

Učitel matematiky

Jana Cachová; Alžběta Bernardová; Sylva Stúpalová; Michaela Vrzalová
Inspirace didaktickými materiály Mathe 2000 v primární škole

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 3, 138–149

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148584>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2018

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

INSPIRACE DIDAKTICKÝMI MATERIÁLY MATHE 2000 V PRIMÁRNÍ ŠKOLE

JANA CACHOVÁ, ALŽBĚTA BERNARDOVÁ,
SYLVA STÚPALOVÁ, MICHAELA VRZALOVÁ¹

Otázky související se zlepšováním současného stavu matematického vzdělávání v našich školách hledáním vhodného vyučovacího přístupu, který by podpořil nejen motivaci žáků, ale také dosáhl zlepšení úrovně jejich schopností a dovedností, jsou v naší společnosti stále aktuální. První stupeň základní školy je z tohoto pohledu velmi důležitý, tady žáci získávají první zkušenosti s matematikou a řešením úloh. Právě primární škola žákům otevírá cestu k matematice a často předurčuje, jak se bude žákův vztah k matematice a jejímu vyučování utvářet, zda budou žáci i později v matematice úspěšní či nikoli, zda budou mít od počátku vybudovány pevné základy, o které se budou moci opírat a dále na nich stavět.

V tomto článku chceme našim učitelům primárního vzdělávání připomenout ucelenou a dobře propracovanou řadu německých učebnic matematiky a doprovodných didaktických materiálů programu *Mathe 2000* (hlavní autoři E. Ch. Wittmann, G. N. Müller, učebnice v této řadě vycházejí od roku 1987 po současnost). Ačkoli mají učebnice, pracovní sešity a další doplňující pracovní materiály *Mathe 2000* v sousedním Německu třicetiletou tradici, u nás jsou jako možný zdroj námětů k další práci se žáky učители využívány spíše ojediněle. (Na vině této skutečnosti může být zřejmě i jazyková bariéra.) Příklady krátkých ilustrací vybraných výukových prostředí z této řady učebnic chceme upozornit učitele, vybavené německým jazykem, na možnost čerpat z tohoto

¹Tento článek vznikl za podpory projektu specifického výzkumu č. 2101/2017 Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové.

podnětného a praxí ověřeného zdroje inspiraci a vyhledávat zde vhodné náměty k práci ve výuce. Pro ostatní, kteří němčinu neovládají, poskytnout alespoň malou konkrétní inspiraci do výuky. Zároveň chceme těmito třemi malými ukázkami přiblížit celkový charakter pojetí těchto učebnic, opírajících se o práci s vhodnými modely.

Náš RVP ZV (2017) pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace zdůrazňuje, že žák je veden: „. . . k vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely . . .“, tedy je v něm kladen důraz na matematizaci, na modelování a práci s různými modely. Můžeme zde připomenout i projekt, zaměřený právě na rozvíjení práce s modely ve vyučování matematice, sloužící jako zdroj vhodných námětů pro učitele nejen 1. a 2. stupně základního vzdělávání, ale i učitelů mateřských škol při rozvíjení předmatematických představ, *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost* (Fuchs, Lišková, Zelendová, 2014).

Pro srovnání ukážeme, že i v německých vzdělávacích standardech pro obor matematika primární školy (2004) je mezi obecné matematické kompetence zahrnuta kompetence *modelování* (Modellieren), která spočívá v porozumění reálným textům a v utváření dalších představ reálného života doplňováním příslušných informací, v převodu reálných problémů do jazyka matematiky. Tato kompetence v sobě zároveň zahrnuje i opačně převod čisté matematických úloh do reálných situací, formulování reálných úloh k pojmům, rovnicím a obrazovým reprezentacím. Dále je zde obsažena kompetence *znázorňování* (Darstellen), tedy dovednost navrhnout, vybrat a použít pro matematické úlohy vhodná znázornění, převádět jednu reprezentaci na jinou, srovnávat různá znázornění.

Pro školní vyučování je práce s modely důležitá a nezastupitelná. F. Kuřina ve své knize *Matematika jako pedagogický pro-*

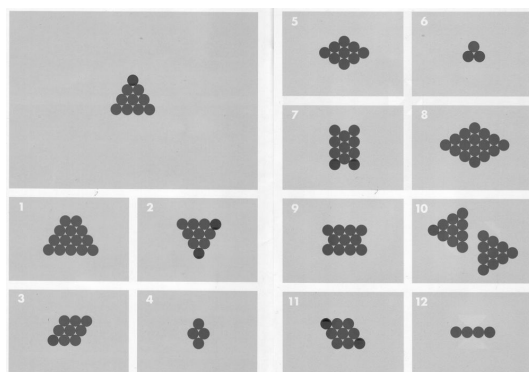
blém (2016) hovoří v souladu s Treffersem a Freudenthalem (1991) o tzv. horizontální matematizaci, kterou rozumí motivaci žáků reálnou situací, řešením problémů ze života, ve směru z reálného života do světa matematiky. Horizontální matematizaci chápe jako „... proces vytváření matematického modelu reality...“ (Kuřina, 2016), což lze ve školní praxi realizovat prací na projektech, řešením vhodných problémů, učením se pro život (Hejný, Kuřina, 2015). Vertikální matematizaci pak rozumí „... matematické zpracování problému, ... fungování modelu...“, tedy ve smyslu „... naučit se něco, co funguje a mít z toho radost...“ (Hejný, Kuřina, 2015). Vzdělávání, ve kterém je přítomna jak horizontální, tak vertikální matematizace, podle F. Kuřiny nejlépe odpovídá potřebám školní praxe. Takové vzdělávání je možné označit pojmem realistické vzdělávání. Vraťme se nyní k výše zmíněným učebnicím programu *Mathe 2000* a jejich doprovodným pracovním materiálům. Pro naše učitele 1. stupně ZŠ může být překážkou německý jazyk, kterým většina z nich nejspíš vybavena není. Bohužel anglická verze těchto učebnic a učebních materiálů není k dispozici. Proto v tomto článku vybíráme z těchto výukových prostředí s modely vhodné ukázky, které mohou být i bez hlubších jazykových dovedností inspirací pro učitele v našich školách.

Jako první se zaměříme na nestandardní úlohy se zrcadlem. Práce se zrcadlem je zde zasazena do uměle připravené reality problémových úloh. Vzhledem k tomu, že žáci tuto realitu zkoumají a kontrolují pomocí zrcadla, vytvářejí si své vlastní, reálnou skutečností podložené zkušenosti. Tím pro sebe objevují vlastnosti osové souměrnosti, dochází zde k tvůrčímu prolínání matematiky a reality.

Nestandardní úlohy se zrcadlem

Následující aktivita vychází z nestandardních úloh H. Spiegela (1996) k propedeutice osové souměrnosti. Dvojstránky v pracovním sešitě *Mathe 2000 Spiegeln mit dem Spiegel* (Zrcadlení v zrcadle), určeném pro 1. a 2. ročník primární školy, představují pracovní list vždy k jedné problémové situaci se zrcadlem (viz obr. 1 v černobílé verzi, doporučujeme nahlédnout na zajímavější barev-

nou verzi na adrese odkazu). Pracovní list obsahuje původní obrázek a z něj odvozené nové symetrické obrazce, vzniklé různým přiložením zrcadla k původnímu obrázku. U jednotlivých očíslovaných symetrických obrazců je zapotřebí nejen určit jejich osu symetrie správným přiložením zrcadla, ale také v původním obrázku vybrat vhodnou část, ze které obrazec vznikl, a zkontrolovat ji v zrcadle. Mezi očíslovanými úlohami se přitom vyskytne i taková, která nemá řešení.



Obr. 1: (převzato

z <http://www.mathe2000.de/spiegeln-mit-dem-spiegel>)

Ačkoli jsou úlohy v pracovním sešitě H. Spiegela určeny pro nižší ročníky, v našem prostředí následující aktivitu se zrcadly doporučujeme zařadit vzhledem k RVP ZV a menší zkušenosti žáků s tímto typem netradičních úloh spíše až pro 3. a 4. ročník ZŠ.

Úlohy pro práci se zrcadly H. Spiegela nás inspirovaly k rozpracování podrobného návrhu možného využití tohoto námětu ve vyučování v našich podmínkách.

1. Práce s obrázkem

Děti dostanou zrcadlo a vyberou si z nabízených obrázků (formáty obrázku jsou stejně velké jako zrcadla, tj. přibližně 10 cm × 15 cm) jeden pro svou práci. Nejprve k tomuto obrázku přikládají zrcátko a hledají, jak je přiložit, aby vznikl nový zajímavý symetrický ob-

rázek. Podle tohoto výběru narýsují úsečku, která původní obrázek rozdělí na dvě části. Obrázek podle úsečky rozstříhnou a každou část nalepí samostatně na prázdný pracovní list (je rovněž možné využít i čtvercovou síť o čtvercích $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ s vyznačenou osou souměrnosti). Děti nejprve dokreslují v osově souměrnosti první symetrický obrázek, správnost průběžně kontrolují příkládáním zrcátka, potom stejným způsobem dokreslí osově souměrný obrázek i pro druhou odstříženou část původního obrázku.

2. Práce se dvěma nepřímo shodnými obrázky

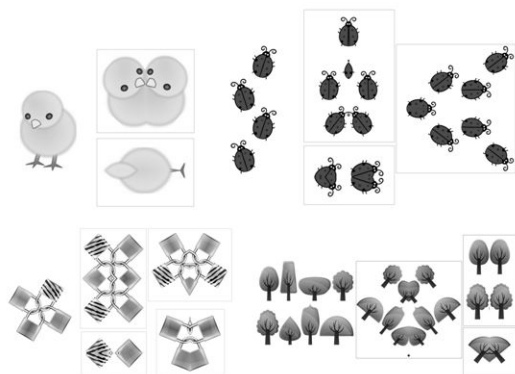
Děti opět dostanou zrcadlo a z nabízených obrázků (přibližně stejného formátu jako je velikost zrcadel) si zvolí dva nepřímo shodné. Opět nejprve k obrázku příkládají zrcátko a hledají možnost, jak obrázek rozstříhnout, aby vznikl nový symetrický obrazec, který pro ně bude zajímavý. Podle svého výběru zvolí vhodnou úsečku, narýsují ji na první obrázek a odstříhnou vybranou část. Totéž udělají s druhým obrázkem, přičemž kontrolují, aby druhou úsečku narýsovaly tak, aby vybraná část skutečně byla nepřímo shodná s odstříhnutou částí prvního obrázku. Na volný list papíru nalepí obě shodné odstřížené části tak, aby vznikl symetrický obrázek, který měly v plánu.

Potom děti vezmou zbylé odstřížené části z původních obrázků a sestaví z nich druhý osově souměrný obrázek a také jej nalepí na papír.

Společně pak žáci rozloží své obrázky vzadu ve třídě na koberci, učitel k nim rozdává po jednom z původních nerozstřížených obrázků a děti obrázky postupně obcházejí se svými zrcátky a zkoušejí k původním obrázkům přiložit zrcadlo tak, aby jim vznikl tentýž obrázek jako na rozložených pracích. (Také je možné dětem do skupinek rozdat původní obrázky a vzniklé nové obrazce ukazovat na vizualizéru s tím, že žáci v lavicích opět zkoušejí hledat, jak zrcadlo přiložit.)

3. Po tomto náviku práce se souměrnými obrázky mohou děti pracovat s některým z pracovních listů z práce H. Spiegela (1996) – viz např. obr. 1.

4. Pro starší žáky je pak možné nechat některé z nich připravit své úkoly se symetrickými obrázky na počítači – obrázek mohou vybírat např. z volně použitelných obrázků na <https://pixabay.com> a jednoduše upravit pomocí nástrojů otáčení obrázku a překlápění např. v Powerpointu a pomocí nástroje vystřížení Snipping Tool (viz obr. 2). Vzniklé úlohy jsou pak využity pro další společnou práci se zrcadly.



Obr. 2

5. Aktivitu je možné pojmout také jako mezipředmětový projekt s výtvarnou výchovou, pracovními činnostmi či informatikou. Také ji lze rozdělit, některé činnosti realizovat s mladšími žáky a ve vyšším ročníku na ně navázat pokračujícími aktivitami.

Další námět vychází z číselných obrazců, resp. číselných trojúhelníků. Děti mají možnost s čísly manipulovat, sledovat měnící se vlastnosti, na základě těchto modelů hlouběji poznávat vztahy mezi čísly, vlastnosti číselných operací.

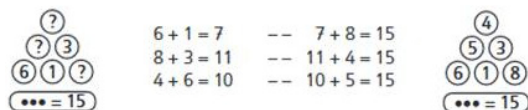
Číselné obrazce

Aktivita vychází z úloh Mathe 2000 *Das Zauberdreieck* (Magický trojúhelník) W. Metznera (2006). Cílem úloh je doplnit čísla od

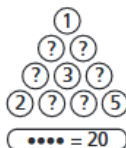
1 do 10 do obrazce trojúhelníku tak, aby součet tří čísel po stranách obrazce odpovídal zadanému číslu. Přitom některá čísla do obrazce už doplněná jsou. Úlohy je možné řešit jak pro jednodušší obrazce se šesti políčky (obr. 3 a 4), tak pro obrazce složitější s deseti políčky, kde prostřední políčko velkého trojúhelníku nepatří do žádného dílčího součtu (obr. 5).



Obr. 3: (převzato z https://asset.klett.de/assets/81f1b860/ZD_Anleitung.pdf)



Obr. 4: (převzato z https://asset.klett.de/assets/81f1b860/ZD_Anleitung.pdf)



Obr. 5: (převzato z https://asset.klett.de/assets/81f1b860/ZD_Anleitung.pdf)

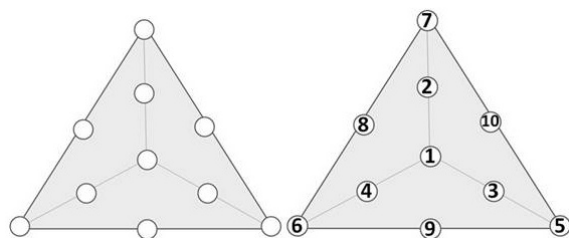
Publikace W. Metznera (2006) je volně ke stažení na výše uvedené adrese pod ilustračními obrázky. Učitelé v ní najdou návodné ukázky možných úloh k těmto trojúhelníkům, které je mohou inspirovat k tvorbě svého vlastního zadání.

Nakladatelství Klett nabízí k tomuto prostředí z *Mathe 2000* dřevěnou sadu malého či velkého trojúhelníku s deseti žetony s čísly, doplněnou sadou dvou set karet s doprovodnými úlohami.

K úlohám je však možné přistupovat tvořivě, učitel i žáci mohou vymýšlet své vlastní úlohy a pracovat například s deseti očíslo-

vanými PET víčky a plánky s kruhovými políčky uspořádanými do tvaru malého či velkého trojúhelníku.

Při práci s žáky primární školy je možné využít další úlohy podobného charakteru. V následující úloze je opět zapotřebí rozmístit čísla od 1 do 10 do políček trojúhelníku – nyní tak, aby se součty čísel náležejících vnitřním malým trojúhelníkům rovnaly stejnému číslu (viz obrázek 6). Úlohu je možné řešit pro součty v rozmezí od 28 do 38, přičemž pro usnadnění hledání řešení je možné žákům opět některá z čísel dopředu do trojúhelníku umístit (čímž je možné vytvářet více zajímavých úloh).



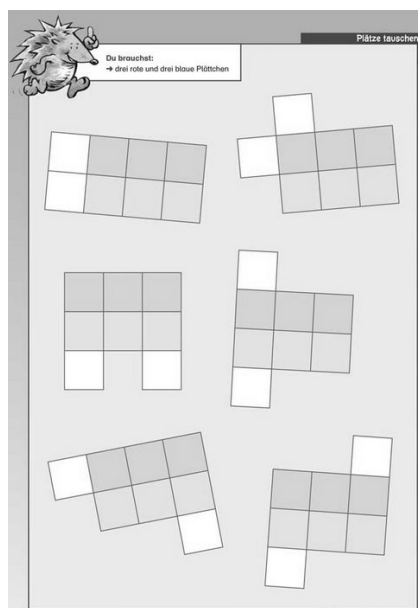
Obr. 6

Přemísti

Poslední ukázkou chceme našim učitelům připomenout hravé činnosti s přemísťováním žetonů jejich posouváním nebo vzájemným přeskakováním, které podporují rozvoj myšlení a orientaci v prostoru. Vycházíme přitom z publikací Wittmanna a Müllera *Das kleine Denkspielbuch* (Malá kniha skládanek, 2006), určené pro děti ve věku 4–7 let (odtud převzata činnost na obrázku 7) a *Die Denkschule 1/2* (Škola myšlení, 1997), pro 1. a 2. ročník primární školy (obrázek 8). Ačkoli jsou aktivity první z publikací primárně určené pro předškolní věk, jako jednodušší problémové úlohy dobře poslouží také při práci s dětmi v první nebo druhé třídě.

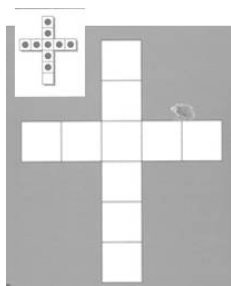
Úkolem dětí v problémových úlohách k plánkům z obrázku 7 je umísťovat postupně na jednotlivé hrací plánky tři modré a tři červené žetonky tak, aby barevně souhlasily s barvou políček (na plánku jsou v jedné řadě modrá, ve druhé řadě červená pole). Děti

pak mají žetony pouhým posouváním (nikoli přeskakováním) přemístit tak, aby modré žetony ležely na červených polích a červené žetony na modrých polích. Bílá políčka na okrajích plánek slouží jako pomocná políčka k uhýbání žetonů. Pro ztížení (nebo naopak pro ulehčení) je možné červené a modré řady políček prodloužit o další políčko, nebo je naopak zkrátit o jedno políčko na dvě modrá a dvě červená pole.



Obr. 7: (převzato z <http://www.mathe2000.de/das-kleinen-denkspielbuch-f%C3%BCr-4-bis-7-j%C3%A4hrige-kinder>)

Problémová úloha k plánku na obrázku 8 spočívá v přemísťování a ubírání žetonů vzájemným přeskakováním. Na devět políček ve tvaru kříže se umístí žetony. Jak je vidět nahoře na obrázku, jedno políčko zůstává prázdné. Žetony se mohou přesouvat pouze přeskakováním jednoho dalšího žetonu, který leží hned na sousedním poli. Žetony, které byly přeskočeny, se přitom odebírají. Cílem je přeskákat tak, aby na plánku zbyl poslední žeton.



Obr. 8: (převzato z <http://www.mathe2000.de/spielen-und-%C3%BCberlegen-die-denkschule>)

Podobné úlohy, rovněž založené na přemísťování prvků, nalézáme i v mnohých dětských a počítačových hrách (např. hodně známé je přeskakování žabiček) nebo ve starší literatuře. Na předchozí činnosti tak učitelé mohou dobře navázat dalšími podobnými úlohami hravého charakteru, například přemísťováním po dvou žetonech (obr. 9).

Žetony na obrázku 9 se mají přemístit tak, aby zleva ležely nejprve všechny černé, až za nimi pak šedé. Přemísťovat se mohou vždy jen dvojice vedle sebe ležících žetonů a nesmí se přitom měnit jejich pořadí. Zvládne to někdo na tři tahy?



Obr. 9

Tři výše uvedené stručné ukázky z programu *Mathe 2000* dokládají, že jednotlivé herní aktivity splňují podmínku, aby matematika vyrůstala z uměle připravené nebo skutečné žákovy reality. Úlohy k rozvoji matematického myšlení žáků jsou zde zasazeny do prostředí jednotlivých her, která poskytují možnost tvorby většího množství úloh s postupně narůstající obtížností. Prostředí úloh vyrůstající z motivační hry jsou dětmi vnímána jako zcela přirozená, díky nim si pak žáci vytvářejí dostatek přímých zkušeností s konkrétním matematickým učivem. Materiály a učebnice *Mathe 2000* tak mohou být vhodným zdrojem k čerpání námětů pro další práci s žáky na prvním stupni základní školy i pro naše učitele.

Literatura

- [1] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer.
- [2] Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E. (2014). *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*. 1. vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků.
- [3] Hejný, M., Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.
- [4] MŠMT. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Dostupné z <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani>
- [5] Kultusministerkonferenz (2004). *Vereinbarung über Bildungsstandards für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. Dostupné z http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Deutsch-Primar.pdf
- [6] Kuřina, F. (2016). *Matematika jako pedagogický problém*. Hradec Králové: Gaudeamus.
- [7] Metzner, W. (2006). *Das Zauberdreieck*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.
- [8] Spiegel, H. (1996). *Spiegeln mit dem Spiegel*. Stuttgart: Klett Grundschulverlag.
- [9] Wittmann, E., Müller, G. (2006). *Das kleine Denkspielbuch*. Seelze: Kallmeyer.
- [10] Wittmann, E., Müller, G. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart.
- [11] Wittmann, E., Müller, G. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart.
- [12] Wittmann, E., Müller, G. (1997). *Spielen und Überlegen – Die Denkschule Teil 1/2*. Stuttgart.

Abstract

Models and aids necessarily belong to teaching mathematics in primary school. In this paper, we want to remind our readers of game activities and aids for primary school from German textbooks and accompanying materials of the Mathe 2000 project.

This paper introduces problems with mirrors. The activity from this environment is elaborated in the form of a project for the 3rd and 4th year of primary school. Readers will get acquainted with the numeric triangle environment and sample problems from this environment. The last is the environment of tasks and activities to move tokens on simple plans. These activities develop space imagination and strategic thinking.

Jana Cachová

e-mail: jana.cachova@uhk.cz

Alžběta Bernardová

e-mail: alzbeta.bernardova@uhk.cz

Sylva Stupalová

e-mail: sylv.stupalova@uhk.cz

Michaela Vrzalová

e-mail: michaela.vrzalova@uhk.cz

Katedra matematiky PřF UHK

Rokitanského 62

500 03 Hradec Králové