochází jen skrovného užití a proto jeho materiální účel jest nepatrný.* (Horčička, Nešpor, 1906, str. 16)[15]

Je-li tento součin větší než zbytek, od kterého máme odečítati, znamená to, že jsme volili částečný podíl příliš velký a musíme jej zmenšiti.

[13]Pro odmocňování na střední škole lze pochopitelně využít také středoškolských aritmetik.

[14] Jako příklad lze zmínit práci *Stručná metodika počtů pro učitelské ústavy*, kterou sepsal Karel Domin (1851–1922) a publikoval opakovaně v letech 1908 až 1935.

[15] Lze dohledat také „proti odmocňovací“ článek *Funkce tabulek v matematickém a fysikálním vyučování* uveřejněný v Časopisu pro pěstování matema-

Jaká je odpověď na výše položenou otázku, si autor tohoto článku odhadnout netroufá. Je však přesvědčen o dvou skutečnostech. Za prvé, děti či studenti byli dříve velmi zběhlí v numerických výpočtech. „Absence kalkulaček“ tomu jistě jen pomohla a lze předpokládat, že ovládnout odmocňování nemuselo být pro ně příliš obtížné. Za druhé, Horčičkova Nešporova poznámka, že odmocňování *značně prohlubuje pojem čísel*, je zcela trefná a platná v jakékoliv době. Pokud je tedy na algoritmus odmocňování někdy v současné škole škole čas a chuť, radost z jeho ovládnutí pomůže dalšímu porozumění matematice.

Literatura

[1] Benda, M. (1895). *Arithmetika pro měšťanské školy chlapecké. Stupeň druhý.* Praha: E. Beaufort, 100 stran.

[2] Buzek, K. & Krůta, J. (1921). *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Díl II.* Karlín (Praha): Komenium, 104 stran.

[3] Dubský, V. a kol. (1939). *Početnice pro II. třídu měšťanských škol.* Zlín: Pokusné měšťanské školy, 171 stran.

[4] Horčička, J. & Nešpor, J. (1905). *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí. Díl druhý.* Praha: J. Otto, 90 stran.

[5] Horčička, J. & Nešpor, J. (1906). *Methodika počtův. Návod k vyučování počtům na škole měšťanské a na vyšších stupních školy obecné. Díl II.* Praha: J. Otto, 121 stran.

[6] Jon, K. & Maxová, A. (1923). *Početnice pro pražské školy občanské. Díl II.* Praha: Česká grafická unie, 116 stran.

[7] Kneidl, F. & Marhan, M. (1886). *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Sešit druhý.* Praha: F. Tempský, 108 stran.

[8] Rakušan, K. (1936). *Z říše čísel. Díl II.* Praha: Státní nakladatelství, 146 stran.

---

tiky a fysiky 67(1938, str. 269–277), jehož autor, Václav Skalický (1904–1982), poznamenal již k jednoduššímu umocňování, že *prvou příležitostí k užívání tabulek je mocnění a odmocňování čísel zvláštních. Každému je jistě známo, jakou nechuť mívají žáci* (k tomu, pozn. autora)... *snaha po maximálním didaktickém zisku při minimálním zatížení žákovy paměti a minimální ztrátě času přivede nás k hojnějšímu užívání tabulek mocnin.*

[9] Úlehla, J. (1909). *Početnice pro měšťanské školy chlapecké. Sešit první a druhý.* Praha: C. k. školní knihosklad, 75 stran.

[10] Vízek, L. (2018). *Josef Úlehla (1852–1933).* Hradec Králové: Gaudeamus. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 62.

[11] Vlček, J. (1935). *Početnice pro druhou třídu měšťanských škol.* Praha: Státní nakladatelství, 146 stran.

Abstract

The article is concerned with the square root algorithm, which was previously taught at elementary schools. It presents the process of computing the roots, approaches its complications and mentions the description of the issue in historical arithmetic textbooks.

Lukáš Vízek
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: lukas.vizek@uhk.cz