Emil Calda

# Permutace s opakováním a rozmisťování do přihrádek

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 95 (2020), No. 3, 30–32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148460

# Permutace s opakováním a rozmisťování do přihrádek

*Emil Calda, MFF UK Praha*

**Abstrakt.** This article describes how to derive the number of ways in which $n$ identical objects can be located in $r$ boxes.

Nejprve si připomeneme, že permutace s opakováním z $n$ prvků je uspořádaná n-tice, v níž je každý z daných $n$ prvků zastoupen ve stanoveném počtu, každý aspoň jednou. Počet těchto permutací z prvků $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ obsahujících $k_1$-krát prvek $a_1$, $k_2$-krát prvek $a_2$, ..., $k_n$-krát prvek $a_n$, budeme značit $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Pro $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$ dostáváme permutace bez opakování, které tak lze považovat za zvláštní případ permutací s opakováním. Jistě si také vzpomínáte, že pro počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací s opakováním z $n$ prvků platí

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

Jako cvičení na použití tohoto vzorce určíme počet způsobů, jimiž lze seřadit všechna písmena slova MATEMATIKA tak, aby v žádném jejich pořadí nebyla vedle sebe tři písmena A.

Hledaný počet způsobů určíme tak, že od počtu všech možných pořadí deseti písmen tvořících slovo MATEMATIKA odečteme počet těch pořadí, v nichž tři písmena A stojí vedle sebe.

Počet všech možných pořadí deseti písmen slova MATEMATIKA je zřejmě $P'(2, 3, 2, 1, 1, 1)$, neboť jde o permutace s opakováním, v nichž M se opakuje dvakrát, A třikrát, T dvakrát a zbývající písmena E, I, K každé jednou.

Počet pořadí z daných deseti písmen, v nichž tři písmena A stojí vedle sebe, zjistíme tak, že trojici AAA budeme považovat za jedno písmeno, které označíme třeba X, a určíme počet všech pořadí tvořených písmeny M, M, T, T, E, I, K, X. Protože počet těchto pořadí je roven $P'(2, 2, 1, 1, 1, 1)$, je hledaný počet způsobů roven rozdílu

$$P'(2,3,2,1,1,1) - P'(2,2,1,1,1,1) =$$
$$= \frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} - \frac{(2+2+1+1+1+1)!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} =$$
$$= \frac{10!}{2!\,3!\,2!} - \frac{8!}{2!\,2!} = \frac{7 \cdot 8!}{2}.$$

Ukážeme si nyní, jak lze těchto poznatků o permutacích s opakováním použít k řešení úloh o *rozmisťování nerozlišitelných předmětů do přihrádek*.

Dejme tomu, že máme devět nerozlišitelných předmětů, které se mají rozmístit do pěti přihrádek tak, že některé mohou zůstat prázdné. Chceme určit, kolika způsoby to lze provést. Dvě rozmístění přitom považujeme za různá, existuje-li předmět, který není v obou rozmístěních ve stejné přihrádce. K vyřešení použijeme schéma, ve kterém každý z devíti nerozlišitelných předmětů je znázorněn kroužkem a každé ze čtyř přepážek mezi pěti přihrádkami odpovídá svislá čárka. Například rozmístění, v němž jsou v první přihrádce dva předměty, ve druhé tři, ve třetí jeden, ve čtvrté žádný a v páté tři, je znázorněno schématem

$$\mathrm{oo} \mid \mathrm{ooo} \mid \mathrm{o} \mid \mid \mathrm{ooo}.$$

Podobně schéma

$$\mathrm{o} \mid \mathrm{o} \mid \mathrm{o} \mid \mathrm{o} \mid \mathrm{ooooo}$$

představuje rozmístění, ve kterém je v první, ve druhé, ve třetí i ve čtvrté přihrádce jeden předmět a zbývajících pět je v přihrádce páté.

Je zřejmé, že každému rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek odpovídá jediné takovéto schéma a že také obráceně každému takovémuto schématu odpovídá jediné rozmístění těchto předmětů; znamená to, že počet možných rozmístění je roven počtu schémat. Protože však každé takovéto schéma je vlastně permutace s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje devětkrát a druhý čtyřikrát, máme výsledek: Počet způsobů rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek, z nichž některé mohou zůstat prázdné, je dán číslem $P'(9,4) = \frac{13!}{9!\,4!}$.

Jak se tento výsledek změní, budeme-li požadovat, aby žádná přihrádka prázdná nebyla? Dosáhneme toho tak, že do každé z pěti přihrádek vložíme právě jeden z devíti předmětů (je jedno který, protože jsou nerozlišitelné) a zbývající čtyři rozmístíme libovolně. Dostaneme tak: Počet způsobů rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek tak, že žádná nezůstane prázdná, je dán číslem $P'(4,4) = \frac{8!}{4!\,4!}$.

Snadným zobecněním obou předcházejících úloh dostaneme:

*Počet způsobů rozmístění n nerozlišitelných předmětů do r přihrádek v případě, že*

*a) připouštíme prázdné přihrádky, je:*

$$P'(n, r-1) = \frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!};$$

*b) nepřipouštíme prázdné přihrádky, je:*

$$P'(n-r, r-1) = \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}.$$

Poznamenejme ještě, že je zbytečné si tyto vzorce pamatovat; uvedeným způsobem si je v případě potřeby jistě odvodíte sami. Můžete si to ověřit hned v následující úloze.

**Úloha.** Určete, kolika způsoby se dá mezi sedm dětí rozdělit dvacet modrých a patnáct červených kuliček, jestliže kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné a

a) připouštíme, že některé děti nemusejí dostat žádnou kuličku;

b) každé dítě dostane aspoň dvě modré a jednu červenou kuličku.

*Řešení.* a) Nemusí-li některé děti dostat žádnou kuličku, dá se dvacet modrých kuliček mezi ně rozdělit $P'(20,6) = \frac{26!}{20!\,6!}$ způsoby a patnáct kuliček červených $P'(15,6) = \frac{21!}{15!\,6!}$ . Protože každému rozdělení modrých kuliček lze přiřadit $P'(15,6)$ způsobů rozdělení kuliček červených, je hledaný počet způsobů rozdělení kuliček obou barev roven součinu $P'(20,6) \cdot P'(15,6)$.

b) Aby požadovaná podmínka byla splněna, dáme každému dítěti právě dvě kuličky modré a právě jednu červenou; zbývajících šest modrých a osm červených rozdělíme libovolně. Počet způsobů rozdělení kuliček obou barev je v tomto případě roven součinu $P'(6,6) \cdot P'(8,6)$.

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika (Matematika pro gymnázia).* Prometheus, Praha, 2008.

[2] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika.* SNTL, Praha, 1977.