Stanislav Lukáč; Pavel Molnár

Bádateľská aktivita na skúmanie vlastností štvoruholníkov

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 1, 38–50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148572

BÁDATEĽSKÁ AKTIVITA NA SKÚMANIE VLASTNOSTÍ ŠTVORUHOLNÍKOV

Stanislav Lukáč, Pavel Molnár[1]

V súčasnosti rezonuje v matematickom vzdelávaní požiadavka aplikovať bádateľské prístupy k osvojovaniu poznatkov. Aktívne skúmanie a objavovanie matematických zákonitostí môže podporiť dosiahnutie kvalitnejších a trvácnejších výstupov matematického vzdelávania. Pri vytváraní podnetného učebného prostredia na skúmanie vlastností štvoruholníkov bolo v navrhnutej bádateľskej aktivite využité prostredie programu GeoGebra, ktoré sme sa snažili vhodne skombinovať s využívaním klasických rysovacích pomôcok. Ako námet na bádateľskú aktivitu sme vybrali skúmanie vlastností štvoruholníkov aj z toho dôvodu, že výučba vlastností konkrétnych typov štvoruholníkov je súčasťou školskej matematiky. Článok obsahuje postupnosť úloh, ktorá by mohla priviesť žiakov k objaveniu vzťahov vystupujúcich vo Varignonovej vete a aj k nájdeniu a porozumeniu argumentov na zdôvodnenie objavených zistení. Navrhnutá metodika výučby bola vyskúšaná vo vyučovaní matematiky a naše postrehy a skúsenosti sú uvedené v článku.

Na motiváciu v úvode vyučovacej hodiny by mohol učiteľ využiť informácie o francúzskom učencovi Pierrovi Varignonovi. Aj keď by tento všestranný vedec žiakom nebol známy, mohlo by ich upútať, že bol priateľom Newtona, Leibniza aj Bernoulliho rodiny. Narodil sa v roku 1654 a vo svojom vedeckom bádaní sa venoval hlavne mechanike. V roku 1690 vytvoril mechanickú teóriu gravitácie. Venoval sa aj využitiu diferenciálneho počtu pri opise prúdenia tekutín. V roku 1704 vynašiel manometrickú U-trubicu na

[1]Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-0715-12.

meranie tlaku v plynoch. Viaceré z jeho prác boli vydané až po jeho smrti. Varignon sa venoval aj geometrii a v roku 1731 bol prvýkrát publikovaný dôkaz tzv. Varignonovej vety: *Nech $ABCD$ je ľubovoľný štvoruholník a nech P, Q, R, S sú stredy strán AB, BC, CD, DA. Potom $PQRS$ je rovnobežník a jeho obsah je rovný polovici obsahu štvoruholníka $ABCD$.* (Peter, 2001)

Na vyučovacej hodine by učebná činnosť žiakov bola podobne ako bádanie vedcov založená na pozorovaní, kladení otázok, hľadaní odpovedí a vysvetlení a nájdení vhodných argumentov na zdôvodnenie objavených zistení. Aj keď program GeoGebra ponúka efektívne nástroje na zostrojovanie a skúmanie geometrických útvarov, v prvej etape by žiaci využívali pri náčrtoch klasické rysovacie pomôcky. Vyšetrovaním načrtnutých štvoruholníkov by žiaci mohli porozumieť problému a zamyslieť sa nad vzťahmi, ktoré by mohli využiť pri jeho riešení. Pri návrhu postupu výučby sme sa snažili vychádzať z modelu riešenia geometrických problémov s využitím dynamických geometrických systémov, ktorý opísal Scher (2003). Tento model obsahuje štyri fázy, ktoré vedú prirodzene od skúmania vizuálnych náčrtov k deduktívnej argumentácii:

- vizualizácia založená na načrtnutí geometrických útvarov,
- analýza vzťahov medzi načrtnutými objektmi,
- vyšetrovanie pomocou dynamického geometrického softvéru a testovanie hypotéz,
- zdôvodnenie.

Vzhľadom na využívané poznatky a spôsobilosti je porozumenie geometrických vzťahov a aj zdôvodnenie samotnej vety primerané a vhodné pre žiakov v nižších ročníkoch strednej školy. Plán výučby je založený na zostavení postupnosti úloh, ktoré usmerňujú bádateľské činnosti žiakov a riešením ktorých by mali žiaci postupne objaviť a sformulovať hypotézy vyjadrujúce vzťahy z Varignonovej vety. Úlohy v druhej časti by mali žiakov nasmerovať na nájdenie vhodných argumentov na zdôvodnenie objavených zistení.

Návrh a realizácia bádateľsky orientovanej výučby

Pri návrhu plánu výučby sme sa sústredili na vytvorenie pracovného listu. Pracovný list obsahuje 7 úloh a žiakom bol zadaný v 3 častiach. Pri niektorých úlohách bolo žiakom odporúčané, že pre pri ich riešení môžu využiť program GeoGebra. Navrhnutá metodika vyučovania bola zrealizovaná v jednej triede tretieho ročníka na gymnáziu. Pre našu výučbu boli poskytnuté dve dvojhodinové vyučovacie jednotky, na ktorých sme mohli vyskúšať pripravené metodiky výučby štyroch vyučovacích hodín. Výučby sa zúčastnilo 18 žiakov, z toho 11 chlapcov a 7 dievčat.

Na prvej vyučovacej hodine sme sa so žiakmi venovali opakovaniu poznatkov (výšky a ťažnice trojuholníka, stredná priečka v trojuholníku, stredový a obvodový uhol), ktoré boli potrebné pri skúmaní a zdôvodňovaní objavených vzťahov. Nakoľko žiaci ešte nevyužívali program GeoGebra, pri riešení úloh na opakovanie si žiaci mohli vyskúšať na úvodnej hodine základné nástroje tohto programu.

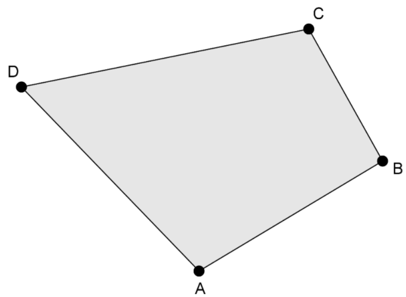
Na druhej vyučovacej hodine sme sa zaoberali problémom, ktorý viedol ku skúmaniu štvoruholníkov a objavovaniu a zdôvodňovaniu vzťahov z Varignonovej vety. Priebehu a analýze tejto vyučovacej hodiny sa budeme podrobnejšie venovať v druhej časti článku.

Predmetom tretej vyučovacej hodiny bolo skúmanie vlastností tetivového štvoruholníka. Riešili sme aj konštrukčné úlohy, pri riešení ktorých mohli žiaci aplikovať objavené vlastnosti tetivového štvoruholníka. Na poslednej vyučovacej hodine žiaci objavovali vlastnosti dotyčnicových štvoruholníkov.

Skúmanie a zdôvodňovanie vlastností štvoruholníkov

V tejto časti článku uvedieme navrhnutú postupnosť úloh, ktoré boli žiakom zadané vo forme pracovného listu (označenie PL). Úlohy sprevádzali žiakov jednotlivými etapami bádateľsky orientovaného vyučovania. Na prebudenie záujmu žiakov bola na začiatku výučby žiakom zadaná úloha na rozdelenie štvoruholníka na dve časti s rovnakým obsahom. Pri riešení úloh z pracovného listu by mali žiaci rysovať (kresliť) dané útvary, ale aj pracovať s dynamickými konštrukciami, manipulovať s voľnými objektmi a pozorovať a popisovať zmeny závislých geometrických objektov. Odporúčame dávať žiakom pracovný list po častiach (2a, 2b; 2c, 2d, 3; 4a, 4b) , aby im úlohy nachádzajúce sa na ďalšej strane neodhalili základné myšlienky riešenia predošlých úloh.

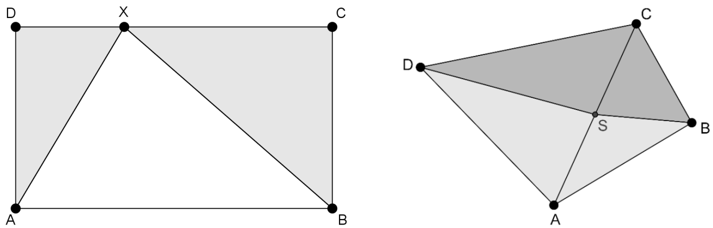
Úloha 1 (motivácia). Otec vlastní pozemok štvoruholníkového tvaru (obr. 1). Rozhodol sa, že svojmu synovi venuje presne polovicu tohto pozemku. Podmienkou je, aby polovica pre syna bola v jednom kuse a bola ohraničená rovnými plotmi. Pokúste sa vymyslieť ako sa dá daný pozemok rozdeliť pomocou lomenej čiary.



Obr. 1: Náčrt pozemku štvoruholníkového tvaru

Didaktická poznámka. Učiteľ by mohol žiakov naviesť, aby začali delením základných typov štvoruholníkov, ako napríklad štvorec a obdĺžnik. Najskôr zrejme odhalia delenie pomocou osí súmerností a následne aj pomocou uhlopriečok. Na ďalšie možnosti delenia (napr. obr. 2, vľavo) by žiakov mohol naviesť učiteľ.

Poznámka z výučby. Ako sme očakávali, začali žiaci deliť pravouholníky, a to pomocou uhlopriečok a aj pomocou osí súmerností. Šikovnejší žiaci prišli aj na delenie pravouholníka pomocou ľubovoľného bodu na jednej zo strán, neskôr si to uvedomili aj ostatní žiaci. Daný štvoruholník sa nepodarilo nikomu rozdeliť a zostal vhodnou motiváciou pre ďalšiu prácu. Žiaci nenašli riešenie využitím rozdelenia štvoruholníka uhlopriečkou AC na dva trojuholníky a zostrojením ťažníc trojuholníkov so spoločným bodom v strede uhlopriečky (obr. 2, vpravo).

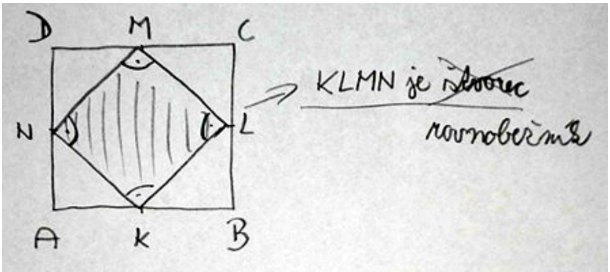


Obr. 2: Možnosti delenia pozemku

Úloha 2a (PL). Zostrojte ľubovoľný štvoruholník $ABCD$ a stredy jeho strán označte v poradí K, L, M, N. Následne zostrojte štvoruholník $KLMN$. Vyslovte hypotézu o type štvoruholníka $KLMN$.

Didaktická poznámka. Možno očakávať, že väčšina žiakov si načrtne pravouholník. Žiaci by na základe svojho obrázku mali dospieť k záveru, že štvoruholník $KLMN$ je rovnobežníkom. Na ďalšie skúmanie a testovanie platnosti tejto hypotézy je v pracovnom liste zaradená ďalšia úloha, v ktorej žiaci manipuláciou s dynamickou konštrukciou môžu skúmať rôzne typy štvoruholníkov $ABCD$.

Poznámka z výučby. Záležalo na tom, aký obrázok si žiaci nakreslili. Piati žiaci si nakreslili štvoruholník $ABCD$ ako štvorec a vzápätí dospeli k záveru, že $KLMN$ je tiež štvorec. Títo piati žiaci neskúsili načrtnúť iné typy štvoruholníkov a zmenili svoje tvrdenie až na základe riešenia nasledujúcej úlohy 2b (obr. 3). Ostatní žiaci mali tvrdenie napísané správne už pri riešení úlohy 2a.



Obr. 3: Ukážka žiackeho riešenia úlohy 2a

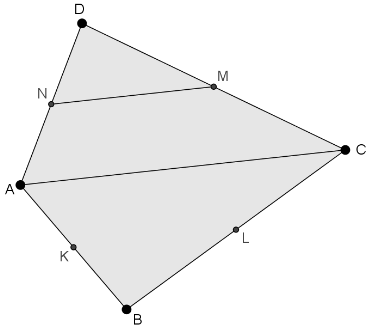
Úloha 2b (PL). V dynamickej konštrukcii programu GeoGebra otestujte svoju hypotézu z úlohy 2a pre rôzne typy štvoruholníkov $ABCD$. Sformulujte záver.

Didaktická poznámka. Preskúmaním rôznych štvoruholníkov $ABCD$ pomocou dynamickej konštrukcie žiaci zistia, že štvoruholník $KLMN$ by mohol byť rovnobežníkom. Tento výsledok platí aj pre nekonvexné štvoruholníky, ale pri zdôvodňovaní vzťahov a aj pri ďalšom skúmaní sa zameriame na konvexné štvoruholníky. Zdôvodnenie pozorovanej skutočnosti je založené na využití vlastností strednej priečky trojuholníka.

Poznámka z výučby. Práca s dynamickou konštrukciou zaujala všetkých žiakov a všetci dospeli k správnemu záveru. Na základe manipulácie s dynamickou konštrukciou si vyššie spomenutí žiaci opravili svoje tvrdenie z úlohy 2a.

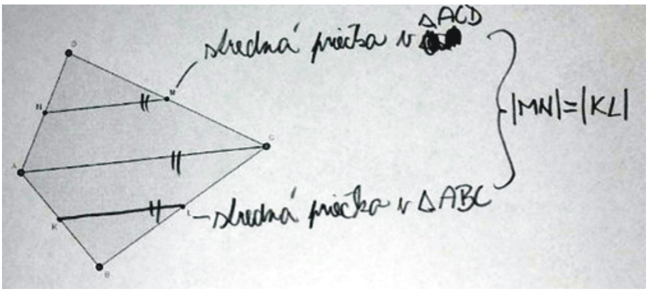
Pomocou nasledujúcej úlohy sme sa pokúsili žiakov naviesť na nájdenie argumentov, ktoré by mohli využiť pri zdôvodnení vysloveného tvrdenia o vlastnostiach štvoruholníka KLMN.

Úloha 2c (PL). Aké vlastnosti má úsečka MN v trojuholníku ACD? Ako by sa dal tento váš záver využiť pri určení vzájomnej polohy priamok MN a KL?



Obr. 4: Obrázok navádzajúci žiakov na zdôvodnenie rovnobežnosti priamok MN a KL

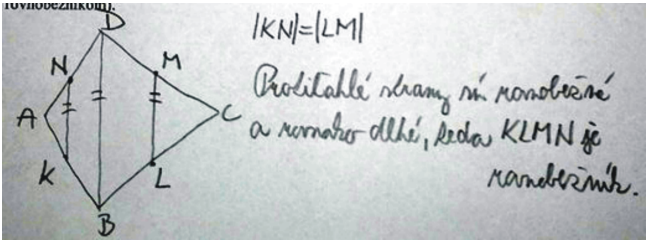
Poznámka z výučby. Vzhľadom na opakovanie z prvej vyučovacej hodiny si všetci žiaci uvedomili, že úsečka MN je strednou priečkou v trojuholníku ACD a tak isto aj KL je strednou priečkou v trojuholníku ABC. Oba tieto trojuholníky majú spoločnú stranu AC a teda sú úsečky MN a KL rovnobežné a rovnako dlhé.



Obr. 5: Ukážka žiackeho riešenia úlohy 2c

Úloha 2d (PL). Na základe záverov z riešenia úlohy 2c zdôvodnite svoje tvrdenie z úlohy 2a (štvoruholník $KLMN$ je rovnobežníkom).

Poznámka z výučby. Z osemnástich žiakov si len štyria žiaci v čase určenom na vypracovanie druhej časti pracovného listu neuvedomili, že vlastnosť strednej priečky trojuholníka sa dá využiť aj pre úsečky KN a LM pri rozdelení štvoruholníka ABCD uhlopriečkou BD. Títo žiaci nevedeli dokončiť zdôvodnenie, že štvoruholník KLMN je rovnobežníkom.



Obr. 6: Ukážka žiackeho riešenia úlohy 2d

Úloha 3 (PL). Charakterizujte vlastnosti štvoruholníka $ABCD$, aby štvoruholník $KLMN$ bol:

a) kosoštvorcom,
b) pravouholníkom.

Pomocou dynamickej konštrukcie PL1_2.ggb preskúmajte vyhovujúce štvoruholníky $ABCD$ a v pracovnom liste opíšte ich vlastnosti.

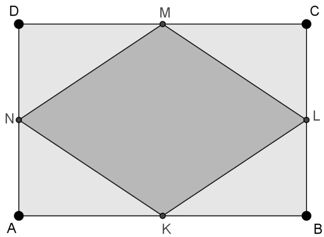
Didaktická poznámka. Úloha je zameraná na lepšie porozumenie a aplikáciu vzťahov využívaných pri riešení predchádzajúcej úlohy. Aby napríklad vnútorné uhly štvoruholníka $KLMN$ boli pravé, musia byť uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$ na seba kolmé. Žiaci môžu otestovať svoju hypotézu zostrojením a preskúmaním štvoruholníkov $ABCD$ s kolmými uhlopriečkami.

Poznámka z výučby. Žiaci mali k dispozícii dynamickú konštrukciu obsahujúcu štyri štvoruholníky. Dva štvoruholníky boli všeobecné a dva boli zostrojené tak, aby spĺňali požadované vlastnosti. Neboli v nich však zobrazené uhlopriečky. Žiaci sa pri tejto úlohe dosť trápili, nevedeli, na čo sa majú zamerať a čo sledovať.

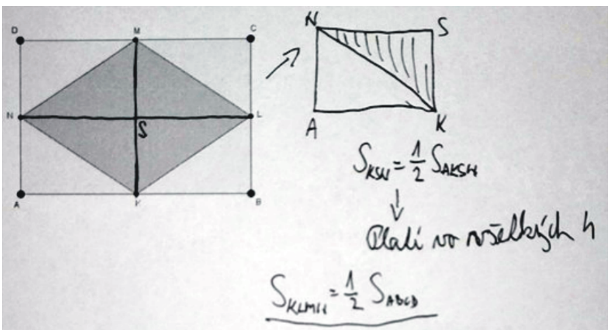
Traja žiaci uviedli ako riešenie oboch úloh len štvorec bez uvedenia vlastností. Pri úlohe a) v štyroch prípadoch odpoveď chýbala a pri úlohe b) neuviedli odpoveď traja žiaci.

V posledných dvoch úlohách pracovného listu sa mali žiaci zamerať na hľadanie vzťahu medzi obsahmi štvoruholníkov $ABCD$ a $KLMN$. V úlohe 4a mali žiaci pracovať s obdĺžnikom $ABCD$ a v úlohe 4b mohli experimentovať v dynamickej konštrukcii so všeobecným štvoruholníkom $ABCD$.

Úloha 4a (PL). Na obrázku je načrtnutý obdĺžnik $ABCD$ a stredy jeho strán tvoria štvoruholník $KLMN$. Preskúmajte vzťah medzi obsahmi týchto dvoch štvoruholníkov. Zapíšte svoju hypotézu.



Obr. 7: Náčrt k určeniu obsahov



Obr. 8: Ukážka žiackeho riešenia úlohy 4a

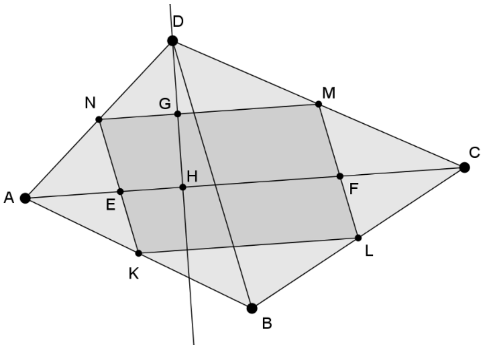
Poznámka z výučby. Pri tejto úlohe sa objavili správne riešenia s výpočtom, ale aj riešenia bez výpočtov, ale so správnym záverom. K záveru, že štvoruholník $KLMN$ má polovičný obsah oproti štvoruholníku $ABCD$ dospeli všetci žiaci. Pri tejto úlohe si niektorí žiaci uvedomili spojitosť s motivačnou úlohou o delení pozemku.

Úloha 4b (PL). V dynamickej konštrukcii sa zamerajte na skúmanie rôznych konvexných štvoruholníkov $ABCD$ a preskúmajte vzťah medzi obsahmi štvoruholníkov $ABCD$ a $KLMN$. Vyslovte tvrdenie.

Poznámka z výučby. Všetci žiaci na základe údajov uvedených v algebraickom okne programu GeoGebra uviedli správnu odpoveď. Po vyzvaní, aby sa žiaci vrátili k riešeniu motivačnej úlohy už žiaci vedeli využiť osvojené poznatky pri rozdelení pozemku v tvare štvoruholníka.

Po tom, ako žiaci na základe experimentovania vyslovili hypotézu o obsahoch štvoruholníkov $ABCD$ a $KLMN$, vykonali s pomocou učiteľa podstatnú časť dôkazu daného tvrdenia.

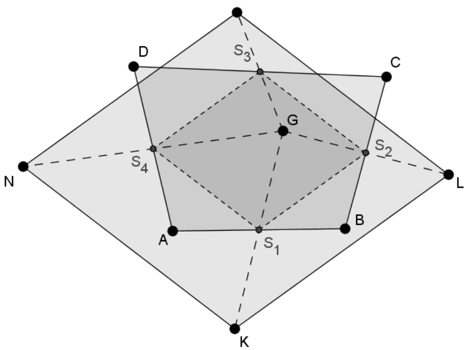
Uhlopriečkou AC je rovnobežník $KLMN$ rozdelený na dva rovnobežníky $EFMN$ a $KLFE$ (obr. 9). Obsah rovnobežníka $KLMN$ sa rovná súčtu obsahov rovnobežníkov $EFMN$ a $KLFE$. Vzťah medzi obsahmi štvoruholníkov $ABCD$ a $KLMN$ budeme skúmať zvlášť v polrovinách určených priamkou AC. Pri zdôvodňovaní skúmaného vzťahu možno využiť v polrovine určenej priamkou AC a vrcholom D podobnosť trojuholníkov NMD a ACD (veta sus), z ktorej vyplýva, že výška HG rovnobežníka $EFMN$ je rovná polovici výšky HD trojuholníka ACD. Dĺžka úsečky EF je rovná polovici z dĺžky úsečky AC. Využitím uvedených vzťahov a vzorcov na výpočet obsahu trojuholníka a rovnobežníka možno odvodiť, že obsah rovnobežníka $EFMN$ je rovný polovici z obsahu trojuholníka ACD. Analogicky by sme postupovali aj v polrovine určenej priamkou AC a vrcholom B.



Obr. 9: Náčrt na zdôvodnenie vzťahu medzi obsahmi štvoruholníkov $ABCD$ a $KLMN$

Hlavný problém z pracovného listu možno ďalej rozvíjať a ponúknuť žiakom vhodný námet na ďalšie bádanie. V závere vyučovacej hodiny bol tento námet žiakom predložený v podobe úlohy, ktorá bola žiakom zadaná ako domáce cvičenie.

Úloha 5 (DÚ). Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$. Zvoľte si bod G a zostrojte jeho obrazy K, L, M, N v stredových súmernostiach podľa stredov strán štvoruholníka $ABCD$. Preskúmajte vlastnosti štvoruholníka $KLMN$. Môžete využiť dynamickú konštrukciu PL1_DU.ggb, alebo si vytvoriť vlastnú.



Obr. 10: Náčrt k riešeniu domáceho cvičenia

Poznámka z výučby. Z trinástich žiakov, ktorí riešili domáce cvičenie, väčšina žiakov využila pri riešení pripravenú dynamickú konštrukciu PL1_DU.ggb. Aj keď žiaci zistili, že štvoruholník $KLMN$ je rovnobežník, nevedeli vytvoriť ani časť zdôvodnenia objaveného zistenia. Ako sami povedali, v zložitej konštrukcii nevedeli, čo majú sledovať a na čo sa majú zamerať. Žiaci nevedeli zostaviť postupnosť argumentov založených na využití vlastností štvoruholníka $S_1S_2S_3S_4$ objavených na vyučovacej hodine a podobnosti trojuholníkov.

Záver

V článku sme predstavili učebnú aktivitu umožňujúcu aplikovať bádateľský prístup k vyučovaniu matematiky. Opísali sme zámery pri tvorbe pracovného listu, jeho obsah a metodické pokyny pre jeho využitie vo výučbe. Na základe vyskúšania navrhnutej metodiky vo vyučovacom procese možno konštatovať, že žiakov zaujali riešené úlohy a ich aktivitu podporila aj možnosť využívať v niektorých etapách výučby program Geogebra. Z našich skúseností vyplynulo, že pri riešení geometrických úloh majú žiaci často problémy zovšeobecniť tvrdenia sformulované na základe skúmania konkrétnych prípadov a nájsť vhodné argumenty na ich zdôvodnenie.

Literatura

[1] Contreras, J. N. (2014). Investigating variations of Varignon's Theorem using GeoGebra. *GeoGebra The New Language For The Third Millennium*, 3(2), 29–36.

[2] Hoath, S. & Yorke, Ch. (2005). *Užívateľská príručka Cabri Geometry II Plus (Inovačné nástroje matematiky)*. Dostupné z `http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ematik/cabri/subory/CabriIIplus1.pdf`

[3] Lukáč, S., Šnajder, Ľ., Guniš, J. & Ješková, Z. (2016). *Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách.* Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach.

[4] Novacká, G. (2011). *Softvér GeoGebra na hodinách matematiky.* Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave.

[5] Peter, N. O. (2001). Pierre Varignon and the Parallelogram Theorem. *Mathematics Teacher*, 94(4), 316–319. Dostupné z `http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/NCTM/mt2001-Varignon1.pdf`

[6] Scher, D. (2003). Dynamic Visualization and Proof: A New Approach to a Classic Problem. *Mathematics Teachers*, 96(6), 394–398.

[7] Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Abstract

Inquiry-based approaches to teaching resonate in mathematics education in nowadays. Active investigation and discovery of the mathematical patterns can support the achievement of better and more lasting results of mathematics education. GeoGebra was used in the proposed inquiry activities to create a stimulating learning environment for the investigation of the properties of quadrilaterals. We have tried to combine appropriately the GeoGebra with the use of classical drawing tools. As a resource for the inquiry activity we chose an investigation of quadrilateral properties. The teaching of properties of the particular type of quadrilaterals is part of the school mathematics. The article contains a sequence of tasks that could lead students to the discovery of relationships described in Varignon's theorem and also to finding and understanding arguments for the reasoning of discovered properties. The proposed teaching methodology has been tried in mathematics teaching and our observations and experience are given in the article.

Stanislav Lukáč
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach
040 01 Košice

Pavel Molnár
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach
040 01 Košice