Václav Vopravil

Hry Nim

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 2, 16–31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148446`

Hry Nim

Václav Vopravil, Praha

Abstrakt. Článek je věnován nestranným kombinatorickým hrám a matematickým technikám, které mohou být použity při jejich analýze. Naučíme se pracovat s $\mathscr{P}$ a $\mathscr{N}$ pozicemi, s nim součtem a Grundyovými čísly. Sprague–Grundyova věta říká, že každá pozice v konečné nestranné kombinatorické hře je ekvivalentní nějaké hře Nim na jedné hromádce.

Nestranné kombinatorické hry

Obecně *kombinatorické hry* splňují následující vlastnosti:

(1) Hru hrají dva hráči.

(2) Ve hře je konečný počet dosažitelných pozic (jen ve vzácných případech je vhodné uvažovat i hry s nekonečným počtem pozic).

(3) Pravidla hry určují, na které pozice se mohou hráči přesunout. Pravidly je zaručeno, že ve hře není žádná náhoda a že hráči mají úplnou informaci (tj. nehraje se s kostkami ani s kartami).

(4) Hráči se v tazích střídají.

(5) Hra končí, když hráč nemůže táhnout. Koncová pozice určuje i vítěze hry. Hráč, který dosáhne koncovou pozici, vyhrál (normální varianta hry).

(6) Hra končí po konečně mnoha tazích dosažením koncové pozice.

Budeme se zabývat tzv. nestrannými hrami. *Nestranná kombinatorická hra* je kombinatorická hra, ve které nezáleží na tom, který z hráčů je právě na tahu. Jinými slovy, není rozdíl mezi I. a II. hráčem, oba mají z každé pozice na výběr stejné možnosti tahů (první hráč ve hře začíná).

Příklady nestranných her jsou Nim, Výhonky (Sprouts)[6] nebo Zelený Hackenbush.[7] Jiné známé hry, např. křížky a kolečka, šachy

[6] Na začátku je na papíře n puntíků. Jeden tah spočívá ve spojení dvou puntíků čarou a nakreslení puntíku někam na nakreslenou čáru. Přitom se žádné dvě čáry nesmějí křížit a z žádného puntíku nesmí vést více než tři čáry. Hráči se pravidelně střídají v tazích, kdo nemá tah, prohrál.

[7] Nechť je dán neorientovaný kořenový graf G a v něm uzel P. Dva hráči se střídají v tazích. Hráč ve svém tahu vybere libovolnou hranu grafu a odebere ji. Pokud nějaká hrana přestane souviset s uzlem P, odstraní se také. Hráč, který nemůže táhnout (tj. graf se skládá pouze z uzlu P), prohrál. Často se při grafické reprezentaci uzel P zobrazuje jako země, na které jsou navázány další prvky grafu.

apod., nejsou nestranné hry (hráči nemají stejné možnosti tahů). Takové hry se nazývají *partyzánské*.

Úvod do hry Nim

Nyní se zaměříme na jednoduchou hru Nim, jednu z nejznámějších nestranných kombinatorických her. Její studium se ukázalo v oblasti kombinatorických her jako klíčové. Protože existuje mnoho verzí této hry, podíváme se na jednu z nejběžnějších. Důvod pro studium hry Nim je ten, že všechny nestranné kombinatorické hry se mohou převést na studium hry Nim.

Hra Nim se hraje takto: máme tři hromádky kamenů, na kterých je m, n, k kamenů. Pozici označíme Nim $[m, n, k]$. Každý tah se skládá z výběru jedné hromádky a z ní odebrání několika kamenů. V jednom tahu není možné odebírat kameny z více hromádek. Z hromádky je možné sice odebrat libovolný počet, vždy ale alespoň jeden kámen. Hráč se svého tahu nemůže vzdát. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Základní analýza hry Nim

Ve hře Nim existuje jediná koncová pozice, totiž Nim $[0, 0, 0]$. Hráč, který ji dosáhne, vyhrál. Pozice, ve kterých existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, budeme označovat $\mathscr{P}$. Tedy i koncové pozice budou $\mathscr{P}$.

Také řešení jednohromádkové varianty hry Nim je jednoduché. Hráč na tahu odebere celou hromádku. Každou pozici Nim $[m, 0, 0]$ pro $m > 0$ označíme $\mathscr{N}$ (vyhraje hráč na tahu).

Uvažujme dvouhromádkovou variantu hry Nim. Je jednoduché si rozmyslet, že pozice Nim $[1, 1, 0]$, Nim $[2, 2, 0]$, … jsou $\mathscr{P}$ pozice (vyhraje druhý). První hráč nemůže vyhrát, protože po jeho tahu druhý hráč zahraje přesně stejný tah ve zbývající hromádce. Zbylé pozice jsou $\mathscr{N}$, stačí prvním tahem dorovnat obě hromádky a použít předcházející strategii. Obecně hry Nim $[m, m, 0]$ jsou $\mathscr{P}$ pozice a hry Nim $[m, n, 0]$ pro $m \neq n$ jsou $\mathscr{N}$ pozice.

Pokud jsou všechny tři hromádky neprázdné, je situace složitější. Pozice Nim $[1, 1, 1]$, Nim $[1, 1, 2]$, Nim $[1, 1, 3]$ a pozice Nim $[1, 2, 2]$ jsou všechny $\mathscr{N}$ pozice, protože prvním tahem se hráč může dostat do pozice Nim $[1, 1, 0]$ nebo Nim $[0, 2, 2]$. Hrubou silou můžeme analyzovat i další pozice. Zastavme se ještě u pozice Nim $[1, 2, 3]$. V této pozici má první hráč na výběr ze 6 tahů. Pokusí-li se odebrat první hromádku, neuspěje, protože pozice Nim $[0, 2, 3]$ je výhodná pro soupeře. (Hráči nedělají chyby.) Odebere-li jeden kámen ze druhé nebo třetí hromádky, opět se dostane do nevýhodné pozice, kterou jsme již analyzovali. Odebere-li hráč dva kameny ze druhé nebo třetí hromádky, opět soupeř nalezne vyhrávající odpověď podle předcházejících analýz. Zkusí-li hráč odebrat tři kameny z poslední hromádky, opět nevyhraje. Úplnou analýzou jsme ukázali, že neexistuje žádný dobrý první tah, a tedy hra $\textsc{Nim}[1,2,3]$ je $\mathscr{P}$. Případ $\textsc{Nim}[1,2,n]$ pro $n > 3$ se naopak převede na předcházející, a tedy se jedná o $\mathscr{N}$ pozice. Takto bychom mohli pokračovat dále, např. pozice $\textsc{Nim}[1,4,5]$ a $\textsc{Nim}[2,4,6]$ jsou $\mathscr{P}$ pozice atd. Zobecnění je ale obtížné. Pro analýzu těchto pozic využijeme tzv. nim součet.

Pro ilustraci $\mathscr{P}$ a $\mathscr{N}$ pozic uveďme příklad další nestranné hry.

Příklad 1 (Bachetova hra, 1612)**.** HRA S ODEČÍTÁNÍM. Uvažujme následující nestrannou kombinatorickou hru. Nechť x_0 je nezáporné celé číslo. Hra začíná jednou hromádkou s x_0 kameny. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu odebírají z hromádky 1 až 4 kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Podívejme se na vyhrávající strategii v této hře. Hru začínající s nulovým počtem kamenů prohraje první hráč. Pokud na počátku hry jsou na hromádce $1,2,3$ nebo 4 kameny, hráč na tahu odebere všechny kameny a vyhraje. Hra s pěti kameny je vyhrávající pro druhého hráče. Hráč po svém tahu zanechá na hromádce $4,3,2$ nebo jeden kámen. Hra, která se hraje se šesti kameny, je vyhrávající pro prvního hráče (stačí odebrat jeden kámen a použít předcházející rozbor). Podobně, je-li na hromádce 7, 8, 9 kamenů, vyhraje první hráč, který zanechá soupeři pět kamenů na hromádce. Budeme-li v naší analýze pokračovat tímto způsobem, dostaneme dvě množiny: jednak množinu $\mathscr{N}$ kladných celých čísel x, ve kterých si první hráč (tj. *n*ásledující) může vynutit výhru, kde x je počet kamenů na hromádce. Ve zbylých pozicích $\mathscr{P}$ má vyhrávající strategii druhý (*p*ředcházející hráč). Např. v naší hře s odčítáním je $\{0,5\} \subset \mathscr{P}$ a $\{1,2,3,4,6,7,8,9\} \subset \mathscr{N}$. Budeme-li postupovat tímto způsobem dále, můžeme potom indukcí dokázat, že pozice nezáporných celých čísel násobků 5 je $\mathscr{P}$ pozice a zbylé pozice jsou $\mathscr{N}$.

Úloha 1. Jak asi hra dopadne, pokud pravidla hry umožňují odebírat z hromádky (varianta hry s odebíráním kamenů):

(a) 2 nebo 3 kameny,
(b) 1, 3 nebo 4 kameny,
(c) 3, 5 nebo 8 kamenů,
(d) 2^n kamenů, kde $n = 0,1,2,\ldots$,
(e) n^2 kamenů, kde $n = 1,2,\ldots$?

Prohrává hráč, který nemůže odebrat kámen.
Nápověda: Posloupnosti začínají
(a) $\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\ldots$,
(b) $\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\ldots$,
(c) $\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\mathscr{N}\ldots$,
(d) $\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{N}\ldots$,
(e) $\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{N}\ldots$

Modulární aritmetika

Pro studium her Nim zavedeme užitečný zápis.

Definice 1. Je dáno celé číslo $m > 1$ a dvě celá čísla a, b. Říkáme, že *čísla a, b jsou ekvivalentní modulo m* právě, když $a - b$ je násobkem m. Píšeme $a \equiv b \pmod{m}$.

Například $11 \equiv 2 \pmod{3}$. Setkáme se i se zápisem $a \pmod{m}$ pro zbytek, dělíme-li a číslem m. Tedy $11 \pmod{3} = 2$. V naší Bachetově hře pozice pro $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ jsou vyhrávající pro prvního hráče a prohrávající pro $n \equiv 0 \pmod{5}$. V úloze 1 (b) jsou pozice $0, 2 \pmod{7}$ $\mathscr{P}$ pozice a zbylé $\mathscr{N}$ pozicemi. Znamená to, že bude-li se hrát např. na hromádce se 79 kameny, je nevýhodné začínat, protože $79 \equiv 2 \pmod{7}$.

Nim součet

Pro další analýzu hry Nim je důležitý tzv. nim součet. *Nim součet* (který označujeme také $\oplus$) dvou nezáporných celých čísel je jejich součet v binárním zápisu „bez přenosu do vyšších řádů“. Víme, že pro každé nezáporné celé číslo x existuje jeho binární rozvoj tvaru

$$x = \sum_{i=0}^{m} x_i 2^i = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + x_1 2 + x_0$$

pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Každé x_i je buď 0, nebo 1. Pro čísla ve dvojkové soustavě používáme také zápis $(x_m x_{m-1} \ldots x_1 x_0)_2$. Např. $(01101)_2 = 13$ nebo $(11101)_2 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$.

Připomeňme na konkrétním příkladu dva nejznámější algoritmy pro hledání binárního rozvoje. Pro číslo 14 platí $14 : 2 = 7(0)$, $7 : 2 = 3(1)$, $3 : 2 = 1(1)$, $1 : 2 = 0(1)$. Zbytky po celočíselném dělení určují binární reprezentaci: $(1110)_2$, tj. $8 + 4 + 2$. Rozvoj čísla 14 dostaneme také tak, že postupně odečítáme největší mocninu dvou nepřevyšující dané číslo.

Například $14 = 8 + 6 = 8 + 4 + 2$ nebo $30 = 16 + 14 = 16 + 8 + 6 = 16 + 8 + 4 + 2$.

Nim součet dvou nezáporných celých čísel nalezneme tak, že obě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě a sečteme samostatně koeficienty řádů v aritmetice modulo 2.

Definice 2. *Nim součet* $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$ a $(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2$ *zapisujeme*

$$(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0)_2,$$

kde pro každé $0 \le k \le m$ je $z_k \equiv x_k + y_k \pmod 2$, tj. $z_k = 1$, je-li $x_k + y_k = 1$, a $x_k + y_k = 0$ a $z_k = 0$ v ostatních případech.

Uveďme příklad:

$$\begin{array}{r} 5 = 101_2 \\ \oplus\ 13 = 1101_2 \\ \hline 1000_2 = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 = 1101_2 \\ \oplus\ 12 = 1100_2 \\ \oplus\ 8 = 1000_2 \\ \hline 1001_2 = 9 \end{array}$$

Nim součet je asociativní (tj. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$) a komutativní (tj. $x \oplus y = y \oplus x$), protože sčítáme modulo 2. Tedy výraz $x \oplus y \oplus z$ můžeme psát bez závorek. Dále 0 je nulový prvek (protože platí $0 \oplus x = x$) a každé číslo má i opačné ($x \oplus x = 0$). Pro nim součet platí i „krácení“ (je-li $x \oplus y = x \oplus z$, potom $x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z$, tedy $y = z$).

Nim součet je možné nalézt v matematice i v jiných podobách: jako logickou spojku „vylučovací nebo $\veebar$“, bitový XOR nebo jako operaci definovanou pro jednotlivé bity tabulkou

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\ .$$

Je-li $n = \sum_{i \in A} 2^i$, $m = \sum_{i \in B} 2^i$, $C = A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, potom také $n \oplus m = \sum_{i \in C} 2^i$. Nim součet se objevuje jako operace sčítání ve vektorovém prostoru $GF[2]$. V počítačových jazycích se označuje také jako „stříška“ ^.

Věta 1 (Bouton, 1901). *Pozice* NIM$[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *n hromádkové varianty hry* NIM *je* $\mathscr{P}$ *pozice, právě když* $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.

Důkaz věty vynecháme.

Vítězná strategie je založena na dvojkové soustavě, v každém tahu je třeba zahrát tak, aby se soupeř dostal do nulové pozice, ve které existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Nulové pozice jsou pozicemi, ve kterých nim součet $\oplus$ na hromádkách je nulový. Po rozkladu počtu kamenů na jednotlivých hromádkách použijeme dvě jednoduchá pravidla: $2^p \oplus 2^p = 0$ a pro $p \neq q$ je $2^p \oplus 2^q = 2^p + 2^q$. Například pro hru v postavení $\textsc{Nim}[7,5,3]$ (tři hromádky se 7, 5 a 3 kameny) je rozklad $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, $5 = 2^2 + 2^0$ a $3 = 2^1 + 2^0$. Nim součet $7 \oplus 5 \oplus 3 = (4+2+1) \oplus (4+1) \oplus (2+1) = (\cancel{4} + \cancel{2} + \cancel{1}) \oplus (\cancel{4} + \cancel{1}) \oplus (\cancel{2} + 1) = 1$ je nenulový, díky tomu existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. Do nulové pozice se dostaneme odebráním jednoho kamene dokonce z libovolné hromádky.

Sprague–Grundyova věta a její aplikace

V nestranné hře je možné definovat dva typy pozic. Pozice $\mathscr{P}$ (**p**ředcházející hráč vyhrává) a $\mathscr{N}$ (**n**ásledující hráč vyhrává, tj. hráč na tahu). Na tomto principu můžeme definovat rekurentní tzv. značkovací algoritmus. Algoritmus vypadá takto:[8)]

(1) Všechny koncové pozice označíme $\mathscr{P}$.
(2) Všechny pozice, ze kterých se dostaneme jedním tahem do pozice $\mathscr{P}$, označíme $\mathscr{N}$.
(3) Všechny pozice, ze kterých se dostaneme jedním tahem pouze do pozic $\mathscr{N}$, označíme $\mathscr{P}$.
(4) Pokud nenajdeme novou $\mathscr{P}$ pozici z bodu (3), s označováním skončíme. Jinak pokračujeme bodem (2).

Charakteristika $\mathscr{P}$ a $\mathscr{N}$ pozic ve hrách v normální variantě:

(1) Všechny koncové pozice jsou $\mathscr{P}$ pozice.
(2) Z každé $\mathscr{N}$ pozice vede alespoň jeden tah do $\mathscr{P}$ pozice.
(3) Z každé $\mathscr{P}$ pozice vedou všechny tahy (jsou-li nějaké) do $\mathscr{N}$ pozic.

Například pro hru z úlohy 1 (a) pro $n = 9$ jsou dvě koncové pozice $n_0 = 0$ a $n_1 = 1$,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$\mathscr{P}/\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	…

.

8) V nestranné kombinatorické hře v normální variantě můžeme vždy postupovat zpětnou indukcí.

Protože pozice $0, 1$ jsou $\mathscr{P}$, pozice $0 + 2$, $0 + 3$ a $1 + 2$, $1 + 3$ budou $\mathscr{N}$. Následující neoznačená pozice je nutně $\mathscr{P}$, a tedy pozice $5 + 2$, $5 + 3$ jsou $\mathscr{N}$. Následující neoznačená pozice je 6, kterou označíme $\mathscr{P}$, a pozice $6 + 2$ a $6 + 3$ jsou opět $\mathscr{N}$, ... Tato metoda nápadně připomíná Eratosthenovo síto. Jak asi dopadne hra pro $n = 17$? Tímto způsobem může být analyzováno mnoho dalších her. Např. hra z úlohy 1 (b) má začátek tabulky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathscr{P}/\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	...

V betlových variantách (misère) jde o to donutit protihráče odebrat poslední kámen. Charakteristika $\mathscr{P}$ a $\mathscr{N}$ pozic ve hrách v betlové variantě je podobná, ale ne úplně opačná:

(1) Všechny koncové pozice jsou $\mathscr{N}$ pozice.
(2) Z každé $\mathscr{P}$ pozice vedou všechny tahy (jsou-li nějaké) do $\mathscr{N}$ pozic.
(3) Z každé $\mathscr{N}$ pozice vede alespoň jeden tah do $\mathscr{P}$ pozice.

Grundyovy hodnoty

Pro definování Grundyových hodnot $\mathscr{G}$ musíme nejdříve definovat operátor mex, princip nejmenšího vyloučeného čísla. Označíme $\operatorname{mex} M$ nejmenší nezáporné celé číslo, které se v množině M nevyskytuje, tj. $\operatorname{mex} M = \min(\mathbb{N} \setminus M)$. Vezměme třeba množinu $M = \{0, 1, 3, 5\}$, potom $\operatorname{mex}\{0, 1, 3, 5\} = 2$. Jiným příkladem je $\operatorname{mex} \varnothing = 0$, $\operatorname{mex}\{0, 1, 2, 3\} = 4$ nebo $\operatorname{mex}\{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} = n$.

Grundyova hodnota nestranné hry G se označuje $\mathscr{G}(G)$ a je rekurzivně definována takto:

$$\mathscr{G}(G) = \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(H);\ \text{z } G \text{ můžeme táhnout do } H\}\,.$$

V Bachetově hře (příklad 1) spočítáme $\mathscr{G}(0) = 0$, $\mathscr{G}(1) = 1$, $\mathscr{G}(2) = 2$, $\mathscr{G}(3) = 3$, a dále $\mathscr{G}(n) = \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(n-1), \mathscr{G}(n-2), \mathscr{G}(n-3), \mathscr{G}(n-4)\}$, protože můžeme odebírat pouze 1, 2, 3 nebo 4 kameny.

Ve hře Nim je na jedné hromádce Grundyova hodnota jedné hromádky s n kameny $\mathscr{G}(\textsc{Nim}[n]) = n$, protože můžeme odebrat 1, 2, ..., n, zbude souvislá řada $n-1$, $n-2$, ..., 0, která má mex rovný n.

V úloze 1 (b) je $\mathscr{G}(n) = \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(n-1), \mathscr{G}(n-3), \mathscr{G}(n-4)\}$. Například $\mathscr{G}(13) = \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(12), \mathscr{G}(10), \mathscr{G}(9)\} = \operatorname{mex}\{3, 1, 0\} = 2$ atd.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathscr{G}(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	...

Není těžké si rozmyslet (indukcí), že platí

$$\mathscr{G}(n) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n \equiv 0, 2 \pmod 7 \\ 1, & \text{je-li } n \equiv 1, 3 \pmod 7 \\ 2, & \text{je-li } n \equiv 4, 6 \pmod 7 \\ 3, & \text{je-li } n \equiv 5 \pmod 7. \end{cases}$$

Následující věta nám dává globální pohled na nestranné hry. Důležitým důsledkem je, že všechny konečné nestranné hry mají nějakou Grundyovu hodnotu.

Věta 2 (Sprague–Grundyova věta)**.** *Každá konečná nestranná hra G je ekvivalentní hře* Nim *na jedné hromádce.*

Velikost této hromádky odpovídá Grundyově hodnotě pozice. Získáme tím i odpověď na otázku, jak hra dopadne, kdo vyhraje a o kolik.

Pozice P je $\mathscr{N}$, je-li $\mathscr{G}(P) \neq 0$. Pozice P je $\mathscr{P}$, je-li $\mathscr{G}(P) = 0$. U her nás bude zvláště zajímat hodnota rovna 0. Tato hodnota odpovídá pozici $\mathscr{P}$, která je vyhrávající pozicí (pro hráče, který nezačíná). V normální variantě všechny koncové pozice mají Grundyovu hodnotu 0. Je-li $\mathscr{G}(P) \neq 0$, potom existuje tah do pozice P' s Grundyovou hodnotou $\mathscr{G}(P') = 0$. Je-li $\mathscr{G}(P) = 0$, potom všechny tahy (jsou-li takové) z pozice P vedou do pozic P' takových, že jejich Grundyova hodnota je $\mathscr{G}(P') \neq 0$. Tvrzení okamžitě plyne z definice mex.

Disjunktní součet her H, K zapisujeme $H + K$. V této hře si musí hráč vybrat svůj pravidly povolený tah buďto ve hře H, nebo K, přičemž druhá hra zůstane nezměněna (hraje se simultánně). Jeden z důležitých výsledků teorie je, že pro $G = H + K$ platí $\mathscr{G}(G) = \mathscr{G}(H) \oplus \mathscr{G}(K)$. Například hra Nim na třech hromádkách je součtem tří jednohromádkových her Nim. Grundyova hodnota součtu dvou jednohromádkových variant je $\mathscr{G}(\textsc{Nim}[m, n]) = \mathscr{G}(m) \oplus \mathscr{G}(n)$.

Hledání vyhrávající strategie

Ve hře je důležité dostat se do pozic $\mathscr{P}$ nebo na pozici 0, uvažujeme-li její Grundyovu hodnotu.

Příklad 2. Předpokládejme, že se hraje hra NIM na hromádkách se 6, 7 a 3 kameny. Nejdříve zapíšeme počty kamenů na jednotlivých hromádkách ve dvojkové soustavě. Dostaneme $6 = (110)_2$, $7 = (111)_2$ a $3 = (011)_2$. Potom výsledky zaznamenáme do tabulky:

$$\begin{array}{r|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ \oplus\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

a po sloupcích sečteme modulo 2. Vyhrávající tah je vytvoření takové konfigurace, aby v každém sloupci byl sudý počet jedniček. Stačí odebrat dva kameny z libovolné hromádky (existují tři tahy).

Úloha 2. Zahrajeme si hru ODEBÍRÁNÍ ČTVERCŮ s nějakou velkou pozicí (např. $n = 100$ nebo 75) a lze odebírat pouze čtvercová čísla 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... (viz úloha 1 (e)). Získáme:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathscr{N}/\mathscr{P}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	...
$\mathscr{G}(n)$	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	0	...

$\mathscr{G}(100) = 4, \mathscr{G}(75) = 6$. Spočítejte Grundyovu hodnotu pozice $[18, 26, 28]$ a ukažte, že se jedná o $\mathscr{N}$ pozici. Nalezněte první optimální tah.

Řešení: $\mathscr{G}([18, 26, 28]) = 7$, protože $\mathscr{G}([18, 26, 28]) = \mathscr{G}([18]) \oplus \mathscr{G}([26]) \oplus$ $\oplus \mathscr{G}([28]) = 1 \oplus 2 \oplus 4 = 7$. Protože Grundyova hodnota je nenulová, jedná se o $\mathscr{N}$ pozici. Stačí odebrat 1 z poslední hromádky, $\mathscr{G}([27]) = 3$ a $1 \oplus 2 = 3$.

Příklad 3. Hraje se podle těchto pravidel: hráč na tahu si vybere jednu hromádku a z ní odebere alespoň jeden kámen. Je však třeba ještě dodržovat tato dvě pravidla: pokud je na hromádce sudý počet kamenů, nelze odebrat celou hromádku. Pokud je na hromádce lichý počet kamenů, může hráč odebrat i celou hromádku.

Pro tuto hru jsou Grundyovy hodnoty definovány takto: v případě lichého počtu $\mathscr{G}(2k - 1) = k$, jinak $\mathscr{G}(2k) = k - 1$. Vyhrávající strategie je analogická jako ve hře NIM. Musíme se ujistit, že jsme v pozici rovné 0. Proto musíme změnit jednu z hromádek tak, aby byl nim součet roven 0. Existují dvě koncové pozice, kdy zbývají 0 nebo 2 kameny.

Uvažujme např. pozici $H = [16, 18, 13]$. Pro každou hromádku spočítáme její Grundyovu hodnotu podle předcházejících dvou definic. Začíná-li první hráč: Grundyovy hodnoty jsou $\mathscr{G}(16) = \mathscr{G}(2 \cdot 8) = 8 - 1 = 7$, $\mathscr{G}(18) = \mathscr{G}(2 \cdot 9) = 9 - 1 = 8$ a $\mathscr{G}(13) = \mathscr{G}(2 \cdot 7 - 1) = 7$. Nim součet Grundyových hodnot je $7 \oplus 8 \oplus 7 = 8$. Vyhrávající strategie spočívá v odebrání tolika kamenů, aby nim součet byl nula. Chceme tedy, aby Grundyova hodnota byla nula. Když odebereme z prostřední hromádky 15 kamenů, zbudou tam 3, tj. $G(3) = G(2 \cdot 2 - 1) = 2$, což není 0.

Vyhrávající strategie hry Dr. Nim

Hra Dr. Nim se hraje takto: Na stole leží několik zápalek (kladné celé číslo). Dva hráči se v tazích střídají, v každém tahu lze odebrat 1, 2 nebo 3 zápalky. Hráč, který odebere poslední zápalku, prohrál.[9)]

Tvrzení 2.1. *První hráč vyhraje (má vyhrávající strategii), když počet zápalek n není $4k + 1$ pro žádné celé nezáporné číslo k.*

Důkaz: Strategie je pravidlo, kolik lze odebrat, pokud na stole leží n zápalek. Ukážeme, že je-li $n = 4k+1$, potom existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, která hráči zaručí výhru. (Indukcí.) Indukční hypotéza je pro každé $k \in \mathbb{N}$, je-li $n = 4k + 1$, potom první hráč prohraje, a je-li $n = 4k, 4k + 2, 4k + 3$, vyhraje první hráč. Vyčerpáme všechny logické možnosti. Tvrzení dokážeme silnou indukcí a začneme případem $n = 1$.

První krok: Je-li na hromádce pouze jedna zápalka, začínající hráč prohraje, protože musí odebrat (poslední) zápalku.

Indukční krok silné indukce: Předpokládejme, že tvrzení platí pro 1 až n a ukážeme, že tvrzení platí i pro $n + 1$. Indukční krok se rozpadne na tyto 4 případy:

1. Pro $n + 1 = 4k + 1$ ukážeme, že první (začínající) hráč prohraje. První krok důkazu jsme již provedli. Nyní tedy předpokládejme, že $n + 1 \geq 5$. První hráč může odebrat $1, 2$ nebo 3 zápalky. Pokud odebere jednu zápalku, zbývající počet zápalek je $n = 4k$. Díky indukčnímu předpokladu silné indukce hráč, který je na tahu, má z této pozice vyhrávající strategii. Tedy hráč, který zahrál do této pozice, prohraje. Podobně: pokud hráč odebere 2 zápalky, zůstane na stole $4(k - 1) + 3$ zápalek a opět prohraje ze stejného důvodu. Analogicky, pokud odebere 3 zápalky, dostane se hráč do nevýhodné pozice a nemůže vyhrát.

[9)] Hra s odečítáním v betlové variantě.

2. Pro $n + 1 = 4k$ ukážeme, že první hráč vyhraje. Pokud hráč na tahu odebere 3 zápalky, druhý hráč je v pozici $n = 4(k - 1) + 1$ a díky indukčnímu předpokladu silné indukce, prohraje.

3. Pro $n + 1 = 4k + 2$ ukážeme, že (opět) první hráč vyhraje. Zde stačí odebrat 1 zápalku. Druhý hráč je v pozici $4k + 1$ a prohraje, jako v předcházejícím případě.

4. Pro $n+1 = 4k+3$. Ukážeme, že první hráč vyhraje. Pokud I. hráč odebere 2 zápalky, druhý je v pozici 4k+1 a prohraje.

n	1	2	3	4	…	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+4$	$4k+5$
	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	…	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{N}$	$\mathscr{P}$

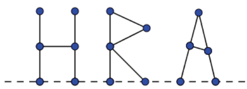
Úloha 3 (Prvočíselný Nim, Pim. Claude E. Shannon (1955))**.** Uvažujme hru Pim, která se hraje jako obvyklý Nim s tím omezením, že lze odebírat pouze prvočíselný počet kamenů nebo jeden kámen.

(a) Nalezněte Grundyovy hodnoty $\mathscr{G}(n)$ pro hromádky s $0 < n \leq 11$ kameny.
(b) Nalezené výsledky zobecněte pro libovolné n.
(c) Nalezenou hypotézu dokažte!
(d) Analyzujte postavení Pim$[7, 19, 23, 56]$ a najděte optimální první tah.

Úloha 4 (Hra Odeber a rozděl)**.** Na hromádce je 100 kamenů. Tah spočívá v odebrání 3 nebo 5 kamenů a následném rozdělení hromádky na dvě (v jiné variantě na dvě různé hromádky). Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

Zelený Hackenbush

Pravidla: Zelený Hackenbush[10)] se hraje na obrázku jako je HRA.



Dva hráči střídavě odebírají slámky (hrany) z obrázku (grafu). Stébla (neboli brčka) nebo smyčky[11)] jsou navzájem spojeny svými koncovými

10) John H. Conway, 1937–2020.

11) Smyčka je hrana vedoucí z uzlu do něj samotného.

uzly (koleno) a se základnou. Hráč při svém tahu odebere jednu slámku a všechny ostatní, které přestanou souviset se základnou. Základna se označuje čárkovaně. Hráč, který odebere poslední slámku (nebo smyčku), vyhraje.

Zelený Hackenbush je příkladem nestranné hry (oba hráči mají stejné možnosti tahů) a přirozeně hodnotu každého obrázku umíme rekurzivně spočítat pomocí Grundyovy posloupnosti. Podle Sprague–Grundyovy věty má Zelený Hackenbush za své hodnoty Grundyovy hodnoty. Ukážeme techniky, jak zredukovat některé komplikované pozice na hru Nim, kterou již umíme řešit. Podrobnosti, včetně důkazů, čtenář najde v [3, 5, 6].

Některé pozice spočítáme pomocí následujících principů.

Princip bambusových stonků

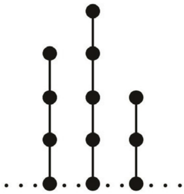
Obrázky nebudou obsahovat kružnice ani větvení, pouze stonky bambusu. Hraje se tak, že se odebere slámka a všechny nad ní. Hraje se v normální variantě.

Jednoduchý příklad pozice Zeleného Hackenbushe je jeden bambusový stonek délky n, ze kterého může být odebráno $1, 2, \ldots, n$ slámek (od vrcholu) a na zemi zůstane bambusový stonek délky $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 0. Jistě nejlepším tahem je odebrat nejspodnější stéblo související s kořenem (oba hráči chtějí odebrat poslední slámku).

Budeme-li hrát na více bambusových stéblech současně, tahem v jedné komponentě neovlivníme ostatní a dostaneme stéblo kratší délky. Dvě stébla stejné délky (počet slámek) mají nulový součet (pozice $\mathscr{P}$); hraje-li se na dvou různých, potom se jedná o pozici $\mathscr{N}$, stačí počet dorovnat a použít předcházející strategii. Situaci se třemi (a více) stonky spočítáme pomocí nim součtu.

Z toho ale plyne, že bambusový stonek (jeho Grundyova hodnota) se hraje jako jednohromádková hra Nim$[n]$. Na několika bambusových stoncích se hraje stejně jako ve hře Nim na několika hromádkách. Takže okamžitě známe výsledek hry.

Příklad 4. Abychom našli vyhrávající strategii, vezmeme jednoduchou situaci ve tvaru bambusových stonků (jako na obr. 1). Tyto stonky mohou být porovnány s hromádkami kamenů. Jeden stonek odpovídá hře Nim$[n]$, která má hodnotu n, kde n je počet slámek ve stonku (délka stonku). Od této chvíle můžeme také aplikovat vyhrávající strategii jako ve hře Nim.



Obr. 1

Chceme-li nalézt vyhrávající strategii ve hře se třemi stonky délky 3, 4 a 2, uvažujme konfiguraci $\textsc{Nim}[3,4,2]$, tedy tři hromádky se $3,4$ a 2 kameny. Spočítáme jejich nim součet:

$$3 \oplus 4 \oplus 2 = (011)_2 \oplus (100)_2 \oplus (010)_2 = 5.$$

Pozice je nenulová, jedná se tedy o $\mathscr{N}$ pozici (první hráč vyhrává). Chceme-li vyhrát, musíme zahrát do $\mathscr{P}$ pozice (předcházející hráč vyhrává). Upravíme tedy nim součet tak, aby se rovnal nule. Stačí odebrat z druhé hromádky tři kameny. Stejný princip lze aplikovat na bambusové stonky. Stačí odebrat z prostředního stonku druhou slámku odspodu, tj. odebereme tím pádem tři vrchní slámky.

Bude-li se hrát na třech bambusových stoncích délek 3, 4, 5, hra bude ekvivalentní hře $\textsc{Nim}[3,4,5]$ a její hodnota je

$$3 \oplus 4 \oplus 5 = (\cancel{1} + 2) \oplus (\cancel{4}) \oplus (\cancel{4} + \cancel{1}) = 2$$

($\mathscr{N}$ pozice). To znamená, že pozice $3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 2$ je $\mathscr{P}$ pozice, a je tedy nevýhodné začínat.

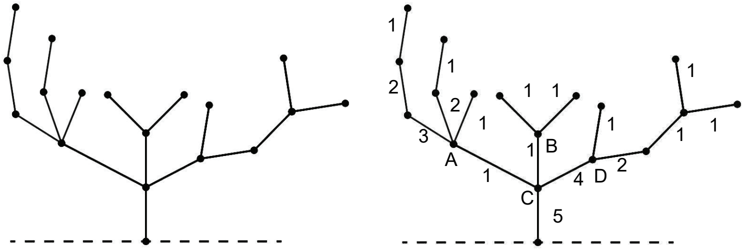
Princip stromů

Nim součet lze s výhodou použít pro řešení stromů.

Bambusový stonek nahradíme stromem (později řadou stromů, čemuž bude odpovídat disjunktní součet her). Strom je souvislý kořenový graf bez kružnic spojen se zemí jedním uzlem. Začneme tím, že označíme větve jejich Grundyovou hodnotou (tj. délkou stonku), které jsou připojeny ke grafu, od vrcholu (listí). Pokud se v jednom uzlu setká několik stonků, spočítáme jejich nim součet a nahradíme je stonkem této délky, tj. délkou $\mathscr{G}(P + Q) = \mathscr{G}(P) \oplus \mathscr{G}(Q)$. Tento proces rekurzivně opakujeme, dokud nezměníme graf na jediný stonek bambusu. Tento stonek představuje Grundyovu hodnotu celého grafu.

Máme-li dva (a více) kořenové stromy (les), lze kořeny ztotožnit (vznikne keř), ale hodnota hry zůstane nezměněna.

Příklad 5.



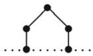
Hra na obrázku má Grundyovu hodnotu rovnou 5. Například Grundyova hodnota $A = \mathscr{G}(3) \oplus \mathscr{G}(2) \oplus \mathscr{G}(1)$, $D = \mathscr{G}(1) \oplus \mathscr{G}(2)$ a hodnota stébla pod C a tím i celého obrázku je $1 + (\mathscr{G}(1) \oplus \mathscr{G}(1) \oplus \mathscr{G}(4))$. Máme-li totiž situaci, že na jednu slámku je „navěšena“ hra G, potom výsledný graf (strom) má Grundyovu hodnotu $1 + \mathscr{G}(G)$. Důkaz indukcí by byl přes počet hran grafu G.

Princip fúze

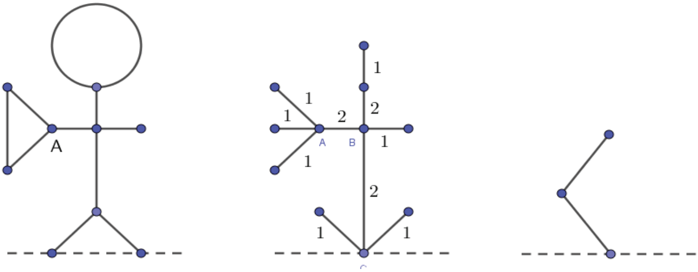
K výpočtům hodnot některých složitějších konfigurací nám pomůže *princip fúze*. Nebudeme pracovat pouze se stromy, ale také s kružnicemi, které mohou být spojeny se základnou. Naším cílem bude zjednodušit tyto konfigurace, aby vytvořily stromy, které převedeme na bambusové stonky a dopočítáme podle strategie ve hře Nim.

Tyto kružnice můžeme analyzovat takto:

1. Základna odpovídá jednomu uzlu (koleno). To znamená, že všechny uzly na základně se mohou ztotožnit.
2. Každá slámka obvodu se může převést na smyčku.
3. Každá smyčka může být nahrazena slámkou.
4. Součet slámek vedle sebe odpovídá nim součtu.

Tedy  má Grundyovu hodnotu 0 (ve hře je nevýhodné začínat).

Příklad 6.



Hodnota chlapce vlevo je nenulová, a tedy existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Stačí odebrat trup a všechny slámky nad. Hodnota trojúhelníku A je $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ a může být zaměněna za jednu hranu. Grundyova hodnota chlapce je 2. První a třetí hra má součet 0, tj. jedná se o $\mathscr{P}$ pozici. Nalezněte optimální obranu druhého hráče?

Návod jak vyhrát Hackenbush (pokud můžeme): udělejte tah takový, aby výsledný obrázek byl ekvivalentní součtu stébel délek, který má nim součet roven 0. Pokud takový tah neexistuje, prohrajete, pokud váš soupeř použije tuto strategii.

Bonus: Varianty hry Zelený Hackenbush

Vyšetřovali jsme nestrannou hru Zelený Hackenbush. Existuje několik dalších zajímavých partyzánských verzí této hry:

1. Modro-červený Hackenbush, ve kterém jsou slámky modré nebo červené. Hráči je přiřazena barva a může odebírat pouze slámky své barvy.
2. Modro-červený-zelený Hackenbush. V této variantě mohou být slámky tří barev. Každému hráči je přiřazena červená nebo modrá barva a zelená, která patří oběma hráčům. Hráči mohou odebírat slámky své barvy nebo zelené slámky.

Poděkování: Děkuji paní Mgr. Haně Rajdlové za obětavou pomoc při zpracování rukopisu.

Literatura

[1] Apfelbeck, A.: *Kongruence.* Škola mladých matematiků, roč. 21, ÚV Matematické olympiády, Mladá fronta, Praha, 1968, dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403650`.

[2] Albert, M., Nowakowski, R., Wolfe, D.: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory.* A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2007.

[3] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning Ways for your Mathematical Plays.* 2nd ed., vol. 1–4, A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2001–2004.

[4] Cihlář, J., Vopravil, V.: *Hry a čísla (On Games and Numbers).* PF UJEP, Ústí nad Labem, 1983, 1995.

[5] Conway, J. H.: *On Numbers and Games.* 2nd ed., A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2000.

[6] Ferguson, T. S.: *Game Theory, Impartial Combinatorial Games.* UCLA lecture, `https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf`.

[7] Vopravil, V., Porkert, J.: Hry a strategie. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 70 (1992), s. 52–57.

[8] Vopravil, V.: Nestranné hry. *Učitel matematiky*, roč. 26 (2018), č. 2.

Vědecké zásady krájení dortu

Eduard Šubert, Praha

Nemuselo by se zdát, že taková obyčejná věc jako krájení koláče může něco získat z matematické studie, ale je tomu tak. Již v roce 1906 byl v časopise Nature publikován dopis od jistého F. G., který popisuje metodu na krájení koláče, která je významně lepší než klasický výřez výseče, alespoň v jistých ohledech [2].

Autorem dopisu, F. G., je dokonce sám Sir Francis Galton, anglický statistik, matematik, psycholog, antropolog a mnoho dalšího. Údajně se bez úspěchu snažil nalézt metodu pro přípravu perfektního šálku čaje. Uspěl alespoň u krájení koláče, který se samozřejmě k čaji hodí. Abyste se mohli naučit lépe krájet koláč přímo od mistra, přikládám jeho dopis v originálním znění v angličtině a svůj vlastní český překlad.