Max Forman

Sestup uspořádaných trojic a čtveřic

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 4, 1–7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148558`

Sestup uspořádaných trojic a čtveřic

Max Forman

Abstrakt. Cílem tohoto článku je zkoumání jisté operace, kterou nazýváme sestup uspořádaných trojic a čtveřic. Jde o matematický problém s poměrně jednoduchým zadáním, ale netriviálním řešením. Navíc je zajímavé, jak podstatně se výsledky pro trojice a čtveřice liší. Tento článek navazuje na autorovu práci SOČ s názvem Sestup uspořádaných čtveřic z roku 2020.

Sestup uspořádaných čtveřic

Sestupem čtveřic začínáme, protože právě to bylo náplní práce SOČ, a sestup trojic jsme zkoumali až následně. Sestup uspořádaných čtveřic pojednává o speciálních posloupnostech uspořádaných čtveřic, kde na začátku zvolíme čtyři libovolná čísla $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{R}_0^+$. První člen posloupnosti je právě tato čtveřice $[n_1, n_2, n_3, n_4]$. Další člen posloupnosti vznikne tak, že nahradíme

$$[n_1, n_2, n_3, n_4] \to [|n_1 - n_2|, |n_2 - n3|, |n_3 - n_4|, |n_4 - n_1|].$$

Postup s odečítáním následně opakujeme znovu a znovu.

S konkrétními čísly vypadá sestup například takto:

$$[16, 85, 33, 11] \to [69, 52, 22, 5] \to [17, 30, 17, 64] \to [13, 13, 47, 47] \to$$
$$\to [0, 34, 0, 34] \to [34, 34, 34, 34] \to [0, 0, 0, 0].$$

Jak můžeme vidět, sestup čtveřice končí triviálním cyklem [0, 0, 0, 0]. Výskyt triviálního cyklu neplatí pouze pro počítání s přirozenými čísly, ale i pro počítání s nezápornými reálnými (klidně iracionálními) čísly:

$$\big[\mathrm{e}, 3, \sqrt{2}, 1\big] \to \big[|\mathrm{e} - 3|, 3 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, |1 - \mathrm{e}|\big] \to$$
$$\to \Big[\Big||\mathrm{e} - 3| - |3 - \sqrt{2}|\Big|, 3 - \sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1|,$$
$$\big|\sqrt{2} - 1 - |1 - \mathrm{e}|\big|, \big||1 - \mathrm{e}| - |\mathrm{e} - 3|\big|\Big] =$$
$$= \big[\mathrm{e} - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, \mathrm{e} - \sqrt{2}, 2\mathrm{e} - 4\big] \to$$
$$\to \big[\mathrm{e} - \sqrt{2} - |4 - 2\sqrt{2}|, |4 - 2\sqrt{2} - |\mathrm{e} - \sqrt{2}||,$$
$$\big|\mathrm{e} - \sqrt{2} - |2\mathrm{e} - 4|\big|, 2\mathrm{e} - 4 - |e - \sqrt{2}|\big] =$$
$$= [\mathrm{e} + \sqrt{2} - 4, \mathrm{e} + \sqrt{2} - 4, \mathrm{e} + \sqrt{2} - 4, \mathrm{e} + \sqrt{2} - 4] \to [0, 0, 0, 0]$$

Nyní stručně shrňme výsledky, které jsme o sestupu čtveřic získali: Jiný cyklus než triviální neexistuje. Pokud je čtveřice složená z racionálních čísel, pak sestup dojde vždy do stavu $[0,0,0,0]$. Pro čtveřice složené z reálných čísel ale toto tvrzení neplatí, příkladem jsou čtveřice čísel úzce spjaté s tzv. tribonacciho konstantou.

Popišme si nyní výsledky blíže. Níže uvedené základní principy sestupu čtveřic si dokazovat nebudeme.

Základní principy sestupu čtveřic nezáporných reálných čísel

1. Sestup konstantní čtveřice $[a,a,a,a]$ končí po jednom kroku v triviálním cyklu $[0,0,0,0]$.
2. Při sestupu se největší člen čtveřice nemůže zvýšit.
3. Čtveřice $[\alpha n_1, \alpha n_2, \alpha n_3, \alpha n_4]$, kde $\alpha > 0$, má stejný sestup jako čtveřice $[n_1,n_2,n_3,n_4]$ akorát vynásobený konstantou α. Stejný sestup mají také čtveřice $[n_1,n_2,n_3,n_4]$ a $[a+n_1, a+n_2, a+n_3, a+n_4]$, přičemž $a \in \mathbb{R}$ je takové, že i nová čtveřice obsahuje nezáporná čísla.
   Stejné sestupy až na pořadí mají čtveřice:
   $[n_1,n_2,n_3,n_4]$ a její cyklické permutace,
   $[n_4,n_3,n_2,n_1]$ a její cyklické permutace.

   Pro $x,y \in \langle 0,1\rangle$ mají čtveřice $[0,x,y,1]$ a $[0,1-y,1-x,1]$ stejné sestupy až na pořadí. Podobně mají stejné sestupy až na pořadí čtveřice $[0,x,1,y]$ a $[0,1-y,1,1-x]$.

Na základě těchto základních principů nyní dokážeme několik lemmat a vět.

Lemma 1. *Každá nekonstantní čtveřice má až na pořadí a násobení kladnou konstantou stejný sestup jako některá z čtveřic tvaru* $[0,x,y,1]$*,* $[0,x,1,y]$*, kde* $x,y \in \langle 0,1\rangle$*.*

Důkaz. Toto tvrzení vyplývá z bodů 3, 4 a 5. Jednoho z těchto tvarů dosáhneme tak, že nejprve pomocí cyklické permutace převedeme nejmenší člen na první pozici. Následně od všech členů odečteme nejmenší člen a nakonec všechny členy vydělíme členem největším. Pokud nám vyjde čtveřice $[0,1,x,y]$, tak podle bodu 5. má stejný sestup až na pořadí jako $[0,y,x,1]$.

Věta 2.

1. Sestup čtveřice $[0,x,y,1]$ *pro* $x,y \in \langle 0,1\rangle$ *a* $x \geq y$ *končí nejpozději po čtyřech krocích v cyklu* $[0,0,0,0]$*.*

2. Sestup čtveřice $[0, x, 1, y]$ *pro* $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *končí nejpozději po šesti krocích v cyklu* $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. 1. $[0, x, y, 1] \rightarrow [x, x - y, 1 - y, 1] \rightarrow [y, 1 - x, y, 1 - x] \rightarrow$ $\rightarrow [|1 - x - y|, |1 - x - y|, |1 - x - y|, |1 - x - y|] \rightarrow [0, 0, 0, 0]$.

2. $[0, x, 1, y] \rightarrow [x, 1 - x, 1 - y, y] \rightarrow [|1 - 2x|, |x - y|, |1 - 2y|, |x - y|]$, kde nová čtveřice je ve tvaru $[a, b, c, b]$ a vytvoří sestup $[a, b, c, b] \rightarrow$ $\rightarrow [|a - b|, |c - b|, |c - b|, |a - b|]$. Získaná čtveřice je opět jednoduchého tvaru $[e, f, f, e]$ a vytvoří sestup $[e, f, f, e] \rightarrow [|e - f|, 0, |e - f|, 0] \rightarrow$ $\rightarrow [|e - f|, |e - f|, |e - f|, |e - f|] \rightarrow [0, 0, 0, 0]$.

Věta 3. *V sestupu čtveřic se neobjevuje jiný než triviální cyklus* $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. Zkoumejme, které nekonstantní čtveřice mohou být součástí cyklu. Podle lemmatu 1 stačí zkoumat čtveřice tvaru $[0, x, y, 1]$, $[0, x, 1, y]$, kde $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.

Dále podle věty 2 vidíme, že čtveřice $[0, x, y, 1]$ pro $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ a $x \geq y$ a $[0, x, 1, y]$ končí po pár krocích v $[0, 0, 0, 0]$ a samy součástí cyklu tedy nejsou. Zbývá zjistit, zda může být čtveřice $[0, x, y, 1]$ pro $x < y$ součástí cyklu. Proveďme dva kroky:

$$[0, x, y, 1] \rightarrow [x, y - x, 1 - y, 1] \rightarrow [|y - 2x|, |1 - 2y + x|, y, 1 - x].$$

Pokud $x > 0$ a $y < 1$, pak má nová čtveřice všechny členy menší než 1, tedy podle bodu 2 není původní čtveřice součástí cyklu.

Pokud $x = 0$, pak

$$\begin{gathered}[0, 0, y, 1] \rightarrow [0, y, 1 - y, 1] \rightarrow [y, |1 - 2y|, y, 1] \rightarrow \\ \rightarrow [||1 - 2y| - y|, |y - |1 - 2y||, 1 - y, 1 - y],\end{gathered}$$

což je opět čtveřice, která má všechny členy menší než 1.

Podobně pokud $y = 1$, pak

$$\begin{gathered}[0, x, 1, 1][x, 1 - x, 0, 1] \rightarrow [|1 - 2x|, 1 - x, 1, 1 - x] \rightarrow \\ \rightarrow [|1 - x - |1 - 2x||, x, x, ||1 - 2x| - 1 + x|],\end{gathered}$$

což je opět čtveřice, která má všechny členy menší než 1.

Závěr zní, že součástí cyklu je pouze konstantní čtveřice $[0, 0, 0, 0]$.

Věta 4. *Sestup každé racionální čtveřice končí v cyklu* $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. Podle bodu 3 má racionální čtveřice stejný sestup až na násobení přirozeným číslem jako čtveřice nezáporných celých čísel $[n_1, n_2, n_3, n_4]$, kterou získáme tak, že každý člen racionální čtveřice vynásobíme součinem jmenovatelů všech členů. Podle bodu 2 máme jen konečně mnoho čtveřic, které sestup $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ může obsahovat, je tedy zřejmé, že se po čase dostaneme do některé čtveřice znovu, a tudíž se sestup zacyklí. A podle věty 3 to bude cyklus triviální.

Věta 5. *Sestup čtveřice ve tvaru* $[0, x, y, 1]$ *pro* $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *nedosáhne triviálního cyklu* $[0, 0, 0, 0]$ *pro*

$$[0, x, y, 1] = \left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right],$$

kde T *je tribonacciho konstanta. Sestup nekončící triviálním cyklem má také čtveřice*

$$[0, 1-y, 1-x, 1] = \left[0, 1 - \frac{T+1}{T^3}, 1 - \frac{1}{T^3}, 1\right] = \left[0, \frac{1}{T}, \frac{T+1}{T^2}, 1\right].$$

Tribonacciho konstanta je jediným reálným řešením rovnice $x^3 = x^2 + x + 1$*, její hodnota je přibližně* $T \doteq 1{,}839\,286\ldots$

Důkaz. Čtveřice $\left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right]$ vytvoří sestup

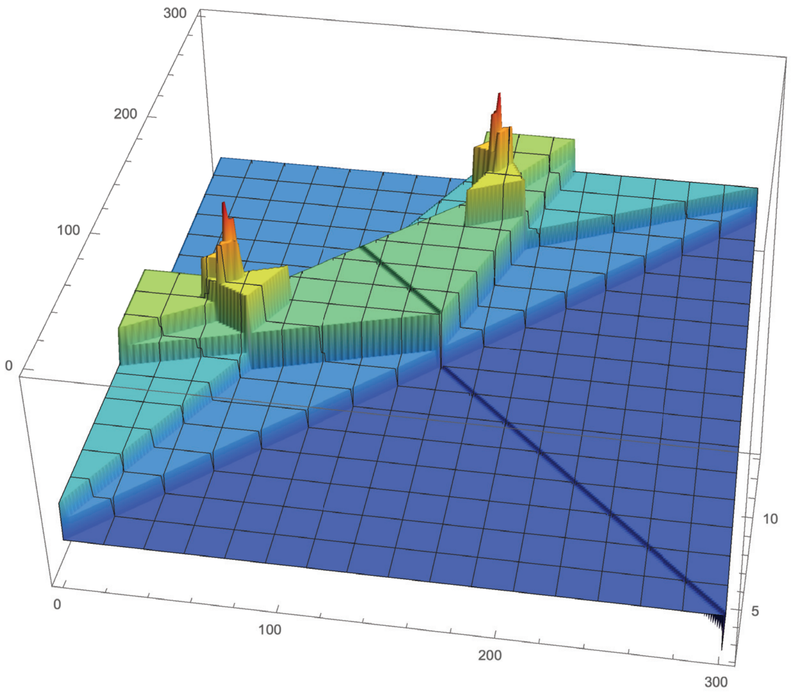
$$\left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right] \to \left[\frac{1}{T^3}, \frac{1}{T^2}, \frac{1}{T}, 1\right],$$

kde odečtením nejmenšího členu dostaneme

$$\left[0, \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^3}, \frac{1}{T} - \frac{1}{T^3}, 1 - \frac{1}{T^3}\right] = \left(1 - \frac{1}{T^3}\right)\left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right].$$

Podle bodu 3 a 4 čtveřice nevytvoří triviální zacyklení.

Domníváme se, že pro všechna čísla x, y různá od těch z věty 5 končí sestup $[0, x, y, 1]$ v $[0, 0, 0, 0]$. Toto tvrzení zatím neumíme dokázat, ale potvrzuje ho graf, kde program dosazoval čísla x, y do čtveřice $[0, x, y, 1]$, kde $x, y \in (0, 1)$, a vynášel délky sestupu do grafu. Jak můžeme vidět, na grafu se opravdu tvoří dva vrcholy kolem bodů $[0, 1/T^3, (T+1)/T^3, 1]$ a $[0, 1/T, (T+1)/T^2, 1]$. Dále je vidět, že graf je symetrický podle osy $y = 1 - x$, což odpovídá bodu 6.



Obr. 1: Délky sestupů při dosazování x a y do $[0, x, y, 1]$, kde $0 \leq x \leq y \leq 1$. (Zdroj: Josef Tkadlec)

Sestup uspořádaných trojic

Analogicky zavedeme sestup uspořádaných trojic jako posloupnost uspořádaných trojic, kde na začátku zvolíme tři libovolná čísla $n_1, n_2, n_3 \in R_0^+$. Další člen posloupnosti vznikne tak, že

$$[n_1, n_2, n_3] \to [|n_1 - n_2|, |n_2 - n_3|, |n_3 - n_1|].$$

Stejně jako tomu je u sestupu uspořádaných čtveřic, postup s odečítáním následně opakujeme znovu a znovu. S konkrétními čísly vypadá sestup např. následovně:

$$[3, 7, 1] \to [4, 6, 2] \to [2, 4, 2] \to [2, 2, 0] \to [0, 2, 2] \to [2, 0, 2] \to [2, 2, 0].$$

Shrňme opět stručně výsledky pro sestup trojic: Na rozdíl od sestupu čtveřic se u sestupu trojic objevuje netriviální cyklus o třech krocích (jak je vidět ve výše uvedeném příkladu). Do takového cyklu o třech krocích sestoupí každá trojice racionálních čísel, kromě trojic, kde jsou všechna čísla stejná. Většina trojic reálných čísel má nekonečný sestup, který nekončí cyklem.

Základní principy sestupu nezáporných reálných trojic:

1. U sestupu trojic nedojde k triviálnímu zacyklení, pokud neplatí, že $n_1 = n_2 = n_3$.
2. Při sestupu se největší člen trojice nemůže zvýšit.
3. Sestup trojice $[\alpha n_1, \alpha n_2, \alpha n_3]$, kde $\alpha > 0$, vznikne ze sestupu trojice $[n_1, n_2, n_3]$ vynásobením konstantou α.
4. Sestup také neovlivní, pokud ke všem členům trojice $[n_1, n_2, n_3]$ přičemž $a \in \mathbb{R}$ tak, že zachováme nezápornost.
5. Stejné sestupy až na pořadí mají trojice $[n_1, n_2, n_3]$ a všechny její permutace.

Lemma 6. *Každá nekonstantní trojice má až na pořadí a násobení kladnou konstantou stejný sestup jako nějaká trojice $[0, x, 1]$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$.*

Důkaz. Na základě bodů 3 a 4 dosáhneme tohoto tvaru tak, že nejprve odečteme od všech členů trojice nejmenší člen a následně všechny členy vydělíme členem největším. Trojici následně pomocí permutace převedeme na tvar $[0, x, 1]$.

Věta 7. *Trojice je součástí cyklu, pouze pokud je permutací $[0, t, t]$, pro nějaké nezáporné t.*

Důkaz. Stačí se omezit na zkoumání trojic $[0, x, 1]$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$.

1. Pro $x = 1$ je trojice $[0, 1, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, 1, 1] \to [1, 0, 1] \to [1, 1, 0] \to [0, 1, 1].$$

2. Pro $x = 0$ není trojice $[0, 0, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, 0, 1] \to [0, 1, 1] \to [1, 0, 1] \to [1, 1, 0] \to [0, 1, 1].$$

3. Pro $x \in (0, 1)$ není trojice $[0, x, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, x, 1] \to [x, 1 - x, 1] \to [|1 - 2x|, x, 1 - x],$$

kde získaná trojice má maximální člen menší než 1, a proto $[0, x, 1]$ se už v sestupu nikdy neobjeví podle bodu 2.

Podle lemmatu 6 je zřejmé, že všechny trojice, které jsou součástí cyklu, získáme permutací a vynásobením kladnou konstantou z trojice $[0, 1, 1]$.

Věta 8. *Každá nekonstantní trojice nezáporných racionálních čísel sestoupí do cyklu* $[0, t, t]$, *kde* $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$.

Důkaz. Každá takováto trojice má stejný sestup, až na pořadí a násobení kladnou racionální konstantou, jako nějaká nekonstantní trojice $[n_1, n_2, n_3]$ nezáporných celých čísel. Podle bodu 2 máme jen konečně mnoho trojic, které sestup $[n_1, n_2, n_3]$ může obsahovat, je tedy zřejmé, že se po čase dostaneme do stejné trojice, a tudíž se sestup zacyklí. A podle věty 7 to bude cyklus obsahující $[0, a, a]$ pro nějaké přirozené a, tudíž původní trojice sestoupí do cyklu obsahujícího $[0, t, t]$ pro nějaké t racionální.

Věta 9. *Sestup trojice* $[0, x, 1]$, *kde* x *je iracionální číslo z intervalu* $(0, 1)$, *nekončí cyklem (ani triviálním* $[0, 0, 0]$*).*

Důkaz. Po prvním kroku dostaneme $[0, x, 1] \to [x, 1 - x, 1]$. Nová trojice má na základě bodů 3, 4 a 5 stejný sestup až na pořadí a násobení kladnou konstantou jako $[0, y, 1]$, kde $y = \frac{|1-2x|}{1-x}$ je opět iracionální z intervalu $(0, 1)$. Aby se objevil cyklus, muselo by podle věty 7 být $y = 1$, což ale nikdy nenastane. Sestup se tudíž nikdy nezacyklí.

Ducci sequences

Problém sestupu se mně i mým spolupracovníkům zdál příliš hezký na to, aby ho nikdo před námi nezkoumal. Dlouho jsme ale na žádné podobné výsledky nenarazili. Nedávno jsme však zjistili, že problém je pod názvem *Ducci sequences* nebo také *n-number game* velmi dobře prozkoumaný. Například tvrzení, že tribonacciovská čtveřice je v principu jediná, která vede k nekonečnému sestupu, dokázal v roce 1949 Moshe Lotan (`https://scholar.google.com/scholar?q=M.+Lotan%2C+A+problem+in+difference+sets`).

Poděkování

Výsledky své práce SOČ jsem podstatně obohatil ve spolupráci s doc. Ing. Ľubomírou Dvořákovou, Ph.D., a Josefem Tkadlecem, Ph.D., kterým velmi děkuji.