Jan Čermák; Tomáš Kisela; Luděk Nechvátal
Několik poznámek ke zlomkovému kalkulu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 65 (2020), No. 3, 157–174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148356

Několik poznámek ke zlomkovému kalkulu

Jan Čermák, Tomáš Kisela, Luděk Nechvátal

Abstrakt. Článek přináší základní pohled na oblast tzv. zlomkového kalkulu, tedy partii matematické analýzy, která je věnována derivacím neceločíselných řádů a souvisejícím otázkám. Je zde popsán historický vývoj tohoto pojmu, včetně motivací a aplikací. Speciálně se pak text zaměřuje na oblast diferenciálních rovnic s neceločíselnými derivacemi, na základní otázky spojené s jejich vyšetřováním a také na některé nové výzvy, které tato disciplína přináší.

1. Spojitá rozšíření některých diskrétních operací

Historie matematiky zná řadu případů, kdy operace, které měly původně smysl pouze pro přirozené (či celočíselné) hodnoty uvažovaného parametru, našly své opodstatnění i v případech, kdy je tento parametr uvažován z oboru reálných čísel. Klasickým příkladem v tomto směru je rozšíření operace $n!$ pro neceločíselné hodnoty n. Otázka, jak provést toto spojité rozšíření, je ve své obecnosti značně komplikovaná a má často nejednoznačné řešení. Společnou vlastností těchto rozšíření je skutečnost, že v případě zpětné redukce na celočíselné hodnoty parametru zůstanou zachovány hlavní definitorické či jiné významné vlastnosti dané operace. Při spojitém rozšíření je tedy třeba často rozhodnout, které vztahy považujeme pro danou operaci za natolik nosné, že jejich platnost požadujeme i pro neceločíselné hodnoty daného parametru.

1.1. Faktoriál a funkce Γ

Zkusme se touto optikou podívat na rozšíření operace $n!$ pro všechny kladné reálné hodnoty parametru n. Tímto rozšířením je dobře známá funkce Γ se svým integrálním vyjádřením

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-s)s^{x-1}\,\mathrm{d}s, \qquad x \in (0, \infty),$$

jehož autorem je A. M. Legendre (1752–1833). Stejně známou skutečností je pak vztah $\Gamma(n) = (n-1)!$ pro všechny přirozené hodnoty n (připomeňme, že klademe $0! = 1$). Jestliže při konstrukci funkce Γ vyjdeme právě z vlastnosti

$$n! = n(n-1)!, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

pak při příslušné interpolaci hledáme funkci f vyhovující funkcionální rovnici

$$f(x+1) = xf(x), \qquad x \in (0, \infty), \tag{1}$$

prof. RNDr. Jan Čermák, CSc., Ing. Tomáš Kisela, Ph.D., doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D., Ústav matematiky FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: cermak.j@fme.vutbr.cz, kisela@fme.vutbr.cz, nechvatal@fme.vutbr.cz

kde v souladu se vztahem $0! = 1$ požadujeme platnost podmínky $f(1) = 1$. Lze snadno ověřit, že funkce Γ této funkcionální rovnici vyhovuje; zajímavější je však opačná otázka, totiž nakolik je funkce Γ touto vlastností charakterizována jednoznačně. Není těžké zjistit, že spojitých funkcí vyhovujících této rovnici existuje nespočetně mnoho (přesvědčit se o tom můžeme např. metodou kroků, která vyžaduje předepsání hodnot na intervalu $(0, 1\rangle$). Je proto třeba k rovnici (1) přidat ještě další podmínku či podmínky. Touto dodatečnou podmínkou může být logaritmická konvexnost funkce f (tato vlastnost je míněna ve smyslu, že složení $\log \circ f$ je konvexní funkce). Platí tedy následující zajímavý výsledek, poprvé dokázaný dánskými matematiky H. Bohrem (1887–1925) a J. Mollerupem (1872–1937):

Splňuje-li funkce f vlastnost (1)*, podmínku $f(1) = 1$ a je-li navíc logaritmicky konvexní na* $(0, \infty)$*, pak $f = \Gamma$ na* $(0, \infty)$.

Uvedený závěr popisuje, které vlastnosti funkce Γ jsou natolik silné, že ji jednoznačně charakterizují. Není asi překvapující, že ústřední vlastností je právě vztah (1) doplněný podmínkou $f(1) = 1$. Požadavek logaritmické konvexnosti lze nahradit i jiným typem podmínek, jež rovněž zaručí jednoznačnost funkce Γ (podrobnější informace k této problematice lze nalézt např. v [5] nebo [9]).

1.2. Neceločíselné iterace funkcí

Předcházející klasický příklad rozšíření faktoriálu i pro neceločíselné hodnoty argumentu nebyl vybrán náhodně. Toto rozšíření vyžaduje většina hlavních přístupů řešících otázku, která úzce souvisí se základním tématem tohoto příspěvku – totiž jak rozumně zavést pojem derivace funkce, jestliže za řád této derivace připustíme i neceločíselné hodnoty. Než přistoupíme k diskusi této otázky, uvedeme ještě jiný související problém, kterým je zavedení pojmu neceločíselné iterace dané funkce.

Uvažujme reálnou funkci g, jejímž definičním oborem jsou pro jednoduchost všechna reálná čísla. Pak lze pro všechny přirozené hodnoty $n = 2, 3, \ldots$ zavést n-tou iteraci g^n funkce g jako $g^n = g \circ g^{n-1}$ (klademe přitom $g^1 = g$). Je-li navíc g bijekce množiny reálných čísel na sebe, pak má smysl rozšířit toto zavedení i pro záporné celočíselné hodnoty n, a to pomocí iterace inverzní funkce g^{-1}. Konečně g^0 chápeme jako identickou funkci. Tím jsou zavedeny celočíselné iterace dané funkce g. Zabývejme se otázkou, jakým způsobem by se dal zavést pojem neceločíselné iterace funkce g.

Na rozdíl od předcházejícího příkladu, kde užití faktoriálové rovnice pro charakterizaci funkce Γ bylo víceméně evidentní, vyžaduje výběr klíčového vztahu, který užijeme pro neceločíselné rozšíření pojmu iterace funkce, menší zamyšlení. Na základě vlastností plynoucích z operace skládání funkcí víme, že pro všechna reálná t platí

$$(g^n \circ g^m)(t) = g^{m+n}(t), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Položíme-li nyní $F(t, n) = g^n(t)$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$, lze předcházející vztah přepsat do tvaru

$$F(F(t, m), n) = F(t, m + n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Tuto rovnici můžeme formálně rozšířit i pro reálné hodnoty m, n, čímž dostáváme

$$F(F(t, u), v) = F(t, u + v), \quad t, u, v \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vztah (2) je z teorie funkcionálních rovnic dobře znám pod názvem *translační rovnice*. Doplníme-li k této rovnici podmínku $g^1 = g$, tedy vztah

$$F(t, 1) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

pak lze za určitých předpokladů nalézt jednoznačné řešení problému (2), (3), což pro danou funkci g umožní zavedení pojmu její iterace reálného řádu α ve tvaru

$$g^\alpha(t) = F(t, \alpha), \quad t, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že kromě polské školy (spojené především se jmény M. Kuczma, B. Choczewski a M. Zdun), jejíž přínos k teorii spojitých iterací je zcela zásadní, nese výzkum v této oblasti i českou stopu. Hledáním podmínek, za kterých je daná funkce vhodnou reálnou iterací jiné dané funkce, se zabýval mj. také významný brněnský matematik František Neuman (1937–2018).

1.3. Neceločíselné derivace funkcí – intuitivní pohled

Nyní se již zaměříme na otázku, jak lze pro danou funkci zavést pojem její derivace neceločíselného řádu. Zde je diskuse onoho nosného vztahu, který by představoval základ pro takové rozšíření, o poznání těžší. I proto existuje různých přístupů k zavedení derivace neceločíselného řádu hned několik, jejich přehled zasazený do historického kontextu ponecháme raději do samostatné kapitoly. Nyní zmíníme alespoň několik intuitivních představ, jak by mohla vypadat derivace neceločíselného řádu pro některé pevně zvolené základní elementární funkce. Abychom mohli požadované rozšíření formálně snadno provést, omezíme se na případy, kdy je znám rekurentní předpis pro obecnou celočíselnou derivaci dané funkce.

Vyjdeme proto (nikoliv překvapivě) z funkce exponenciální, s níž je spojen známý vztah pro její n-tou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}^n \exp(at)}{\mathrm{d}t^n} = a^n \exp(at).$$

Je-li $a > 0$ reálné číslo, pak lze tento vztah formálně přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha \exp(at)}{\mathrm{d}t^\alpha} = a^\alpha \exp(at), \tag{4}$$

který můžeme prohlásit za derivaci reálného řádu $\alpha > 0$ dané exponenciální funkce. V případě základních goniometrických funkcí lze postupovat obdobně. Protože

$$\frac{\mathrm{d}^n \sin(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sin\Big(t + \frac{n\pi}{2}\Big) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}^n \cos(t)}{\mathrm{d}t^n} = \cos\Big(t + \frac{n\pi}{2}\Big),$$

je přirozené zavést derivaci reálného řádu $\alpha > 0$ těchto funkcí ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha \sin(t)}{\mathrm{d}t^\alpha} = \sin\Big(t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}^\alpha \cos(t)}{\mathrm{d}t^\alpha} = \cos\Big(t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big).$$

Konečně v případě (přirozené) n-té derivace mocninné funkce s přirozeným exponentem m platí (při $m \geqq n$)

$$\frac{\mathrm{d}^n t^m}{\mathrm{d}t^n} = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n}.$$

Odtud tedy můžeme uvažovat rozšíření tohoto vztahu ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha t^m}{\mathrm{d}t^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha}, \tag{5}$$

a to pro libovolnou reálnou hodnotu $0 < \alpha < m+1$. Všimněme si přitom, že výraz na pravé straně (5) je uveden ve tvaru, který umožňuje nahradit přirozený mocnitel m ve funkci t^m libovolnou reálnou hodnotou $\beta > \alpha - 1$. Navíc při vhodném alternativním zavedení funkce Γ, připouštějícím i záporné hodnoty jejího argumentu, lze uvažovat ještě obecnější hodnoty α a β.

Uvedený přístup je pochopitelně specifický pro konkrétní typ funkce. Nás však ale zajímají – stejně jako v případě spojitých iterací – možnosti zavedení derivací neceločíselných řádů pro obecně chápanou funkci. Jak se diskuse matematiků k této otázce vyvíjela, uvedeme v následující kapitole.

2. Historický vývoj základů zlomkového kalkulu

Myšlenka zobecnění řádu derivace či integrálu do neceločíselných hodnot byla přítomna prakticky ihned od vzniku samotného kalkulu, a to především jako zajímavá matematická hříčka. Po staletí byla tato myšlenka rozvíjena spíše „mimochodem“, poněvadž trpěla nejen absencí přímé aplikace, ale i jednotícího přístupu k této problematice. V nedávné době však došlo v obou těchto směrech k významnému průlomu a právě v souvislosti s derivacemi neceločíselných řádů začala být budována teorie, která se rychle zařadila mezi významná a hojně studovaná odvětví matematické analýzy.

2.1. Prvotní úvahy

Jednou z prvních dochovaných zmínek o zlomkovém kalkulu je korespondence mezi G. W. Leibnizem (1646–1716) a G. l'Hospitalem (1661–1704) z roku 1695, kde je diskutována možnost zavedení derivace polovičního řádu. Kromě Leibnize, který toto téma zmiňuje i v dopisech J. Bernoulliovi (1667–1748) či J. Wallisovi (1616–1703), se myšlenky neceločíselné derivace ve svých pracích dotýká také řada dalších světových matematiků své doby. Mezi jinými např. L. Euler (1707–1783), zmiňující kolem roku 1730 souvislosti s interpolacemi, nebo P. S. Laplace (1749–1827), který roku 1812 navrhuje tvar zlomkové derivace pro funkce reprezentovatelné jistým integrálem. Problematikou se zabýval také S. F. Lacroix (1765–1843), který v roce 1819 formálně zobecnil vzorec pro derivaci mocninné funkce; speciálně přitom uvádí vztah

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2} t}{\mathrm{d}t^{1/2}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Rovněž J. B. J. Fourier (1768–1830) diskutoval možnost formálního zavedení derivace neceločíselného řádu. Vycházel přitom ze své integrální reprezentace funkce, na jejímž základě zmiňuje v roce 1822 vyjádření

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha f(t)}{\mathrm{d}t^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha \cos\left(p(t-\xi) + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\xi,$$

kde α může nabývat jakékoliv reálné (kladné nebo záporné) hodnoty.

2.2. Krize zlomkového kalkulu

O první využití zlomkového kalkulu se roku 1823 postaral N. H. Abel (1802–1829), a to při řešení úlohy o tautochroně. Jím odvozená integrální rovnice je totiž (z dnešního pohledu) diferenciální rovnicí polovičního řádu, a proto bývá v některých zdrojích elegance Abelova řešení označována za možný impuls pro další vývoj zlomkového kakulu.

Jedním z prvních matematiků, věnujících se zlomkovému kalkulu soustavněji, byl J. Liouville (1809–1882), který k tématu publikoval několik delších statí. Vyvinul dva přístupy k zavedení zlomkové derivace. U prvního využil rozvoje dané funkce do řady exponenciálních funkcí. Za nosný vztah, umožňující potřebné spojité rozšíření řádu derivace, pak zvolil vzorec pro opakovanou derivaci exponenciální funkce (viz (4)). Tím získal vyjádření

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha f(t)}{\mathrm{d}t^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha \exp\left(a_n t\right), \quad \text{kde} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(a_n t\right)$$

($\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou vhodné reálné posloupnosti). V této souvislosti dodejme, že stejnou myšlenku lze aplikovat i v případě rozvoje funkce do mocninné řady s následným využitím vztahu (5). U druhého přístupu, uvažovaného pro funkce neohraničené v okolí počátku, definoval

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha t^{-\beta}}{\mathrm{d}t^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)} t^{-\beta-\alpha}, \quad \beta > 0, \tag{6}$$

kde $(-1)^\alpha = \exp(\mathrm{i}\,\alpha\pi)$ (zlomková derivace tedy mění reálnou funkci na komplexní). I když byly obě definice úspěšně aplikovány v teorii potenciálu, svým použitím jen pro speciální typ funkcí se zařadily po bok ostatním, do té doby publikovaným pokusům.

Roztříštěnost jednotlivých přístupů vedla k četným rozporům, které během let 1835–1850 vygradovaly okolo dvou definic. První definice, se kterou pracovali už Lacroix či Abel, byla postavena na zobecnění derivace mocninné funkce t^β ($\beta > 0$), zatímco druhá, pocházející od Liouvillea, pracovala s mocninou zápornou (viz (6)). Do následné diskuse se zapojilo mnoho osobností včetně G. Peacocka (1791–1858), P. Kellanda (1808–1879) či A. De Morgana (1806–1871). Za zmínku stojí také článek W. Centera z roku 1848, kde jsou oba přístupy aplikovány na konstantní funkci. Je zde konstatován rozpor v limitním případě $\beta \to 0^+$, kdy podle prvního přístupu (dle Lacroixe) dostáváme $(\sqrt{\pi t})^{-1}$, zatímco podle druhého (dle Liouvillea) dostáváme nulovou funkci.

B. Riemann (1826–1866) během studií kolem roku 1845 (vydáno 1892) hledal zobecnění Taylorových polynomů a odvodil vztah pro integrál neceločíselného řádu α

$$I^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \Psi(t),$$

avšak nedokázal se vypořádat s pomocnou funkcí Ψ, která je důsledkem neurčitosti dolní meze a. Otázky spojené s touto pomocnou funkcí spolu s rozpory ve starších definicích významně snížily zájem o zlomkový kalkulus.

Roku 1869 se N. J. Sonin (1849–1915) a A. V. Letnikov (1837–1888) pokusili zobecnit komplexní Cauchyho integrální formuli pro derivaci n-tého řádu. Při dosazení neceločíselných hodnot n se však v argumentu integrálu místo pólu objevil bod větvení, což se jim nepodařilo uspokojivě vyřešit. Až roku 1884 P. M. H. Laurent (1841–1908) využil pro překonání bodu větvení Riemannovy plochy, čímž dospěl k zavedení integrálu reálného řádu $\alpha > 0$ dané funkce f ve tvaru

$$
{}_aI_t^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad t > a, \tag{7}
$$

kde a je reálná konstanta. Dostáváme tak Riemannovu definici, ale bez pomocné funkce. Poznamenejme, že pro přirozené hodnoty α se tento vztah redukuje na tzv. Cauchyho formuli pro n-tý integrál funkce f

$$
\int_a^t \Big(\int_a^{\xi_n} \dots \Big(\int_a^{\xi_2} f(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 \Big) \dots \mathrm{d}\xi_{n-1} \Big)\,\mathrm{d}\xi_n = \int_a^t \frac{(t-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
$$

Předpis (7) je v současnosti nejčastěji užívanou definicí zlomkového integrálu. Jinak vyjádřeno, zmíněná Cauchyho formule je všeobecně považována za onen potřebný základní vztah, jehož rozšířením i pro neceločíselné hodnoty n dospějeme k zavedení pojmu zlomkový integrál.

Za odpovídající zobecnění derivace je pak považována tzv. Riemannova–Liouvilleova zlomková derivace řádu $\alpha > 0$, zavedená složením zlomkového integrálu řádu $\lceil\alpha\rceil - \alpha$ a celočíselné derivace řádu $\lceil\alpha\rceil$ (kde $\lceil\alpha\rceil$ je nejmenší celé číslo větší nebo rovné α), tj.

$$
{}_a^{\mathrm{R}}D_t^\alpha f(t) = \frac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}t^{\lceil\alpha\rceil}}\, {}_aI_t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f(t) = \frac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}t^{\lceil\alpha\rceil}} \int_a^t \frac{(t-\xi)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{8}
$$

Další přístup k zavedení zlomkové derivace je založen na samotné definici derivace prvního (a obecně n-tého) řádu. Za ústřední vztah je tedy považováno vyjádření

$$
\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh),
$$

kdy náhradou přirozeného čísla n reálnou hodnotou $\alpha > 0$ (a užitím některých dalších obratů) dostáváme tzv. Grünwaldův–Letnikovův zlomkový operátor, zavedený v letech 1867–1868 vztahem

$$
{}_a^{\mathrm{G}}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh),
$$

ze kterého lze získat nejjednodušší numerické aproximace příslušných operátorů.

2.3. Moderní přístupy

Během 20. století se zlomkový kalkulus rozvinul naplno, přičemž se začaly studovat i diferenciální rovnice s neceločíselnou derivací neznámé funkce. Mezi první z nich patřila rovnice $D^{1/2}y(t) = y(t)/t$, jejíž možná řešení i významy operátoru poloviční derivace byly diskutovány kolem roku 1918 (jeden z navrhovaných postupů vycházel z Liouvilleova vzorce (6) rozšířeného i pro záporné hodnoty β). Objevily se další přístupy k definici zlomkové derivace, např. Erdélyiova–Koberova definice ve 40.–50. letech či Rieszova definice pro funkce více proměnných kolem roku 1949. V aplikacích se v současnosti vedle Riemannovy–Liouvilleovy derivace nejvíce uplatňuje Caputova derivace zavedená roku 1967, která oproti Riemannovu–Liouvilleovu přístupu zaměňuje pořadí operací zlomkové integrace a celočíselné derivace, tedy

$$ {}_a^{\mathrm{C}}\!D_t^{\alpha} f(t) = {}_aI_t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f^{(\lceil\alpha\rceil)}(t) = \int_a^t \frac{(t-\xi)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\, f^{(\lceil\alpha\rceil)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{9} $$

Tento přístup není z teoretického hlediska příliš obohacující (jde jen o přeskládání zlomkových operátorů). Zohledňuje však potřeby technické praxe v tom smyslu, že jakákoliv Caputova derivace konstantní funkce je nulová, a počáteční podmínky pro příslušné Caputovy diferenciální rovnice využívají pouze hodnot celočíselných derivací.

Zlomem v dalším vývoji zlomkového kalkulu byl rok 1974, kdy University of New Haven, CT (Spojené státy) uspořádala první mezinárodní konferenci věnovanou zlomkovému kalkulu a byla vydána první kniha shrnující dosavadní poznatky (viz [7]). Od této doby začaly zlomkové diferenciální rovnice (tj. rovnice s derivací neceločíselného řádu) plnit roli čím dál významnější alternativy k nelineárním (či mnohoparametrickým lineárním) diferenciálním rovnicím používaným pro popis komplexních jevů v moderních oblastech teorie řízení, biologie (difuze v buněčných strukturách), chemie, materiálových věd (dynamické vlastnosti polymerů), aproximace experimentálních dat, obrazové analýzy, elektrických obvodů (kapacitní vlastnosti organických materiálů) či ekonomie.

Využití zlomkových diferenciálních rovnic není opodstatněno pouze dobrou shodou získaných výsledků s pozorovanou skutečností. V řadě případů je volba konkrétního zlomkového modelu odůvodněna fyzikálně, přičemž toto odůvodnění většinou souvisí se schopností zlomkových operátorů zohlednit (díky přítomnému integrálu) „historii“ neznámé funkce. Je tomu tak například u modelu difuze v buněčných strukturách, kde je zlomková derivace zahrnuta na základě předpokladu, že šířící se částice může být v každém místě na určitý čas zadržena (čímž je simulována role buněčných stěn efektivně zpomalujících difuzní proces). Obecněji lze říci, že se zlomkový diferenciální operátor uplatňuje při modelování jevů v prostředích, která vykazují silnou heterogenitu. Takovými prostředími jsou například různé porézní materiály (ty využívají ke svému popisu pojmů jako je fraktální dimenze). Dva jednoduché zlomkové modely jiného typu pak zmíníme v kapitole 4.

Poznamenejme ještě, že smyslem této kapitoly bylo především dokumentovat historické souvislosti při zavádění pojmu zlomkové derivace. Proto jsme zde nespecifikovali třídy funkcí, pro které dané operace mají smysl, ani typy užitých integrálů v příslušných definicích (pro základní představu lze uvažovat integrály v Riemannově smyslu).

3. Základní vlastnosti zlomkových operátorů

Z uvedeného historického přehledu vyplývá, že přístupy k zavedení pojmu zlomkové derivace se různí, stejně jako samotné definice. Je proto přirozené se ptát na souvislosti mezi těmito zavedeními. Nezapomeňme přitom ani na úvahy provedené v odstavci 1.3, které naznačily, jak by mohly vypadat derivace neceločíselných řádů pro některé konkrétní typy funkcí. V této kapitole se proto nejprve vyjádříme k těmto otázkám a poté uvedeme stručný přehled základních vlastností Caputovy derivace.

3.1. Tři hlavní definice – některé jejich vlastnosti a souvislosti

Mezi nejužívanější zavedení zlomkové derivace patří definice Riemannova–Liouvilleova, Grünwaldova–Letnikovova a Caputova. Všechna tato zavedení představují operace lineární (stejně jako v celočíselném případě), nikoliv však lokální[1] (na rozdíl od celočíselného případu). Přesněji vyjádřeno, zavedené zlomkové derivace funkce f v bodě t zohledňují všechny funkční hodnoty funkce f na intervalu $\langle a,\, t\rangle$. Na volbě bodu a tedy obecně záleží, neboť reprezentuje počátek, od kterého se o funkci zajímáme. Pro ilustraci role bodu a se můžeme vrátit ke vztahům uvedeným v odstavci 1.3, které jsme navrhli jako „rozumná“ zlomková rozšíření vztahů pro celočíselné derivace některých základních elementárních funkcí. Lze poměrně snadno ověřit, že např. vztah (4) dostáváme pomocí (8) při $a \to -\infty$, zatímco (5) plyne z (8) pro $a = 0$.

Uvažovaná zavedení nejsou ekvivalentní, každé z nich má své specifické vlastnosti; liší se zejména třídy derivovatelných funkcí. My zde uvedeme alespoň několik obecných poznámek v tomto směru (přesnější informace lze nalézt v monografiích [3], [4] a [8]).

(i) Všechny definice jsou navrženy tak, aby se z příslušných zlomkových derivací pro $\alpha = n \in \mathbb{N}$ stala standardní derivace řádu n.

(ii) Pro dostatečně hladké funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$ splývá Riemannova–Liouvilleova definice s Grünwaldovou–Letnikovovou pro všechna $t \in (a,\, b\rangle$.

(iii) Bez dodatečných podmínek obecně neplatí skládání zlomkových derivací, tj. neplatí analogie známého vztahu $(f^{(m)})^{(n)} = f^{(m+n)}$, kde $m,\, n \in \mathbb{N}$.

(iv) Za určitých předpokladů kladených na danou funkci f platí analogie základní věty integrálního počtu, tj. zlomková derivace řádu α aplikovaná na zlomkový integrál řádu α z funkce f dává zpět funkci f.

(v) Při $a \to -\infty$ splývá Caputova derivace s Riemannovou–Liouvilleovu derivací (pokud existují).

(vi) Existují vzorce pro zlomkovou derivaci součinu (analogie Leibnizova pravidla) a složené funkce (analogie řetízkového pravidla). Tyto vzorce se opět liší v závislosti na zvolené definici, vzhledem ke své složitosti nejsou příliš používány.

---

[1] V literatuře je známo i několik pokusů o lokální definici zlomkové derivace, do současnosti se jim však nedostalo větší pozornosti.

3.2. Caputova zlomková derivace

Protože se v dalších kapitolách budeme zabývat pouze problémy s Caputovou derivací, podívejme se na tento přístup důkladněji. Začneme s vlastností, která říká, za jakých okolností lze Caputovu derivaci psát pomocí Riemannovy–Liouvilleovy derivace:

Pro každý řád $\alpha > 0$ a každou funkci f, která má (obyčejné) derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$ až do řádu $\lceil\alpha\rceil - 1$ a $f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}$ je absolutně spojitá na tomto intervalu, platí

$$ {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = {}_a^{\mathrm{R}}D_t^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right) \quad \text{pro skoro každé} \quad t \in \langle a, b\rangle. \tag{10}$$

Předpokládáme-li tedy, že ${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f$ a ${}_t^{\mathrm{R}}D_t^{\alpha} f$ na nějakém intervalu existují, pak užitím

$$ {}_a^{\mathrm{R}}D_t^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}, \quad \beta > -1,$$

(srovnejte s (5)) máme reprezentaci Caputovy derivace pomocí Riemannovy–Liouvilleovy derivace ve tvaru

$$ {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = {}_a^{\mathrm{R}}D_t^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

V modernější literatuře se obvykle pravá strana rovnosti (10) bere za definici Caputovy derivace, protože umožňuje derivovat širší třídu funkcí než původní definice (9).

Již jsme uvedli, že skládat zlomkové derivace obecně nelze. Pro Caputovu derivaci však tato vlastnost, při jistém omezení na hladkost funkcí a řády derivací, platí:

Má-li f (obyčejné) derivace až do řádu $k \in \mathbb{N}$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$ {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}\, {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\beta} f(t) = {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad \textit{pro každé} \quad t \in (a, b\rangle, \tag{11}$$

jestliže α, $\alpha + \beta \in \langle \ell - 1, \ell\rangle$ pro vhodné $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leqq k$.

Další specifickou vlastností Caputovy derivace je nespojitá závislost ${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f$ na řádu α v tom smyslu, že je-li $m \in \mathbb{N}$ a funkce f je dostatečně hladká na $\langle a, b\rangle$, pak

$$\lim_{\alpha\to m^-} {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = f^{(m)}(t), \quad \text{avšak} \quad \lim_{\alpha\to m^+} {}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = f^{(m)}(t) - f^{(m)}(a)$$

pro každé $t \in (a, b\rangle$ (hodnotu $f^{(m)}(a)$ zde chápeme jako m-tou pravostrannou derivaci v bodě a). Pro lepší představu si tuto skutečnost ilustrujme na lineární funkci $f(t) = t$, $t \geqq 0$. Uvažujeme-li řád α mezi nulou a jedničkou, pak podle definice (9)

$$ {}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,\mathrm{d}\xi = -\left[\frac{(t-\xi)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right]_0^t = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

a tedy

$$\lim_{\alpha\to 1^-} {}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{\alpha\to 1^-}\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = 1 = f'(t) \quad \text{pro každé } t \geqq 0.$$

Je-li však α mezi jedničkou a dvojkou, pak podle definice

$$ {}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f''(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t 0\,\mathrm{d}\xi = 0 \quad \text{pro každé } t \geqq 0, $$

a tedy

$$ \lim_{\alpha\to 1^+} {}_0^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{\alpha\to 1^+} 0 = 0 = f'(t) - f'(0). $$

4. Zlomkové diferenciální rovnice – některé základní poznatky

V této kapitole se zaměříme na některé otázky spojené se základy teorie zlomkových diferenciálních rovnic. Vzorem přitom pro nás bude standardní výklad klasické teorie obyčejných diferenciálních rovnic, který obvykle začíná rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci, tj. rovnicí ve tvaru

$$ x'(t) = f(t, x(t)), \tag{12} $$

kde t je proměnná probíhající nějaký interval a f je vhodná funkce definovaná na určité dvojrozměrné množině. Rovnici lze interpretovat tak, že rychlost změny veličiny x v čase t závisí prostřednictvím funkce f na této veličině, přičemž zmíněná závislost se v průběhu času může měnit (pokud se nemění, tj. $f(t,x) = f(x)$, hovoříme o autonomní rovnici). V obvyklém smyslu pak chápeme pojem řešení této rovnice i pojem počáteční úlohy, kdy společně s rovnicí uvažujeme ještě počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$, kde t_0 je vnitřní bod intervalu, v němž hledáme řešení, a x_0 je vhodné reálné číslo. Otázku jednoznačné řešitelnosti počáteční úlohy řeší Picardova–Lindelöfova věta, která říká, že je-li pravá strana f rovnice (12) na nějakém okolí bodu $[t_0, x_0]$ spojitá a navíc je lipschitzovská ve druhé proměnné na tomto okolí, pak existuje jediné řešení této počáteční úlohy, které je definované na nějakém okolí bodu t_0.

4.1. Počáteční úloha pro zlomkovou diferenciální rovnici

Jako zlomková analogie rovnice (12) se obvykle uvažuje rovnice

$$ {}_{t_0}^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad t > t_0, \tag{13} $$

kde řád α příslušné Caputovy derivace splňuje $0 < \alpha < 1$ (všimněme si, že časovou proměnnou t nyní uvažujeme pouze napravo od počátku t_0). Pojem řešení rovnice budeme chápat mírně odlišně než v případě rovnice (12), a to jako funkci φ definovanou na intervalu $\langle t_0, T\rangle$, která má následující vlastnosti:

(i) je spojitá v každém bodě $\langle t_0, T\rangle$;

(ii) má Caputovu derivaci v každém bodě $t \in (t_0, T\rangle$;

(iii) platí rovnost ${}_{t_0}^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}\varphi(t) = f(t, \varphi(t))$ v každém bodě $t \in (t_0, T\rangle$.

Levou stranu rovnice nyní nelze chápat jako rychlost změny veličiny x; lze na ni nahlížet jako na „složitější změnu“, která reflektuje stavy veličiny x vyčíslené ve všech hodnotách argumentu mezi počátkem t_0 a průběžným časem t (tj. zohledňujeme historii této veličiny). Přirozenou počáteční podmínkou je opět předepsání hodnoty řešení v bodě t_0. V případě rovnice vyššího řádu by pak sada počátečních podmínek byla stejná jako v případě klasické rovnice řádu n. Tento fakt je důvodem, proč se v aplikacích preferuje Caputův diferenciální operátor (případně jeho modifikace) před Riemannovým–Liouvilleovým operátorem. Pro rovnice obsahující Riemannovu–Liouvilleovu derivaci je totiž přirozený tvar počátečních podmínek také zlomkový (fyzikální interpretace takových podmínek není zřejmá).

Bezprostřední analogií Picardovy–Lindelöfovy věty je tvrzení, které říká, že je-li funkce f spojitá v okolí bodu $[t_0, x_0]$ a lipschitzovská ve druhé proměnné na tomto okolí, pak existuje interval $\langle t_0, T\rangle$, na kterém má rovnice (13) jediné řešení vyhovující podmínce $x(t_0) = x_0$. Základním krokem v důkazu věty je – stejně jako v případě rovnice (12) – převod počáteční úlohy na úlohu o pevném bodu prostřednictvím příslušné integrální rovnice.

Soulad s klasickým případem v tak zásadním tvrzení, jako je věta o řešitelnosti počáteční úlohy, by mohl svádět k domněnce, že ostatní typické vlastnosti z teorie celočíselných rovnic půjde „přenést“ na zlomkový případ také. Ukazuje se však, že tomu tak obecně být nemusí, o čemž se přesvědčíme v dalším textu.

4.2. Otázka analytického řešení a jeho vlastností

Protože v této a další kapitole už budeme pracovat pouze s Caputovou derivací, zjednodušíme její označení vynecháním písmene C. Položíme-li navíc pro určitost $t_0 = 0$, lze dále tuto derivaci značit jednoduše D^α (vynecháváme tedy i pravý dolní index t).

Získat analytické řešení klasických diferenciálních rovnic (celočíselného řádu) v uzavřeném tvaru lze pouze v několika málo speciálních případech. Lze očekávat, že v případě zlomkových rovnic bude tato otázka ještě obtížnější. Základní testovací rovnicí (která je speciálním případem rovnice (13)) může být v tomto směru rovnice

$$D^\alpha x(t) = \lambda x(t), \quad t > 0, \tag{14}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice lze popsat explicitně pomocí Mittag-Lefflerovy funkce

$$E_{\mu,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + \nu)}, \quad z, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \quad \Re(\mu) > 0$$

(funkci Γ zde chápeme ve smyslu jejího obecnějšího zavedení, připouštějícího i komplexní hodnoty argumentu). Přesněji, každé řešení x rovnice (14) lze napsat ve tvaru

$$x(t) = cE_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha), \quad c \in \mathbb{R},$$

přičemž volbou $c = x_0$ dostaneme řešení vyhovující počáteční podmínce $x(0) = x_0$. Všimněme si, že $E_{1,1}(z) = \exp(z)$, a tedy, připustíme-li $\alpha = 1$ v rovnici (14), dostaneme řešení ve tvaru $x(t) = c\exp(\lambda t)$, což odpovídá obecnému řešení rovnice $x'(t) = \lambda x(t)$. Poznamenejme ještě, že kdybychom uvažovali v rovnici (14) libovolný řád $\alpha > 0$, pak každé řešení lze napsat jako lineární kombinaci funkcí $u_j(t) = t^j E_{\alpha,j+1}(\lambda t^\alpha)$, $j = 0, 1, \ldots, \lceil\alpha\rceil - 1$.

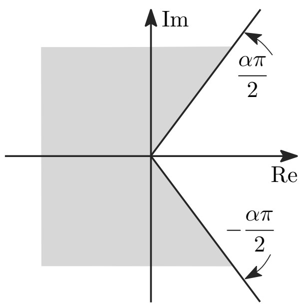
Protože lze analogicky zachytit tvar řešení rovnice (14) i v případě, kdy připustíme $\lambda \in \mathbb{C}$, je možné popsat tvar řešení i pro základní zlomkovou soustavu rovnic

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) \tag{15}$$

s čtvercovou reálnou maticí A (vlastní čísla λ matice A jsou obecně komplexní). Tato znalost analytického řešení (i když není v uzavřeném tvaru) je zde výhodná, protože pro Mittag-Lefflerovu funkci je známo její asymptotické chování při $|z| \to \infty$. To umožňuje popsat asymptotické vlastnosti řešení (15), speciálně pak odvodit kritérium pro stabilitu nulového řešení rovnice této soustavy. Připomeňme, že vybrané řešení diferenciální rovnice je *(lokálně) stabilní*, jestliže všechna řešení začínající „blízko“ tomuto řešení zůstanou „blízko“ po celou dobu sledování děje. Pokud se navíc všechna taková řešení k vybranému řešení blíží pro $t \to \infty$, tak hovoříme o *(lokální) asymptotické stabilitě.* Zmíněný výsledek o chování Mittag-Lefflerovy funkce v nekonečnu představuje klíčový krok při posuzování stability nulového řešení soustavy (15). S jeho pomocí lze odvodit stabilitní kritérium formulované v následující větě. Označme přitom

$$M_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Arg}\ (z)| > \alpha\pi/2\},$$

kde $-\pi < \mathrm{Arg}\ (\cdot) \leqq \pi$ je argument příslušné komplexní hodnoty (množina M_α se nazývá *Matignonův sektor*, viz obr. 1, pro $\alpha \geqq 2$ se množina stává prázdnou).



Obr. 1. Vyobrazení množiny stability M_α (v literatuře nazývané Matignonův sektor)

Nechť $0 < \alpha < 2$ *je řád Caputova diferenciálního operátoru v soustavě* (15) *a* A *je libovolná reálná čtvercová matice. Potom:*

(a) *Nulové řešení soustavy* (15) *je (lokálně) asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice* A *náleží množině* M_α.

(b) *Nulové řešení soustavy* (15) *je stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice* A *náleží uzávěru množiny* M_α *a všechna vlastní čísla matice* A*, která jsou na hranici množiny* M_α *(tj. jejich argument je v absolutní hodnotě roven* $\alpha\pi/2$*), mají stejnou algebraickou i geometrickou násobnost.*

Toto tvrzení bylo poprvé publikováno v konferenčním článku [6], jeho důkaz lze nalézt např. v knížce [3]. Z vlastností (a) a (b) již ihned plyne, že pokud matice A má nějaké vlastní číslo mimo uzávěr množiny M_α, pak je nulové řešení soustavy (15) nestabilní. Pro $\alpha = 1$ výsledek splývá se známým kritériem pro lineární soustavu prvního řádu (speciálně: část (a) v takovém případě říká, že nulové řešení je (lokálně) asymptoticky stabilní, právě když všechna vlastní čísla matice A leží v levé komplexní polorovině).

Významná a zajímavá je také skutečnost, že v (lokálně) asymptoticky stabilním případě není pokles řešení soustavy (15) exponenciálního typu (jak je tomu pro $\alpha = 1$), ale pouze algebraického typu. Přesněji: v (lokálně) asymptoticky stabilní oblasti platí $|x(t)| \leqq Ct^{-\alpha}$ pro všechna t počínaje nějakou dostatečně velkou hodnotou ($C > 0$ je vhodná konstanta).

Ilustrujme nyní použití výše uvedeného výsledku na dvou klasických lineárních zlomkových modelech. Jako první uvažujme model založený na rovnici

$$y'(t) + aD^{1/2}y(t) + by(t) = f(t), \quad t > 0,$$

kde a, b jsou vhodné konstanty a funkce f zahrnuje silový člen. Tato rovnice, která je známa pod názvem *Bassetova*, popisuje problém z oblasti mechaniky tekutin související s neustáleným pohybem tuhé koule ve viskózní kapalině. Člen obsahující poloviční derivaci (a charakterizující tzv. Bassetovu sílu) je možné odvodit jako důsledek reakce mezní vrstvy kapaliny přiléhající ke kouli na relativní zrychlení koule vůči toku kapaliny. Uvažujeme-li tuto rovnici jako homogenní (tj. $f \equiv 0$) a zavedeme-li substituci $x_1 = y$ a $x_2 = D^{1/2}y$, pak lze rovnici přepsat na systém

$$D^{1/2}x_1(t) = x_2(t), \quad D^{1/2}x_2(t) = -bx_1(t) - ax_2(t). \tag{16}$$

Upozorněme přitom, že použití vztahu $D^{1/2}D^{1/2} = D^1$ vyplývá z (11) (při ověření příslušných předpokladů). Protože matice soustavy (16) má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$, není při diskusi (lokální) asymptotické stability soustavy (16) pro konkrétní hodnoty a, b obtížné rozhodnout, zda $\lambda_{1,2} \in M_\alpha$ (v následující kapitole posoudíme otázku, zda je to možné i pro obecné, tedy nespecifikované hodnoty a, b).

Druhý model, o kterém se zmíníme, byl odvozen při řešení příbuzného problému, a to při popisu pohybu tuhé desky na pružině, přičemž deska je ponořena ve viskózní kapalině. Výsledkem je tzv. *Bagleyova–Torvikova rovnice* ve tvaru

$$y''(t) + aD^{3/2}y(t) + by(t) = f(t), \quad t > 0,$$

kde a, b jsou konstanty vyplývající z fyzikální podstaty problému a funkce f opět představuje silový člen. Lze si všimnout formální tvarové podobnosti této rovnice s klasickým modelem tlumeného harmonického oscilátoru $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$. Přesněji vyjádřeno, Bagleyovu–Torvikovu rovnici lze interpretovat jako model oscilátoru, kde standardní lineární tlumicí člen je nahrazen zlomkovým tlumicím členem. Pro homogenní rovnici bychom podobnou substitucí jako v případě Bassetovy rovnice dostali soustavu čtyř rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} D^{1/2}x_1(t) &= x_2(t), \qquad & D^{1/2}x_2(t) &= x_3(t), \\ D^{1/2}x_3(t) &= x_4(t), \qquad & D^{1/2}x_4(t) &= -bx_1(t) - ax_4(t). \end{aligned}$$

Výpočet vlastních čísel matice soustavy nyní vede na charakteristickou rovnici $\lambda^4 + a\lambda^3 + b = 0$. Vyjádření kořenů této rovnice v závislosti na parametrech a, b již není jednoduché; pro konkrétní hodnoty a, b lze získat kořeny numericky a následně rozhodnout o stabilitě na základě Matignonova kritéria.

5. Zlomkové diferenciální rovnice – některé nové výzvy

Předcházející kapitola byla jen ilustrativní ukázkou toho, jaké vlastnosti je možné očekávat od řešení zlomkových diferenciálních rovnic. Viděli jsme, že v případě diskuse stability soustavy (15) bylo možné pozorovat jistou „spojitost“ této vlastnosti v tom smyslu, že malá změna řádu derivace dané soustavy vyvolala malý posun hranice její stability. To však již neplatí o asymptotickém vzorci zachycujícím rychlost, s jakou řešení konverguje k nulovému řešení. Zatímco v celočíselném případě ($\alpha = 1$) se jedná o rychlost exponenciální, v případě zlomkovém ($0 < \alpha < 1$) jde o rychlost algebraickou, tedy řádově pomalejší. Z asymptotického hlediska tedy není možné chápat chování řešení v celočíselném případě jako „limitní“ případ chování řešení ve zlomkovém případě (jestliže se řád α limitně přiblíží k jedničce). Tato skutečnost má řadu důsledků, týkajících se např. oscilačních vlastností zlomkových diferenciálních rovnic, které se od celočíselného případu liší a které na své důkladnější prozkoumání teprve čekají.

My se v další části soustředíme na jinou otázku, jež přirozeně vyplývá z výsledků uvedených v předcházející kapitole. Již dříve jsme připomněli, že nulové řešení soustavy $x'(t) = Ax(t)$ s reálnou konstantní čtvercovou maticí A je (lokálně) asymptoticky stabilní, právě když všechna její vlastní čísla mají zápornou reálnou část, tj. všechny kořeny polynomu $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ leží v komplexní rovině nalevo od imaginární osy. Nutné a postačující podmínky zaručující zmíněnou vlastnost poskytuje známé Routhovo–Hurwitzovo kritérium, které umí posoudit zápornost reálných částí všech kořenů daného polynomu pomocí jeho koeficientů (samotné kořeny, v našem případě vlastní čísla matice A, přitom není nutné znát). Přirozenou otázkou je, zda by bylo možné zformulovat zlomkové rozšíření tohoto kritéria, tedy nalézt nutné a postačující podmínky pro to, aby všechny kořeny daného polynomu ležely v Matignonově sektoru M_α. Omezíme-li se na řád derivace α mezi nulou a jedničkou, pak klasické Routhovo–Hurwitzovo kritérium představuje pouze podmínku postačující, nikoliv však nutnou (platí totiž $M_1 \subset M_\alpha$, nikoliv však opak). Preciznější typy postačujících podmínek (pro speciální polynomy nižších stupňů) se objevily nedávno v literatuře, jednalo se však vždy o podmínky stále dosti vzdálené podmínkám nutným. V následujícím odstavci se proto vyjádříme k tomu, zda lze takové optimální podmínky nalézt. Poté na závěr – jako aplikaci získaných výsledků – ukážeme další specifickou vlastnost, kterou vnesl neceločíselný řád derivace do jednoho klasického dynamického modelu.

5.1. Otázka zlomkového rozšíření Routhova–Hurwitzova kritéria

Zabývejme se tedy otázkou nutných a postačujících podmínek pro to, aby všechny kořeny daného polynomu ležely v Matignonově sektoru M_α. Učiníme tak pro obecný polynom lineární, kvadratický a kubický.

Případ $n = 1$ je triviální, polynom $P(\lambda;\, a) = \lambda + a$ má pouze jeden reálný kořen $\lambda_1 = -a$, ten leží v množině M_α pouze tehdy, je-li $a > 0$.

Případ $n = 2$ je také poměrně snadný, neboť polynom $P(\lambda;\, a,\, b) = \lambda^2 + a\lambda + b$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \bigl(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\bigr)/2$. Uvážíme-li, že tyto kořeny jsou komplexní pro $4b - a^2 > 0$ a úhel $\alpha\pi/2$ je dán jako arkus tangens podílu imaginární a reálné části kořene, po několika úpravách lze vyvodit, že hodnoty $\lambda_{1,2}$ budou ležet v množině M_α, právě když $b > 0$ a $a + 2\sqrt{b}\cos(\alpha\pi/2) > 0$.

Případ $n = 3$ je již složitější a vyžaduje odlišnou techniku. Lze namítnout, že pro polynom třetího stupně máme k dispozici Cardanovy vzorce, které sice jsou složité, ale mělo by přece být možné postupovat podobně jako v případě $n = 2$. Není tomu tak. Polynom třetího stupně má buď tři reálné kořeny (mohou být vícenásobné), nebo jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny (tato druhá situace nás zajímá více). Problémem Cardanových vzorců je, že v případě polynomu s obecnými (předem nespecifikovanými koeficienty) nejsme a priori schopni poznat, který ze tří vzorců představuje zmíněný reálný kořen a které vzorce představují kořeny komplexní. Je tedy potřeba postupovat jinak. Vhodným nástrojem se zdá být metoda „boundary locus".

Její myšlenkou je určit „hraniční" množinu parametrů úlohy tak, aby byla splněna určitá vlastnost. V našem případě půjde o množinu všech koeficientů a, b, c polynomu $P(\lambda; a, b, c) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ takovou, že tento polynom má dvojici komplexních kořenů na hranici Matignonova sektoru M_α, tj. na polopřímkách $z = \pm\omega \exp(\mathrm{i}\,\alpha\pi/2)$, $\omega \geqq 0$. Dosazením tohoto vyjádření do rovnice $P(\lambda; a, b, c) = 0$ (z důvodu komplexní sdruženosti komplexních kořenů stačí uvažovat $z = \omega \exp(\mathrm{i}\,\alpha\pi/2)$, $\omega \geqq 0$) a porovnáním reálných a imaginárních částí na obou stranách rovnice dostaneme soustavu dvou rovnic, která tvoří jádro pro získání požadovaných podmínek. Tyto podmínky a podrobnější postup jejich odvození jsou uvedeny v článku [2]. Zde se omezme na konstatování, že podmínky vypadají poměrně složitě (na rozdíl od klasických Routhových–Hurwitzových podmínek, ty se pro polynom třetího stupně redukují na jednoduché nerovnosti $a, b > 0$, $0 < c < ab$). Zajímavostí je, že zmíněný komplikovaný tvar se výrazně zjednoduší při hodnotě $\alpha = 2/3$, kdy platí:

Všechny kořeny polynomu $P(\,\cdot\,; a, b, c)$ náleží množině $M_{2/3}$, právě když platí kterákoliv z následujících (vzájemně se vylučujících) podmínek:

(i) $a \geqq 0, \quad b > 0, \quad c > 0$;

(ii) $a < 0, \quad b > a^2, \quad 0 < c < (a^2b^2 - b^3)/a^3$;

(iii) $a > 0, \quad b \leqq 0, \quad c > (a^2b^2 - b^3)/a^3$.

K možnosti získání kritéria pro polynom obecného stupně se autoři staví skepticky.

5.2. Lorenzův dynamický systém neceločíselného řádu

Výsledky předcházející části lze aplikovat při vyšetřování zlomkových rozšíření třídimenzionálních diferenciálních systémů prvního řádu. Těchto systémů se v literatuře vyskytuje celá řada, mezi nejznámější (a v současnosti také hojně studované) patří především chaotické dynamické systémy. My se zaměříme na model popisující (za značných zjednodušení) proudění vzduchu v atmosféře, který sestavil v roce 1963 americký meteorolog a matematik E. N. Lorenz (1917–2008). Studium kvalitativního chování tohoto systému je všeobecně považováno za zahájení éry deterministického chaosu a je spojeno především s objevem tzv. Lorenzova atraktoru. S jistou nadsázkou vyjádřeno, tento atraktor se stal neformálním logem chaotických dynamických systémů a jeho specifický tvar dal zpopularizovaný název „motýlí efekt"[2] pro zachycení jednoho z charakteristických rysů chaotického chování dynamických systémů, totiž jeho extrémní citlivosti na nepatrnou změnu hodnot počátečních podmínek.

[2]Tento termín popisuje hypotetickou meteorologickou situaci, kdy změna proudění vzduchu způsobená mávnutím křídel motýla je schopna vyvolat bouři na druhém konci zeměkoule.

Lorenzův dynamický systém konvektivního proudění v atmosféře je popsán soustavou tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$x' = \sigma(y - x), \qquad y' = rx - y - xz, \qquad z' = xy - \beta z, \tag{17}$$

kde σ je (až na násobek) Prandtlovo číslo (představuje poměr energie ztracené vlivem tření v tekutině a energie ztracené vlivem vedení tepla), r je (až na násobek) Rayleighovo číslo (bezrozměrná míra rozdílu teplot horní a dolní části vrstvy tekutiny) a parametr b je vztažen k poměru výšky vrstvy a délky konvektivního proudění. Všechny tyto parametry jsou kladná reálná čísla, přičemž se předpokládá $\sigma > \beta + 1$. Matematická pozoruhodnost systému (17) spočívá v tom, že navzdory své formální jednoduchosti (obsahuje pouze dvě jednoduché nelinearity) vykazuje pro různé hodnoty vstupních parametrů řešení s pestrou škálou chování, včetně chování v jistém smyslu nepředvídatelného. V dalším se omezíme na stručné shrnutí hlavních rysů bifurkační analýzy, kdy se změny kvalitativního chování řešení zkoumají v závislosti na měnícím se parametru r (hodnoty zbývajících parametrů považujeme za pevné).

Je-li $0 < r < 1$, pak (17) má jediné ekvilibrium, a to počátek $E^0 = [0, 0, 0]$. Pomocí linearizační věty lze snadno ukázat, že toto nulové řešení je (lokálně) asymptoticky stabilní. Skutečně, příslušná charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^3 + (1 + \beta + \sigma)\lambda^2 + (\beta + \sigma + \beta\sigma - \sigma r)\lambda + \beta\sigma(1 - r) = 0 \tag{18}$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = -\beta < 0$ a $\lambda_{2,3} = \bigl(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}\ \bigr)/2$. Všechny tři kořeny jsou tedy reálné, přičemž první a třetí je záporný pro všechny hodnoty r; prostřední je pak záporný pro $0 < r < 1$ a kladný pro $r > 1$. Navíc, užitím techniky Ljapunovovy funkce je možné prokázat, že (lokální) asymptotická stabilita při hodnotách $0 < r < 1$ má globální charakter, trajektorie vycházející z libovolného bodu fázového prostoru konverguje tedy k počátku. V případě $r > 1$ se společně se ztrátou lokální stability triviálního ekvilibria E^0 objevují dvě netriviální ekvilibria

$$E^{\pm} = \bigl[\pm\sqrt{\beta(r - 1)}, \pm\sqrt{\beta(r - 1)}, r - 1\bigr]$$

(pro hodnotu $r = 1$ tedy nastává tzv. vidlicová bifurkace). Linearizací podél těchto ekvilibrií dostáváme (pro obě netriviální ekvilibria stejnou) charakteristickou rovnici

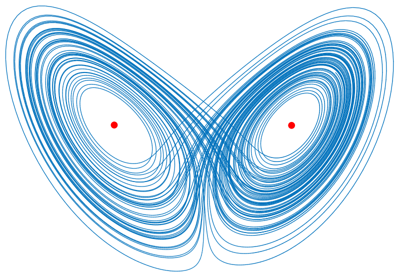
$$\lambda^3 + (1 + \beta + \sigma)\lambda^2 + \beta(\sigma + r)\lambda + 2\beta\sigma(r - 1) = 0. \tag{19}$$

Aplikací Routhova–Hurwitzova kritéria pak lze jednoduše prokázat známý výsledek, totiž že všechny tři kořeny rovnice (19) mají záporné reálné části právě tehdy, když

$$1 < r < r^* = \sigma\frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}. \tag{20}$$

Ekvivalentně, vztah (20) představuje podmínku pro (lokální) asymptotickou stabilitu netriviálních ekvilibrií $E^{\pm}$. Při hodnotě $r = r^*$ nastává tzv. subkritická Hopfova bifurkace, kdy nestabilní limitní cykly (existující již pro hodnoty parametrů r předcházející kritické hodnotě r^*) snižují postupně při nárůstu Rayleighova čísla r svoji amplitudu a při $r = r^*$ splynou s ohnisky $E^{\pm}$, jimž předají svoji nestabilitu. Při libovolné hodnotě $r > r^*$ jsou tedy pak všechna ekvilibria Lorenzova systému již nestabilní.

Lorenz zkoumal chování trajektorií systému (17) při volbě $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ a $r = 28$ (poznamenejme, že pro parametry $\sigma = 10$ a $\beta = 8/3$ je Hopfova bifurkační hodnota Rayleighova čísla $r^* \approx 24{,}74$). Navzdory nedokonalosti tehdejší výpočetní techniky se mu při této volbě parametrů podařilo objevit velmi specifické chování trajektorií, které je ilustrováno na obr. 2. Tyto trajektorie pro libovolně dlouhý čas leží v jisté omezené části fázového prostoru a jsou přitahovány množinou nulového objemu s fraktální strukturou (později se pro tuto množinu vžilo označení podivný atraktor). Podrobnější rozbor chování trajektorií Lorenzova systému následně motivoval precizaci tohoto chování, které je v současnosti označováno pojmem deterministický chaos.



Obr. 2. Trajektorie Lorenzova systému (s parametry $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ a $r = 28$) vyskytující se „blízko“ podivného atraktoru (červeně jsou vyznačena nestabilní ekvilibria $E^{\pm}$)

Výše připomenuté vlastnosti trajektorií charakterizují cestu od stability k chaosu, která je typická i pro řadu dalších chaotických systémů (včetně diskrétních). Otázkou je, zda nahrazení prvního řádu derivace v (17) neceločíselným řádem menším než jedna může přinést nějaká nová specifika provázející tuto cestu. Odpověď je kladná, a to hned v prvním klíčovém bodě této cesty, kterým je postupná ztráta stability ekvilibrií (při rostoucí hodnotě Rayleighova čísla r).

Vyšetříme tedy zlomkový Lorenzův systém, který má stejný tvar jako systém (17), pouze obyčejné derivace na levé straně nahradíme Caputovými derivacemi řádu $0 < \alpha < 1$ (ve všech třech složkách uvažujeme stejný řád α). Protože Caputova derivace konstantních funkcí je nulová, zlomkový Lorenzův systém zachovává ekvilibria původního systému (17). Navíc v důsledku platnosti linearizační věty i pro diferenciální rovnice neceločíselných řádů (viz [1]) dostáváme stejné charakteristické polynomy pro tato ekvilibria. Jediným rozdílem při analýze lokální stability ekvilibrií je tedy požadavek, aby všechny kořeny příslušných kubických charakteristických polynomů ležely v Matignonově sektoru M_α (připomeňme, že při $\alpha \to 1^-$ se tato vlastnost redukuje na příslušnost všech charakteristických kořenů do levé části komplexní poloroviny).

Analýza stability triviálního ekvilibria nepřináší nic nového. Skutečně, všechny tři kořeny příslušné charakteristické rovnice (18) jsou reálné, a tedy – stejně jako u Lorenzova systému prvního řádu – nutnou a postačující podmínkou pro jejich zápornost je $0 < r < 1$. Jiná je ovšem situace při diskusi stability netriviálních ekvilibrií. Zde se při analýze stability aplikuje zlomkové Routhovo–Hurwitzovo kritérium komentované v odstavci 5.1. Z důvodu velké početní náročnosti se omezíme na shrnutí závěrů pro případ $\sigma = 10$ a $\beta = 8/3$, který odpovídá výše uvedené Lorenzově volbě.

Lze ukázat, že existuje kritická hodnota

$$\alpha_{\mathrm{cr}} \approx 0{,}955\,612$$

řádu α taková, že při $0 < \alpha < \alpha_{\mathrm{cr}}$ jsou ekvilibria $E^{\pm}$ zlomkového Lorenzova systému (lokálně) asymptoticky stabilní vždy, kdykoliv existují (tedy pro všechna $r > 1$). Ještě zajímavější je ale situace v případě, kdy $\alpha_{\mathrm{cr}} < \alpha < 1$. Pak existuje dvojice hodnot $r^*_\alpha < r^{**}_\alpha$ (jednoznačně určených v intervalu (r^*, ∞) jako řešení jisté nelineární rovnice) taková, že netriviální ekvilibria $E^{\pm}$ zlomkového Lorenzova systému jsou (lokálně) asymptoticky stabilní pro všechna $1 < r < r^*_\alpha$ a $r > r^{**}_\alpha$, a jsou naopak nestabilní při $r^*_\alpha < r < r^{**}_\alpha$ (dodejme, že v případě $\alpha = \alpha_{\mathrm{cr}}$ obě hodnoty r^*_α, r^{**}_α splynou; jejich společná hodnota je $r_{\mathrm{cr}} \approx 197{,}857\,198$). Jinak vyjádřeno, je-li řád α mezi α_{cr} a jedničkou, pak s rostoucí hodnotou Rayleighova čísla r obě netriviální ekvilibria nejprve stabilitu ztratí (při $r = r^*_\alpha$), aby ji pak zpětně získala (při $r = r^{**}_\alpha$). Zároveň lze detekovat chaotické chování zlomkového systému při velkých hodnotách r. Dochází tak ke specifickému jevu, totiž koexistenci lokálně stabilních netriviálních ekvilibrií a chaotického chování jiných trajektorií zlomkového Lorenzova systému (podrobněji viz [2]). I tento výsledek tak naznačuje, že nahrazení celočíselného řádu derivace řádem neceločíselným může přinést nestandardní vlastnosti, a to i v případě klasických modelů.

Závěrem je možné konstatovat, že teorie zlomkového kalkulu přináší řadu nových problémů, často jednoduše formulovatelných, jejichž případné vyřešení může být užitečné i pro aplikační oblasti. A to je pro matematiky vždy dobrá zpráva.

Poděkování. Článek byl podpořen grantem GA20-11846S Grantové agentury České republiky. Autoři děkují doc. Mgr. Pavlu Řehákovi, Ph.D., za cenné připomínky, které přispěly k vylepšení textu.

L i t e r a t u r a

[1] Cong, N. D., Doan, T. S., Siegmund, S., Tuan, H. T.: *Linearized asymptotic stability for fractional differential equations.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 39 (2016), 1–13.

[2] Čermák, J., Nechvátal, L.: *The Routh–Hurwitz conditions of fractional type in stability analysis of the Lorenz dynamical system.* Nonlinear Dynam. 87 (2017), 939–954.

[3] Diethelm, K.: *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.* Springer, Berlin, 2010.

[4] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.: *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[5] Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: *Iterative functional equations.* Cambridge University Press, 1990.

[6] Matignon, D.: *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing.* Comput. Engrg. Systems Appl. (Lille) (1996), 963–968.

[7] Oldham, K., Spanier, J.: *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Math. Sci. Eng. 111, Academic Press, New York–London, 1974.

[8] Podlubný, I.: *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Math. Sci. Eng. 198, Academic Press, San Diego, 1998.

[9] Veselý, J.: *Poznámky k historii funkce gama.* In: J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): Člověk – umění – matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky, Dějiny matematiky 4. Prometheus, Praha, 1996, 49–71.