Učitel matematiky

Eva Nováková

Úloha s výběrem odpovědi v soutěži Matematický klokan - příležitost pro rozvíjení kompetencí žáka?

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 3, 167–183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148586

ÚLOHA S VÝBĚREM ODPOVĚDI V SOUTĚŽI MATEMATICKÝ KLOKAN – PŘÍLEŽITOST PRO ROZVÍJENÍ KOMPETENCÍ[1] ŽÁKA?

Eva Nováková

Úlohy s výběrem odpovědi v matematické soutěži

V našem článku vycházíme z přesvědčení, potvrzovaného školskou praxí i výzkumnými studiemi (Hejný et al., 2013), že řešení uzavřených úloh je v českém školním prostředí málo využíváno. Zejména žáci 1. stupně ZŠ nemají s tímto typem úloh potřebné zkušenosti. K určité nedůvěře při užití uvedeného typu úloh vede nebezpečí „náhodného uhádnutí“. Například je-li v nabídce pěti odpovědí jedna správná, je pravděpodobnost jejího uhádnutí 20 %. Dalším argumentem je názor, že odpověď obvykle neumožňuje odhalit aktivní znalost testovaného jevu: žák by správnou odpověď nevyprodukoval, ale v nabídce odpovědí ji rozezná.

Hejný et al. (2013) analyzovali úspěšnost českých žáků 1. stupně ZŠ při řešení jednotlivých úloh ve výzkumu TIMSS v roce 2011. Mimo jiné uvádí, že čeští žáci byli v porovnání se zahraničím výrazně neúspěšní při řešení úlohy, označované v anglosaských zemích „number sentence“. Jde o jednoduchou rovnici řešenou v oboru přirozených čísel, v níž je neznámá vyjádřena jinak než písmenem x:

[1] Máme na mysli nejen klíčové kompetence taxativně vymezené v aktuálním kurikulu, ale budeme jimi rozumět „souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti“ (Belz & Siegrist, 2001), tj. ve výuce matematiky obecněji pojaté rozvíjení matematického, logického, abstraktního, formálního myšlení a osobnostního potenciálu žáků.

- *Které číslo patří do čtverečku, aby zápis byl pravdivý?*
  $3 + 8 = \square + 6$
  A) 17 B) 11 C) 7 D) 5

Z analýzy vyplývá, že i „jednoduchá“ úloha s výběrem odpovědi, někdy hanlivě označovaná jako „zaškrtávačka“, umožňuje ověření porozumění látce, a ne jen kontrolu zapamatovaných faktů. Promyšlená volba nabídnutých nesprávných odpovědí (distraktorů) navíc umožňuje odhadnout příčiny žákova neúspěchu při řešení úlohy. V tomto případě např. častá volba distraktoru *B)* českými žáky ukazuje na chápání znaku „rovná se“ jako pokynu k výpočtu směrem doprava bez ohledu na výraz na pravé straně (znak „rovná se“ reprezentuje jednosměrný operátor, který vytváří výstup na pravé straně ze vstupů na levé straně)[2]. Z nízké úspěšnosti řešení této a dalších uzavřených úloh autoři rovněž vyvozují, že testy jako forma ověřování znalostí žáků jsou u nás neprávem podceňovány.

V testech jednotlivých kategorií soutěže Matematický klokan[3] jsou uzavřené úlohy s vícenásobnou volbou (multiple-choice) rovněž uplatněny. Úlohy pro jednotlivé kategorie soutěže se vybírají na každoročním setkání zástupců pořadatelských zemí. Účastníci setkání mají k dispozici množinu úloh nabídnutých jednotlivými účastnickými zeměmi. Výběr nejvhodnějších úloh je velmi náročnou činností. Úkolem účastníků je rovněž hledání vhodného pořadí úloh v testu související s odhadováním jejich obtížnosti, distribuce správných odpovědí a stanovení distraktorů, ale také zajištění jazykově přesné formulace úloh v jednotlivých mateřských jazycích. Úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou zcela unikátní v tom, že prakticky stejné úlohy řeší ve stejném čase několik milionů účastníků soutěže v několika desítkách zemí celého světa.

[2]Podrobnější analýzu uplatnění aritmetických postupů v algebraických úlohách používaných nadanými dětmi na 1. stupni ZŠ uvádí Budínová (2016).

[3]Soutěž je za více než 20 let učitelům matematiky dostatečně známá, nepovažujeme za potřebné na tomto místě její organizační stránku blíže charakterizovat, aktuální informace lze najít na www.matematickyklokan.net. Z dosavadních zkušeností vyplývá, že učitelé i žáci k ní zaujímají nejednoznačný postoj od velmi příznivého přijímání až ke kritickému posuzování různých aspektů soutěže.

Řešiteli je nabídnuto pět odpovědí, z nichž je vždy správná pouze jedna. Pokus o analýzu distraktorů při řešení uzavřených nestandardních úloh, které žáci označili, odhalování některých postupů řešení úloh, které žáci použili a chyb, kterých se dopustili, může podle našeho názoru inspirovat učitele k další práci s učebními úlohami při jejich dlouhodobějším edukačním působení. Současně je příležitostí ke konfrontaci řešitelských postupů účastníka soutěže s očekáváním učitelů, která může korigovat někdy zjednodušené soudy učitele o schopnostech, vědomostech a dovednostech žáků. Úlohy jsou ovšem obvykle obtížnější, náročnější na matematické znalosti žáků i jejich abstraktní matematické myšlení. Řešitel, který nechce pouze „hádat“, ale skutečně úlohu vyřešit a teprve následně své řešení konfrontovat s nabídkou odpovědí, se obvykle neobejde bez pomocných výpočtů, poznámek, nákresů, jejichž prostřednictvím se pokouší získat vhled do úlohy a jejího řešení. Tyto materiály považujeme pro učitele za velmi cenné. Lze je využít k rekonstrukci žákovských postupů a k přesnějšímu pochopení toho, co je z pouhého „vyplnění“ testu patrné třeba jen v náznaku nebo vůbec ne.

V uplynulých letech jsme analyzovali soutěžní úlohy a jejich řešení žáky 1. stupně ZŠ z různých pohledů. Dílčí poznatky z kvantitativního i kvalitativního výzkumu jsme publikovali v několika statích (Nováková, 2015; Nováková, 2016; Nováková 2017). V tomto článku jsme si položili otázku, zda může řešení soutěžních úloh přispívat k postupnému rozvíjení matematického, tj. abstraktního, formálního myšlení žáků a otevírání prostoru pro budování jejich porozumění realitě okolního světa skrze symbolický jazyk matematiky. Předpokladem je přitom širší využití soutěžních úloh ve výuce, přesahující horizont jednorázové matematické soutěže – například když učitel vhodně zařazuje soutěžní úlohy do výuky, společně řeší se žáky vybrané úlohy, využívá možnosti řešení soutěžních úloh při systematické individuální práci jako součást vzdělávání a rozvoje osobnosti nadaných.

Úspěšné řešení úloh z minulých ročníků uvedených na webové stránce soutěže přímo ve výuce nebo v samostatné domácí práci či zájmovém kroužku tak může být považováno za jeden z projevů směřujících k odhalení nebo potvrzení matematického nadání. Z našich zkušeností však vyplývá, že i mezi žáky klasifikovanými nižším stupněm z matematiky bývají velmi úspěšní řešitelé, kteří mají pravděpodobně podstatně vyšší potenciál, jejž ve školní výuce matematiky neprojevili nebo neměli příležitost projevit (například proto, že škola hodnotí jiné ukazatele úspěšnosti?).

Zaměříme se především na slovní úlohy z kategorie Klokánek, určené pro žáky 4. a 5. ročníku. Naše komentáře vycházejí z analýzy řešení jednotlivých úloh nad autentickými žákovskými produkty s učiteli i žáky, provedené po odevzdání soutěžního testu, a reflektující reálné možnosti a prostředky žáka na konci 1. stupně ZŠ.

Pokusíme se také zasadit řešení úloh do aktuálního rámce dosahování klíčových kompetencí a očekávaných výstupů RVP ZV, vzhledem k povaze učebních úloh kompetence k řešení problémů. Domníváme se, že úspěšné řešení všech uvedených úloh předpokládá, že žák:

- *dovede s porozuměním číst text úlohy, rozliší informace důležité pro řešení úlohy,*
- *rozpozná a pochopí podstatu problému, promyslí a naplánuje způsob řešení problému a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností,*
- *využívá k řešení problému osvojené vědomosti a dovednosti a volí vhodné způsoby řešení,*
- *ověřuje správnost řešení problémů, kriticky myslí, činí podložená rozhodnutí.*

Ukázky úloh a analýza jejich řešení

Úloha 1. U lyžařského vleku čekalo v řadě 10 lyžařů. Před Tomášem jich stálo o 3 méně než za ním. Kolikátý v řadě byl Tomáš?
A) první B) třetí C) čtvrtý D) šestý E) sedmý

K určení správného řešení (Tomáš stál v řadě jako čtvrtý, před ním čekali tři, za ním šest lyžařů), je možné využít grafické znázornění, resp. grafické řešení. Postupně lze vyznačovat možné pořadí při dodržení podmínky „… před ním o 3 méně než za ním“, tzn.

že za ním stálo o 3 více lyžařů než před ním. V řadě 1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pouze číslo 4 splňuje podmínku zadání.

Z ukázek autentických žákovských grafických záznamů je zřejmé, že ke zpracování informací v zadání a z něj vyplývajícího grafického řešení není pro žáka důležitá orientace řady lyžařů, tedy vodorovný nebo svislý směr znázornění „fronty na vlek".

Na obrázku vlevo je nejblíže vleku první zleva. Písmeno C vyjadřuje pozici Tomáše. Stojí 4. v řadě, což je správná odpověď C. Na prostředním obrázku je nejblíže vleku postava vpravo (s vyznačením množiny lyžařů stojících za Tomášem), na obrázku vpravo je nejblíže vleku kroužek nahoře. Tomáš je znázorněn jako tmavá tečka.

Obr. 1: Grafické znázornění podmínek úlohy 1

Uzavřená úloha umožňuje „vyzkoušet" jednotlivá nabídnutá řešení a postupně vyloučit ta, která nesplňují podmínku zadání: kdyby stál například první, bylo by za ním 9 osob, před ním žádná, kdyby stál třetí, byli by před ním 2, za ním 7, atd. – v těchto případech není splněna podmínka zadání. Nabídku výsledků je v tomto případě možné chápat jako určitou pomoc při řešení úlohy.

Řešením úlohy žák prokáže, že

- dovede transformovat sdělení v přirozeném jazyce do symbolického jazyka,
- při řešení úlohy umí graficky znázornit vztahy mezi danými a hledanými údaji,
- při řešení využívá polohové vztahy (před, za) v oboru přirozených čísel.

Úloha 2. Sněhurka rozdělila trpaslíkům 77 hřibů. Napřed dostal nejmenší trpaslík, každý další dostal o jeden hřib více než předchozí. Kolik dostal největší trpaslík?
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Řešení slovní úlohy s pohádkovým námětem, s málo reálným, ale pro žáky „realistickým" sémantickým pozadím předpokládá, že řešitel ví, že trpaslíků v pohádce bylo 7. V zadání se explicitně uvádí, že hřiby rozdělila trpaslíkům, což poněkud odporuje čtenářské zkušenosti žáků – Sněhurka se v pohádce s trpaslíky dělila. Pokusme se sledovat tři různé přístupy *možné* úvahy žáků.

a) „Zkusím vyzkoušet jednotlivá nabídnutá řešení. A), B), C), E) jsou zřejmě nesprávná: v případě A) by Sněhurka rozdělila pouze 35 hřibů, v případě B) pouze 49 hřibů, v případě C) pouze 63, v případě E) 91. Jediné správné řešení je D): $14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 77$". Nabídka výsledků se opět využije jako pomoc při řešení úlohy.

b) „Kdyby dostali všichni trpaslíci stejný počet hřibů, bylo by to $77 : 7 = 11$. Tolik by dostal prostřední trpaslík. Další by dostali 10 a 12, 9 a 13, 8 a 14. Nejmenší by dostal 8 hřibů, největší 14 hřibů".
Je zřejmé, že uvedená úvaha k řešení nevyužije nabídku odpovědí, vypočtený výsledek řešitel s nabídkou pouze konfrontuje k potvrzení správnosti řešení. Pro učitele to může být výzva, aby úlohu zadal jako otevřenou s požadavkem určit počet hřibů pro *každého* trpaslíka.

c) Pokud si žák (obvykle až na 2. stupni ZŠ) osvojil proceduru řešení lineárních rovnic, nabízí se mu algebraický způsob:
$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6) = 77$, odtud $x = 8$ (dostal nejmenší, proto největší dostal 14 hřibů). Neznámá vyjadřuje, ve shodě s podmínkami úlohy, počet hřibů, které dostal *nejmenší* trpaslík.
Pokud bychom neznámou x vyjádřili počet hřibů pro největšího trpaslíka:
$x + (x - 1) + (x - 2) + (x - 3) + (x - 4) + (x - 5) + (x - 6) = 77$, odtud $x = 14$.

Řešením úlohy žák prokáže, že

- umí vyjádřit situaci „ze životní praxe" pomocí matematického aparátu/matematizovat reálnou situaci,
- dovede realizovat jednoduchý experiment, experiment zaměřit k získání řešení úlohy,
- dovede k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (početní operace, řešení rovnice),
- dovede ověřit správnost řešení problému (porovnat své řešení s nabídkou odpovědí).

V běžné výuce matematiky na základní škole lze využít úlohy o jednu až dvě kategorie nižší, než pro kterou je určena, např. úlohy z Klokánka na 2. stupni ZŠ. Obtížnost úlohy může modifikovat učitel sám například změnou zadaných čísel, doplněním nebo vynecháním některých podmínek nebo změnou celkového kontextu úlohy. Je však možné nahlédnout i do zadání úloh pro jiné soutěžní kategorie a přímo zde najít vhodnou úlohu se stejným nebo obdobným námětem. Uvedeme alespoň jeden příklad.

Úloha 3 (kategorie Klokánek). Králík Ušák má nejraději zelí a mrkev. Každý den sní buď 1 hlávku zelí a 4 mrkve, nebo jen 9 mrkví, nebo jen 2 hlávky zelí. Během jednoho týdne Ušák snědl 30 mrkví. Kolik hlávek zelí snědl v tomto týdnu?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Typická „klokanská" úloha vyžaduje úsudek, opírající se o respektování podmínek úlohy, vyjádřené ve druhé a třetí větě zadání. Vyjádření „buď – nebo" lze vnímat ve významu vylučovacím (pak ovšem úloha nemá řešení) nebo nevylučovacím. Smysluplné řešení předpokládá, že v různých dnech měl králík různé chutě případně dostal různé krmivo. Nabídka odpovědí bude zřejmě využita až pro kontrolu správnosti vlastního řešení/výpočtu. Uveďme opět ukázku možného žákovského myšlenkového experimentu:

Týden má 7 dní. Z první podmínky: kdyby jedl denně *1 hlávku zelí + 4 mrkve*, snědl by za
1 den: 1 zelí (z) + 4 mrkve (m)
2 dny: 2 z + 8 m

3 dny: 3 z + 12 m
4 dny: 4 z + 16 m
5 dní: 5 z + 20 m
6 dní: 6 z + 24 m
7 dní: 7 z + 28 m (podmínka „během jednoho týdne snědl 30 mrkví“ není v žádném případě splněna).

Ze druhé podmínky vyplývá: kdyby jedl denně 9 mrkví, snědl by za
1 den: 9 m
2 dny: $2 \cdot 9$ *m =18 m*
3 dny: $3 \cdot 9$ m = 27 m
Více než 3 dny nemohl sníst po 9 mrkvích, protože za týden jich snědl pouze 30, ani v tomto případě není podmínka splněna.

Ze třetí podmínky vyplývá: kdyby jedl denně *2 hlávky zelí*, snědl by za
1 den: 2 z
2 dny: $2 \cdot 2 = 4$ *z*
3 dny: $3 \cdot 2 = 6$ z, atd.

Porovnáním získáme řešení, které všem podmínkám vyhovuje: 3 dny jedl po 1 hlávce zelí a 4 mrkve (celkem 3 hlávky zelí a 12 mrkví), 2 dny pouze mrkev ($2 \cdot 9 = 18$), 2 dny pouze zelí ($2 \cdot 2 = 4$). Celkem za 7 dní *7 hlávek zelí a 30 mrkví*

Zařazením úloh 3, 4 a 5 se stejným námětem jsme se pokusili dokumentovat skutečnost, která je pro soutěž Matematický klokan charakteristická: v různých soutěžních kategoriích jsou zařazovány obdobné úlohy (nejen slovní) tak, aby ve vyšších kategoriích byla vždy úloha obtížnější. Současně se na setkáních autorů úloh pro jednotnou mezinárodní verzi požaduje, aby byly úlohy „vtipné“, což ovšem může vést k určitému rozporu s realitou (králíkova pravidelná konzumace mrkve a zelí).

Zatímco předchozí úloha byla zařazena v roce 2014 do kategorie Klokánek v soutěžním testu jako 17. v pořadí (tj. s možným ziskem 5 bodů), byly následující úlohy zadány v témže roce v kategoriích Cvrček (za 5 bodů) a v kategorii Benjamín (rovněž za 5 bodů).

Úloha 4 (kategorie Cvrček). Králík Dupík jí zelí a mrkev. Každý den sní buď 10 mrkví nebo 2 hlávky zelí. Minulý týden snědl 6 hlávek zelí. Kolik snědl za týden mrkví?
A) 20 B) 30 C) 34 D) 40 E) 50

Úloha 5 (kategorie Benjamín). Králík Vasja má nejraději zelí a mrkev. Za jeden den sní buď 1 hlávku zelí a 4 mrkve, nebo 9 mrkví, nebo 2 hlávky zelí. Některé dny však jí pouze trávu. Za posledních 10 dní snědl Vasja celkem 30 mrkví a 9 hlávek zelí. Kolik z těchto dní jedl pouze trávu?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Při porovnání s původní *úlohou* 3 se změnily některé podmínky. V úloze z kategorie Cvrček měl králík jen dvě možnosti: denně snědl buď pouze 10 mrkví nebo pouze 2 hlávky zelí; víme, že za týden snědl celkem 6 hlávek zelí. Úloha je méně obtížná než původní. V úloze z Benjamína jsou dvě změny oproti původní úloze: místo týdne je v zadání 10 dní a přibyla další podmínka – některé dny jedl pouze trávu. Tím se zvýšila její obtížnost. Řešení obou úloh ponecháme na čtenářích samých nebo jejich žácích. Porovnáním zadání tří uvedených úloh chceme naznačit, že tvořivý učitel může sám podle podmínek ve třídě a svého didaktického záměru vhodně úlohu obměnit tak, aby optimálně využil potenciál žáků.

Řešením úloh 3, 4 a 5 žák prokáže, že

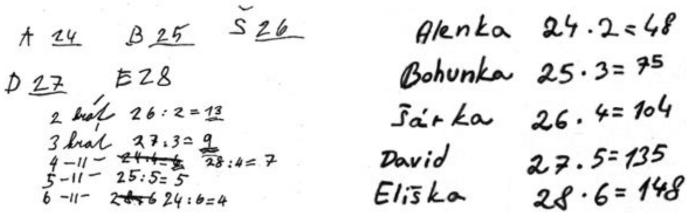
- dovede samostatně řešit problém; volí vhodné způsoby řešení,
- užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy,
- dovede realizovat jednoduchý experiment; experiment zaměřit k získání řešení úlohy.

Úloha 6. Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více

a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?
A) Alenka B) Bohunka C) Šárka D) David E) Eliška

Úloha realistická, týkající se konkrétní události, která by se mohla stát v běžném životě. Řešení vyžaduje jazykové porozumění a přesah do životní zkušenosti. Do soutěžního testu kategorie Klokánek v roce 2015 byla zařazena jako poslední pětibodová úloha ze skupiny nejobtížnějších. Nabídka řešení je zřejmá – jména všech účastníků pečení. V našem výzkumu na vzorku 680 žáků (Nováková, 2016) vykázala nejnižší počet správných řešení, pouze 6,9 %, což bylo nejméně ze všech úloh v testu; 27,5 % respondentů úlohu vůbec neřešilo, rovněž nejvíce ze všech úloh v testu. Řešení slovní úlohy klade nároky na pozorné čtení poněkud komplikovaného zadání, pozorné vnímání jednotlivých podmínek a úsudek, založený na inverzním vztahu „n krát více“, „n krát méně“. Jak uvádějí Blažková & Vaňurová (2013, s. 39), „děti mají problémy s přečtením celého textu, s porozuměním textu, se zvládnutím délky textu. Často nejsou schopny odpovědět na otázku úlohy v souvislosti se čteným zadáním a často odpovídají na otázku jinou, která nebyla v textu uvedena a třeba ani nesouvisí s řešením úlohy“. To se zřetelně projevilo v řešení uvedené úlohy, tady nabídka odpovědí nijak nepomohla. Úloha může být bez zvýšení její obtížnosti formulována jako otevřená.

Pokus o možnou interpretaci žákova úsudku: „Úlohu přeformuluji takto: v sobotu upekl jeden z kamarádů dvakrát méně než na konci víkendu, jiný třikrát méně, další čtyřikrát méně, další pětkrát méně a poslední šestkrát méně. Hledám, která čísla v zadání jsou dělitelná dvěma (24, 26, 28), třemi (24, 27), čtyřmi (24, 28), pěti (25) a šesti (24). V sobotu upekla Alenka 4 sušenky (v neděli jich měla šestkrát více, tj. 24), Bohunka upekla v sobotu 5 (v neděli měla pětkrát více, tj. 25). Ještě musím zohlednit skutečnost, že některá čísla jsou zároveň beze zbytku dělitelná více děliteli. Největší počet dělitelů má číslo 24, ale šesti je dělitelné toto jediné. Proto měla v sobotu Alenka $24 : 6 = 4$, Bohunka $25 : 5 = 5$, Šárka $26 : 2 = 13$, David $27 : 3 = 9$, Eliška $28 : 4 = 7$ sušenek. Nejvíce sušenek upekla v sobotu Šárka.“



Obr. 2: Vlevo záznam směřující ke správnému řešení (včetně opravy chyb), vpravo řešení nesprávné

Zajímavá je analýza distraktorů, které řešitelé v soutěžním testu označili. Významně největší počet nesprávných odpovědí je řešení E (Eliška), 55, 6 % všech řešení. Uvedenou skutečnost interpretujeme takto: v zadání je uvedeno, že Eliška napekla nejvíc za celý víkend, odtud zřejmě úvaha, že napekla nejvíc také v sobotu. Další podmínky už řešitelé nezohlednili. Výběr zbývajících distraktorů (méně než 7 % žáků) podle našeho názoru spíše vypovídá o pokusech uhádnout správné řešení, aniž by žák úlohu skutečně řešil.

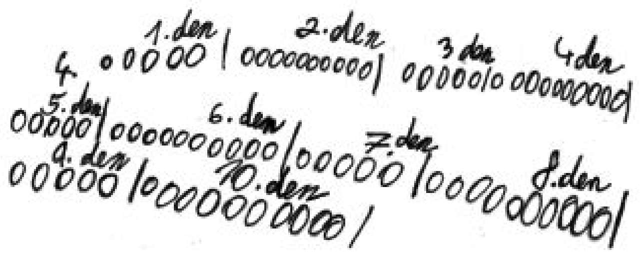
Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- transformovat sdělení v přirozeném jazyce do symbolického jazyka,
- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (určit počet dělitelů přirozeného čísla),
- přehledně zaznamenat postup řešení úlohy.

Úloha 7. Pan Zahradník má 10 slepic. 5 slepic snáší vejce každý den a dalších 5 slepic snáší vejce každý druhý den. Kolik vajec snesou všechny slepice za 10 dní?
A) 75 B) 60 C) 50 D) 25 E) 10

Správné řešení složené slovní úlohy předpokládá orientaci v zadání a porozumění jednotlivým zde obsaženým informacím: některá slepice snáší vejce každý den (tj. za 10 dní snese 10 vajec), některá snáší každý druhý den (tj. za 10 dní snese 5 vajec). Ty, která snášejí denně, snesou za 10 dní $5 \cdot 10 = 50$, ty, které snášejí každý druhý den, snesou $5 \cdot 5 = 25$. Celkem snesou slepice 50 vajec + 25 vajec = 75 vajec.

Řešení může být podporováno různou podobou grafického zpracování. Na následující ukázce se jedná o grafické řešení – počet snesených vajec určil žák ze znázornění:



Obr. 3: Grafické řešení úlohy 7

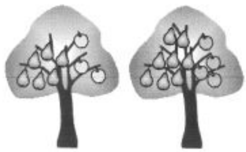
Vlastní výpočet není obtížný, vyžaduje pouze znalost sčítání a násobení v oboru do 100. Obtížnost úlohy lze zvýšit zadáním bez nabídky odpovědí transformací na otevřenou úlohu do podoby na 1. stupni ZŠ obvyklejší. Kontextová stránka úlohy poskytuje prostor pro uplatnění mezipředmětových vztahů s přírodovědou a vlastivědou (oblast RVP „Člověk a jeho svět") v různých souvislostech, například posuzovat reálnost úlohové situace (snůška vajec u slepic chovaných v přirozeném venkovském prostředí v různých obdobích roku, „výroba" vajec ve velkochovech, cena vajec v obchodech atd.). Úloha byla v soutěžním testu v roce 2015 řešena s úspěšností 41,8 %.

Z nesprávných řešení se vyskytovalo nejčastěji C): 50 vajec, kterou označilo 19,3 % respondentů. K výsledku zřejmě dospěli vynásobením dvou číselných údajů v zadání úlohy (10 slepic · 5 vajec denně). To platí rovněž pro další nejpočetnější nesprávnou odpověď D): 25 vajec. Za příčinu těchto nesprávných odpovědí považujeme povrchní řešitelské strategie, které se soustřeďují spíše na čísla v úloze než na pečlivou analýzu textu.

Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- při řešení úlohy graficky znázornit vztahy mezi danými a hledanými údaji,
- uplatnit při řešení problému logické, matematické a empirické postupy.

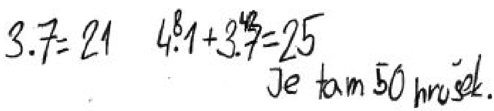
Úloha 8. V kouzelné zahradě rostou kouzelné stromy. Na každém stromě je buď 6 hrušek a 3 jablka nebo 8 hrušek a 4 jablka. Na stromech v zahradě je celkem 25 jablek. Kolik hrušek je na těchto stromech?



(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 56

Opět typická „klokanská“ úloha vyžaduje úsudek, opírající se o respektování podmínek úlohy, vyjádřené ve druhé větě zadání („na každém stromě“; „buď – nebo“). Porozumění zadání napomáhá obrázek, na kterém jsou představeny oba druhy stromů.

Řešení vychází z intuitivního porozumění vztahu přímé úměrnosti. Na každém kouzelném stromě je vždy dvakrát více hrušek než jablek, musí být tedy dvakrát více hrušek na všech stromech v celé zahradě, tj. 50. „Je tam 50 hrušek, protože jablek je dvakrát méně.“



Obr. 4: Písemný záznam žákovského řešení úlohy 8

Úlohu lze upravit převedením na úlohu otevřenou nebo vhodně doplnit otázkou „Kolik je v zahradě stromů?“ Tím se významně zvýší obtížnost úlohy.

Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- rozlišit rutinní úlohu a reálný problém,
- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (přímá úměrnost),
- uplatnit při řešení problému logické, matematické a empirické postupy.

Shrnutí a závěr

Prezentované úlohy a malé zamyšlení nad různými souvislostmi jejich řešení žákem základní školy nás vedou k odpovědi na otázku položenou v nadpisu článku. Jsme přesvědčeni, že pravidelné zařazování nestandardních úloh, třeba ze soutěže Matematický klokan, do výuky matematiky již na primárním stupni vzdělávání lze oprávněně považovat za vhodný instrument k rozvíjení osobnosti žáků. Ve sbornících jednotlivých ročníků soutěže je možné najít stovky různých úloh. Při sestavování mezinárodní verze soutěžních testů se úlohy tradičně zařazují do tří oblastí: aritmetika, teorie čísel, algebra; geometrie; úlohy „logické". Úlohy jsou zadány buď v matematickém jazyce, s převažujícím uplatněním matematických termínů a symbolů, nebo jako úlohy kontextové (slovní), které jsou zejména v kategoriích určených pro 1. stupeň ZŠ velmi často zastoupeny a které jsme v našem textu uvedli.

Úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou poněkud jiné, než úlohy, se kterými se obvykle setkávají žáci v učebnicích matematiky. Uvedenou stránku zdůrazňovali učitelé v našem výzkumu (Nováková, 2016, s. 66) při výčtu faktorů, které ovlivňují vztah žáků k soutěži. Úlohy jsou pro žáky neobvyklé také způsobem prezentace (často ilustrací, obrazem, schématem nebo jiným způsobem grafické reprezentace). Poskytují žákům prostor nejen k uplatnění vlastních matematických znalostí a rutinních výpočtů, ale jsou pro žáky zajímavé svým neobvyklým obsahem či námětem. Řeší (matematický) problém, hledají a objevují způsob, metodu řešení, protože jejich dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje. Postup řešení úlohy obvykle není znám, řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem. Takové úlohy jsou obvykle považovány za vhodné pro práci s nadanými, resp. mimořádně nadanými žáky. Smyslem soutěže je ovšem získávat pro matematiku také žáky s průměrnými výukovými výsledky. Těmto žákům může účast v soutěži pomoci zvýšit sebevědomí, přesvědčit je o jejich dosud nenaplněných možnostech a také jim dokázat prostřednictvím úspěšného řešení soutěžních úloh, že matematika nemusí být vždy nudný, nezáživný a obávaný školní předmět.

Podle názoru většiny učitelů (Rendl & Vondrová et al. 2013, s. 51) jsou „slovní úlohy neoblíbené a problematické učivo a to od 1. až po 5. ročník. Problémy žáků, které učitelé v souvislosti se slovními úlohami zmínili, jsou především chybějící logické myšlení, nedostatečná čtenářská gramotnost – porozumění textu i porozumění některým slovům, nesprávné provedení zápisu úlohy nebo jejího znázornění a chybějící nebo špatná formulace odpovědi“. Rozmanitost „klokanských“ úloh snad může poněkud zpochybnit další argument učitelů, že „neochota přemýšlet může být způsobena i tím, že úlohy, které mají žáci řešit, jsou stejného typu, takže nemají pocit, že je nutné se textem vůbec zabývat“[4].

Uvědomujeme si, že naše vymezení žákovských kompetencí potřebných k řešení, které uvádíme (a které se někdy opakuje), je značně subjektivní, v žádném případě je nelze chápat jako vyčerpávající. Uvádíme je pouze jako námět k zamyšlení, případně jako podnět k diskusi. Učitelé na základě vlastních zkušeností jistě dokážou přesněji a výstižněji popsat, které znalosti a schopnosti řešitel úloh uplatnil. Předpokladem využití uvedených stránek řešení úloh jsou ovšem osvojené profesní kompetence učitele, pro kterého není smyslem soutěže pouhé povinné, formální zapojení žáků jeho třídy.

Přestože jsme se v textu zaměřili na kompetence k řešení problémů, je zřejmé, že se při řešení soutěžních úloh nabízejí i dopady do oblasti rozvíjení dalších klíčových kompetencí. Uvedeme alespoň některé:

- *kompetence k učení*, například když žák operuje s obecně

[4] Rendl & Vondrová et al. 2013, s. 53.

užívanými termíny, znaky a symboly, uvádí věci do souvislostí, propojuje do širších celků poznatky z různých vzdělávacích oblastí a na základě toho si vytváří komplexnější pohled na matematické, přírodní, společenské a kulturní jevy,
- *kompetence komunikativní*, například tím, že žák v procesu řešení formuluje a vyjadřuje své myšlenky a názory v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a kultivovaně; prokazuje, že rozumí různým typům textů a záznamů, přemýšlí o nich, reaguje na ně a tvořivě je využívá ke svému rozvoji; tvoří podobné úlohy,
- *kompetence sociální a personální*, kdy při společném řešení úloh žák přispívá k diskusi v malé skupině i k debatě celé třídy, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, respektuje různá hlediska.

Literatura

[1] Belz, H. & Siegrist, M. (2001). *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení: východiska, metody, cvičení a hry*. Praha: Portál.

[2] Blažková, R. & Vaňurová, M. (2013). Komunikační bariéry žáků při řešení slovních úloh. In B. Tomková & M. Mokriš (Eds.), *Matematika v primárnej škole: rôzne cesty, rovnaké ciele*, (38–43). Prešov: Prešovská univerzita.

[3] Budínová, I. (2016). Aritmetické postupy v algebraických úlohách používané nadanými dětmi na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání*, 5 (2), 11–42.

[4] Hejný, M. et al. (2013). *Čtenářské, matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění šetření TIMSS a PIRLS 2011*. Praha: ČŠI.

[5] Nováková, E. (2015). K dovednosti žáků primární školy predikovat svou úspěšnost při řešení nestandardních úloh. *Magister: Reflexe primárního a preprimárního vzdělávání ve výzkumu*, 3 (2), 33–51.

[6] Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky základní školy*. Brno: Masarykova univerzita.

[7] Nováková, E. (2017). Řešení nestandardních úloh v matematických soutěžích – jedna z cest ke změně vztahu žáků k matematice. In K. Bártek & R. Dofková et al. *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního vývoje* (128–153). Olomouc: Univerzita Palackého.

[8] Rendl, M. & Vondrová, N. et al. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova.

Abstract

The article reflects possibilities offered by solving problems of the Mathematical Kangaroo competition for developing competences of primary school pupils. Problems can be used in regular mathematical lessons including work with gifted pupils. Selected word problems from several years of the Ecolier category (4. and 5. grade) are accompanied by examples of pupils' solutions and by methodical comments.

Eva Nováková
Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU
Poříčí 31
602 00 Brno
e-mail: novakova@ped.muni.cz