Rozhledy matematicko-fyzikální

Kateřina Panešová

Hausdorffova dimenze fraktálních množin

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 3, 1–7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148455`

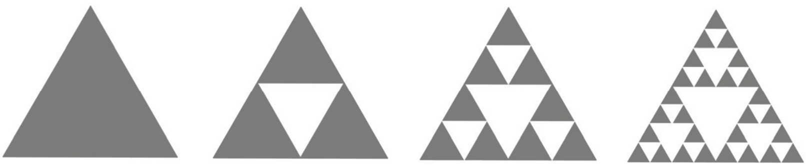
Hausdorffova dimenze fraktálních množin

Kateřina Panešová, Gymnázium Teplice

Abstrakt. V tomto článku se seznámíme s pojmy Hausdorffova míra a dimenze, jejíž výpočet ukážeme na příkladu. Zjistíme, že existují útvary, které „vylézají“ ze svého běžného rozměru a nachází se tak někde mezi křivkou a plošným obrazcem, či mezi plošným útvarem a prostorovým tělesem.

1. Jak změřit Sierpińského trojúhelník

Fraktální útvar známý jako Sierpińského trojúhelník vzniká z plošného trojúhelníka podle kroku znázorněného na obr. 1. „Vykusování“ prostředního trojúhelníku ze všech nově vzniklých trojúhelníků se neustále opakuje neboli iteruje.



Obr. 1: Výchozí trojúhelník a tři iterace Sierpińského trojúhelníka

Přirozeně se můžeme ptát, jaký je obsah takového útvaru. Z obsahu útvaru v každém kroku ubyde právě $\frac{1}{4}$, tedy při každé iteraci se obsah zmenší na $\frac{3}{4}$ předchozí hodnoty obsahu. Toto opakujme donekonečna, abychom dosáhli dokonalého Sierpińského trojúhelníka dle definice, obsah je tedy roven $\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{4})^n$, počítáme-li s jednotkovým obsahem původního celého trojúhelníka. To je zřejmě rovno nule.

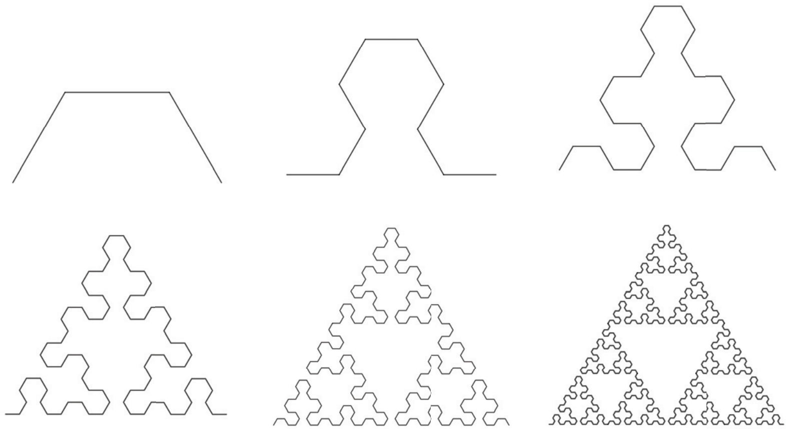
Tento fakt je zarážející, neboť Sierpińského trojúhelník nějaké místo na papíře zabírá a intuitivně se nám příčí prohlásit jej za prázdnou množinu, protože i po všem tom „vykusování“ přeci *něco musí zbýt.* Nebo ne?

Bývá výhodné si složitou úlohu zjednodušit a pozorovat platné zákonitosti na snáze uchopitelném případu. Představme si, že bychom chtěli *změřit* čtverec. Už tato formulace zní nešikovně – jakou vlastnost čtverce přesně chceme měřit? Samozřejmě jeho obsah. Zastavme se zde na chvíli a zamysleme se, proč právě obsah.

Kdybychom měřili jeho objem, byl by nulový, a naopak (ačkoli to zní absurdně) jeho délka[1)] by byla nekonečná. Objem ani délka by nám o našem čtverci neřekly víc než o jakémkoli jiném plošném útvaru – u všech by tyto veličiny nabývaly stejných hodnot: 0 a ∞.

Zdá se proto důležité, ve kterém rozměru čtverec měříme. Pro praktické účely má smysl jej měřit právě ve 2D. Podobně to bude s Sierpińského trojúhelníkem: je-li jeho obsah nulový, zkusme změřit jeho jednorozměrnou délku.

Existuje křivka, která se v limitě shoduje s Sierpińského trojúhelníkem[2)]. Vzniká neustálým zakřivováním sebe sama, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2: Prvních 6 iterací „Sierpińského křivky“

Všimněme si, že její délka se s každou iterací zvětší o $\frac{1}{2}$ své délky, skutečná délka této křivky je tedy rovna $\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2})^n$, je-li délka výchozí úsečky 1. To se blíží k ∞, podobně jako délka dvourozměrného čtverce. Jelikož záleží na tom, v jaké dimenzi útvar měříme, je třeba měřit Sierpińského trojúhelník v jemu příslušné dimenzi, která by mohla být někde mezi 1 a 2. Avšak ještě jsme nedefinovali ani *dimenzi*, ani to, co myslíme tím, že nějakou množinu *měříme*. Než tedy budeme moct pokračovat, je třeba podložit naše intuitivní úvahy pevným formálním základem.

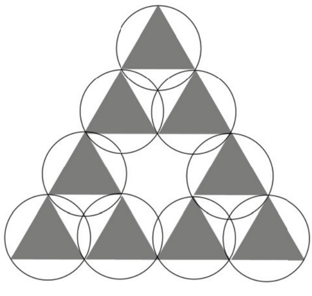
[1)] tzn. délka křivky, která čtverec vypisuje

[2)] důkaz tohoto tvrzení však přesahuje odbornost článku

2. Hausdorffova míra

Hausdorffovu neboli fraktální míru zavedl roku 1918 německý matematik Felix Hausdorff [1]. Tato míra[3)] zobecňuje pojem délky, obsahu i s-rozměrného objemu, dané s však vůbec nemusí přirozené číslo! To umožňuje měřit např. právě fraktální množiny jako Sierpińského trojúhelník.

Hausdorffovu míru $\mathcal{H}^s$ si představme jako funkci (zobrazení), jejíž vstupní hodnotou je množina[4)], kterou chceme změřit. Hausdorffova míra vezme měřenou množinu a celou ji pokryje tzv. pokrývacími množinami určitého zadaného průměru. Na obr. 3 je jedno z možných pokrytí 2. iterace Sierpińského trojúhelníka pokrývacími kruhy.



Obr. 3: Možné pokrytí Sierpińského trojúhelníku

Přitom průměr pokrývacích kruhů je co nejmenší, limitně se blíží nule. Takto vznikají pokrytí, která jsou stále přesnější aproximací skutečného tvaru měřené množiny, ať je jakkoli složitá. Funkce $\mathcal{H}^s$ poté pro každé pokrytí sečte obsahy všech nekonečně malých pokrývacích kruhů daného pokrytí. Možných pokrytí je nekonečně mnoho, a $\mathcal{H}^s$ z obsahů všech možných pokrytí vezme jejich infimum, tzn. buď nejmenší obsah (pokud existuje), nebo hodnotu, ke které se obsahy pokrytí seshora limitně blíží. Tato hodnota je Hausdorffovou mírou měřené množiny.

Opravdu zajímavé je ale to, že Hausdorffova míra tímto způsobem neměří pouze dvourozměrné útvary, nýbrž dokáže podobně změřit libovolnou podmnožinu prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nyní už k formální definici Hausdorffovy míry:

[3)] co je to míra obecně a jaké má vlastnosti, si můžete přečíst v mé práci SOČ

[4)] podmnožina $\mathbb{R}^n$

Definice 1. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ a $0 < \delta \leq \infty$. Definujme

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \;\middle|\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \operatorname{diam} C_j \leq \delta\right\},$$

kde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

Zde je $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$, kde $0 < s < \infty$, známá gamma funkce.

V definici se objevují pokrývací množiny C_j, kde $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$, jejichž průměr $\operatorname{diam} C_j$ je menší nebo roven δ. Tyto množiny pokryjí celou měřenou množinu A. Dle vzorce $\alpha(s)(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2})^s$ se určí s-rozměrný objem určité pokrývací množiny C_j. Zde je $\alpha(s)$ normalizační konstanta, specifická pro dané s, které odpovídá dimenzi, ve které množinu A měříme.

Příklad 1. Spočítejme $\alpha(s)$ pro $s = 2$.

$$\alpha(2) = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(\frac{2}{2}+1)} = \frac{\pi}{\Gamma(2)}$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x} x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[-e^{-x}x\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 1$$

Tedy $\alpha(2) = \pi$, což je přesně konstanta ve známém vzorci pro obsah kruhu πr^2.

Příklad 2. Pro zajímavost uveďme hodnotu $\alpha(s)$ pro některá další běžná s.

$$\alpha(0) = \frac{\pi^0}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = 1$$

Zde bude $\mathcal{H}^0$ běžná *počítací* míra, což znamená, že pro množinu bodů spočte, kolik bodů daná množina obsahuje. Výsledkem bude celé nezáporné číslo (nebo ∞) – počet bodů.

$$\alpha(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 2$$

$$\alpha(3) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{4\pi}{3}$$

Obě konstanty $\alpha(1)$ a $\alpha(3)$[5)] se objevují ve vztazích pro délku úsečky, resp. křivky, a objem koule: délka úsečky $d = 2r$ a objem koule $V = \frac{4\pi}{3}r^3$.

Definice 2. Mějme A a s z definice 1 a definujme *s-rozměrnou Hausdorffovu míru* na $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Hausdorffovu míru tedy získáme, pošleme-li δ z definice 1 k nule, což odpovídá zmíněným stále přesnějším aproximacím měřené množiny A.

3. Hausdorffova dimenze

V definici 2 značí s dimenzi, ve které danou množinu A měříme. Viděli jsme, že pro čtverec by se $\mathcal{H}^1$ limitně blížila nekonečnu a $\mathcal{H}^3$ by byla rovna 0. Intuice nám napovídá, že pro všechny dimenze větší než 3 už bude $\mathcal{H}^s$ čtverce 0 a pro všechny dimenze menší než 1 bude „nekonečná“. Dokonce by se nám líbilo, kdyby tento zlom, při kterém se nekonečná $\mathcal{H}^s$ mění na nulovou, byl jen jeden, konkrétně v $s = 2$.

Naštěstí to platí. Lze dokázat[6)], že pro určitou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ nastane zlom mezi $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ a $\mathcal{H}^s(A) = 0$ právě jednou. Tomuto bodu budeme říkat Hausdorffova dimenze množiny A.

Definice 3. *Hausdorffova (fraktální) dimenze* podmnožiny A prostoru $\mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\dim}(A) = \inf\{0 \leq t < \infty \mid \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \\ = \sup\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.\end{aligned}$$

Poznámka 1. Zápisy *inf* a *sup* znamenají *infimum* a *supremum*. Infimum je nejvyšší dolní mez množiny, supremum nejnižší horní mez. Tyto pojmy jsou nadřazeny pojmům minimum a maximum množiny, které nemusí vždy existovat, zato je-li množina zdola, resp. shora omezená, nutně už má infimum, resp. supremum.

Příklad 3. Jaká je Hausdorffova dimenze Sierpińského trojúhelníka?

[5)] vyčíslení integrálů $\int_0^\infty (e^{-x}\sqrt{x})dx$ a $\int_0^\infty (e^{-x}x^{\frac{3}{2}})dx$ svou náročností přesahuje odbornost tohoto článku

[6)] Důkaz naleznete v mé práci SOČ nebo v [2]

Množinu tvořící Sierpińského trojúhelník označme S. Nejprve vyjádřeme Hausdorffovu míru Sierpińského trojúhelníka, a to tak, že spočteme $\mathcal{H}^s_\delta(S)$ pro $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, kde n značí, o kolikátou iteraci tvorby tohoto fraktálu se jedná. Zřejmě Sierpińského trojúhelník dostaneme pro $n \to \infty$.

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2}}(S) = 3\,\alpha(s)\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^s$$

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{4}}(S) = 9\,\alpha(s)\left(\frac{\frac{1}{4}}{2}\right)^s$$

$$\dots$$

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2^n}}(S) = 3^n\alpha(s)\left(\frac{\frac{1}{2^n}}{2}\right)^s$$

Potom

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{n\to\infty}\left[3^n\alpha(s)\left(\frac{\frac{1}{2^n}}{2}\right)^s\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\alpha(s)\cdot 2^{-s}\left(\frac{3}{2^s}\right)^n\right]$$

Hledejme zlomový bod pro $\mathcal{H}^s(S)$ v závislosti na s. Členy $\alpha(s)$ a 2^{-s} jsou pro dané s konstanty, zato člen $(\frac{3}{2^s})^n$ pro $n \to \infty$ se může buď limitně blížit 0, je-li argument exponenciály menší než 1, nebo „jít do nekonečna", je-li argument exponenciály větší než 1. Zlom tedy nastane pro $\frac{3}{2^s} = 1$ a z toho už

$$\mathcal{H}_{dim}(S) = \log_2 3 \doteq 1.58496.$$

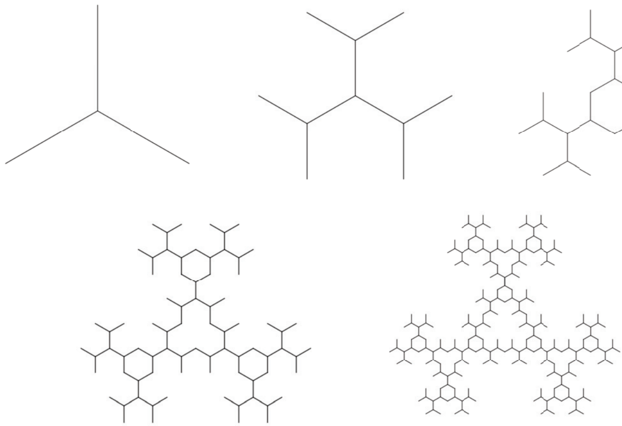
Úloha 1. Prokažte (např. výpočtem), že Hausdorffova dimenze „Sierpińského křivky" (obr. 2) je rovna dimenzi Sierpińského trojúhelníka.

Úloha 2. Prohlédněte si několik prvních iterací fraktálu na obr. 4 a odhadněte jeho fraktální dimenzi v porovnání s Sierpińského trojúhelníkem. Ověřte výpočtem.

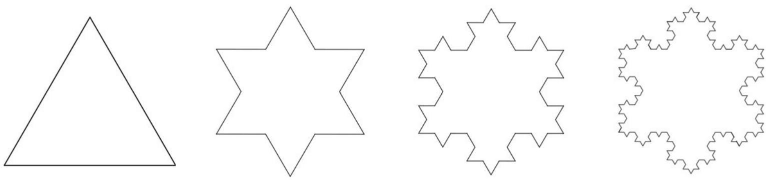
Je tedy zřejmé, že samotné prokázání shodnosti dimenze ještě neznamená, že si jsou fraktály rovny, jako je tomu v případě Sierpińského trojúhelníka a křivky. Danou dimenzi může mít více fraktálů, stejně jako existuje množství různých plošných útvarů.

Úloha 3. Aby to nevypadalo, že všechny fraktály mají dimenzi 1,58496, vypočtěte Hausdorffovu dimenzi Kochovy hvězdy (obr. 5).

Pro lepší představu o fraktálech doporučujeme video [3].



Obr. 4: Prvních 5 iterací fraktálu z úlohy 2



Obr. 5: Výchozí trojúhelník a první tři iterace Kochovy hvězdy

L i t e r a t u r a

[1] Hausdorff, F.: Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen*, roč. 79 (1918), s. 157–179.

[2] Evans, L. C., Gariepy, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[3] Sanderson, G.: *Fractals are Typically not Self-Similar*. Studies in Advanced Mathematics, 3Blue1Brown, 2017, https://www.nagwa.com/en/videos/146197972673/.