Petr Stehlík; Václav Vopravil
John Horton Conway (1937–2020)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 65 (2020), No. 3, 125–148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148353`

# John Horton Conway (1937–2020)

*Petr Stehlík, Václav Vopravil*

*Abstrakt.* Angloamerický matematik John Horton Conway byl všestrannou a charismatickou postavou, která významně ovlivnila teorie čísel, grup, her, uzlů, dynamických systémů i rekreační matematiku. Proslul svéráznou povahou i nekonvenčním přístupem k řešení problémů. Tento článek shrnuje stručně jeho neobvyklou životní cestu a představuje čtyři vybrané oblasti z jeho bohaté tvorby: nadreálná čísla, teorii kombinatorických her, hru života a klasifikaci sporadických grup.

## 1. Úvod

John Horton Conway se narodil 26. prosince 1937 v Liverpoolu. Tatínek Cyril byl vášnivým milovníkem vědy, ač sám musel po úmrtí svého otce ve 14 letech školu opustit a pomáhat mamince živit osm sourozenců. Díky fotografické paměti hltal a zpaměti znal celé encyklopedie a stal se oblíbeným asistentem v chemické laboratoři jedné z liverpoolských středních škol (mezi jeho studenty patřili mj. i George Harrison a Paul McCartney). Maminka Agnes, která musela také od svých 11 let pracovat, byla rovněž velkou milovnicí knih. Lásku ke vzdělání a knihám zdědily kromě Johna i jeho dvě starší sestry, Joan a Sylvia.

Conway údajně recitoval mocniny dvou do 1 024 již ve 4 letech a ve škole exceloval, což mu kromě obdivu přineslo i osamělost a uzavření se do svého vnitřního světa. Brzy byl rozhodnut stát se matematikem. Pro středoškolský časopis napsal v roce 1955 svůj první článek o $n$-rozměrných platónských tělesech.

Na podzim 1956 nastoupil na cambridgeskou univerzitu, kde nepatřil k nejpilnějším studentům, ale svým důvtipem a originalitou oslňoval jak spolužáky, tak profesory. Místo přednášek, které mu často připadaly nudné, se věnoval studiu „zajímavějších“ teorií (např. teorii uzlů) a vlastním projektům. Jedním z nich byl vodní počítač Winnie (Water Initiated Numerical Number Integrating Engine), který sestavil ve druhém roce svého studia na základě myšlenek Alana Turinga z kalíšků plnících se vodou.

Pro doktorské studium si vybral teorii čísel a školitele Harolda Davenporta[1], který spolupráci charakterizoval s anglickým humorem: „Měl jsem dva vynikající studenty – Bakera[2], kterému jsem zadal problém a on přišel se skvělým řešením, a Conwaye, kterému jsem zadal problém a on přišel se skvělým řešením úplně jiné úlohy.“ Conway během doktorského studia mj. dokázal, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše 37 pátých mocnin celých čísel, s tím, že 223 je jediné číslo, které vyžaduje

[1] Harold Davenport (1907–1969) anglický matematik známý pro svoje výsledky v teorii čísel, předseda Londýnské matematické společnosti (1957–1959).

[2] Alan Baker (1939–2018), anglický nositel Fieldsovy medaile z roku 1970 za práci v oblasti teorie čísel.

doc. RNDr. Petr Stehlík, Ph.D., Katedra matematiky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, e-mail: pstehlik@kma.zcu.cz, RNDr. Václav Vopravil, Praha, e-mail: gs@wopravil.cz

právě 37 sčítanců.[3] Conway, a hlavně Davenport, nepovažovali ale způsob důkazu za dostatečně elegantní a inovativní a Davenport Conwayovi nedoporučil výsledek publikovat. Proto se připisuje čínskému matematikovi Chenovi Jingrunovi, který publikoval svůj důkaz roku 1964.

S obtížemi způsobenými nedostatkem výsledků a nespolehlivostí působil Conway v šedesátých letech na různých pozicích na cambridgeské univerzitě. Mezitím se roku 1961 poprvé oženil s Eileen Howeovou, která byla o 7 let starší, a roku 1962 přišla na svět první ze čtyř dcer. Conwayova nesystematičnost vyvolávala u některých starších profesorů velkou nevoli zejména kvůli tomu, že svou povahou a hraním her tříštil pozornost i mnoha dalších doktorandů a mladých členů katedry. Vše se změnilo na přelomu šedesátých a sedmdesátých let, kdy Conway došel ke svým nejvýznamnějším výsledkům. Čtyři z nich podrobně rozebíráme v tomto článku: obecný a zároveň elegantně jednoduchý koncept nadreálných čísel (kap. 2), který vychází z důmyslné analýzy kombinatorických her (kap. 3), snadno pochopitelný buněčný automat nazývaný hra života s překvapivě bohatou dynamikou (kap. 4) a studium symetrií 24rozměrné Leechovy mřížky, které významně přispělo k úplné klasifikaci sporadických grup (kap. 5).

V sedmdesátých letech se Conway stal uznávanou osobností jak mezi odborníky, tak mezi širokou veřejností. Láska k jednoduchosti, úsměvné názvy a odkrývání neočekávaných souvislostí přitahovaly pozornost a zejména hra života vytvořila celý kult následovníků. Obrovské pracovní nasazení (pracoval často do noci), neochota se k čemukoliv zavazovat a životní postoj „dělej jen to, co tě baví“ Conwayovi přinesly oceňované výsledky. Vybraly si ale i daň v soukromém životě. Rozvedl se s první manželkou a oženil se s cambridgeskou doktorandkou ruského původu Larissou Queenovou, později se jim narodili synové Alex a Oliver.

Jako světoznámý matematik přijal roku 1987 prestižní profesorskou pozici Johna von Neumanna na princetonské univerzitě, částečně kvůli špatné finanční situaci způsobené šestinásobným otcovstvím i nepraktickým přístupem ke každodenním problémům, ale zejména kvůli faktu, že po 30 letech na cambridgeské univerzitě cítil potřebu změnit prostředí. Počátky v USA byly ale komplikované. Těžko se vyrovnával s americkou kulturou, v roce 1992 ho opustila manželka Larissa a postihl ho první infarkt. V roce 1993 se pokusil spáchat sebevraždu. Následovalo třetí manželství s Dianou Cutsogeorgeovou uzavřené v roce 2001, narození sedmého dítěte, syna Garetha, ale také druhý a těžší infarkt v roce 2003, vyžadující trojnásobný bypass.

I přes stále přibývající zdravotní problémy byl do svých 80 let téměř denně přítomen na princetonské katedře matematiky. Třetí infarkt ho v roce 2018 poslal do pečovatelského domu v nedalekém městě New Brunswick, kde 11. dubna 2020 podlehl komplikacím spojenými s onemocněním koronavirem covid-19.[4]

[3]Roku 1770 Joseph Louis Lagrange dokázal, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše čtyř druhých mocnin celých čísel, např. $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Cambridgeský matematik Edward Waring ve stejném roce vyslovil domněnku, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $g(k)$ takové, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet $g(k)$ $k$-tých mocnin celých čísel. David Hilbert tuto hypotézu dokázal roku 1909 a Conwayův výsledek lze shrnout do vztahu $g(5) = 37$.

[4]Životopisné údaje v tomto článku jsou, pokud není uvedeno jinak, čerpány z biografie [32]. Týká se to i celého úvodu s výjimkou posledního odstavce o úmrtí Johna Conwaye, který čerpá z nekrologu princetonské univerzity [41].

## 2. Nadreálná čísla

Conwayova nadreálná čísla **No** jsou fascinující z několika pohledů. Jsou postavena na velmi jednoduchých principech. Přesto významně rozšiřují reálná čísla $\mathbb{R}$ mj. o nekonečně velká ordinální čísla i o nekonečně malá čísla při zachování většiny algebraických vlastností. Navíc, jak uvidíme v kap. 3, nevznikla cíleně, ale jako vedlejší produkt ohodnocování kombinatorických her.

Jedním z nejpřekvapivějších faktů historického vývoje matematiky je relativně pozdní axiomatické zavedení reálných čísel [25], § 41. Jejich rigorózní výstavba je spojena až s druhou polovinou 19. století a jmény Karla Weierstrasse, Guiseppe Peana a Richarda Dedekinda. Právě posledně jmenovaný zavedl rozklady množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ umožňující korektní definici reálných čísel.

**Definice 1.** Dedekindův řez $(L, R)$ se skládá ze dvou množin $L, R \subseteq \mathbb{Q}$, které jsou neprázdné a takové, že $L \cup R = \mathbb{Q}$. Navíc každý prvek z $L$ je menší než všechny prvky z $R$ a množina $L$ neobsahuje největší prvek.

Dedekindovy řezy definují všechna reálná čísla.

**Příklad 2.** V případě, že množina $R$ má minimum, definuje Dedekindův řez racionální číslo $\min R$ např.

$$1 = (\{x \in \mathbb{Q};\ x < 1\}, \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 1\}) .$$

V případě, že množina $R$ nemá minimální prvek, pak Dedekindův řez definuje iracionální číslo $\inf R$, např.

$$\sqrt{2} = \left(\left\{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2)\right\}, \left\{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0 \wedge x^2 > 2\right\}\right) .$$

Do druhé poloviny 19. století spadá významný rozvoj další, pro nás velmi významné teorie, teorie nekonečných množin. Georg Cantor zavedl pomocí bijekce pojem kardinality nekonečných množin, ukázal, že reálná čísla mají větší kardinalitu než čísla přirozená a formuloval hypotézu kontinua (neexistuje množina s kardinalitou větší než přirozená čísla a menší než reálná čísla). Zavedl také ordinální čísla, nekonečnou posloupnost čísel zobecňující pořadí prvku v uspořádané množině. Ve své době se Cantorovým pracím a myšlenkám (existence jednoho nebo dokonce více nekonečen, nekonstruktivní důkazy apod.) dostalo silného odporu, jehož ústřední postavou byl Leopold Kronecker [25], § 41.

Nadreálná čísla jsou zavedena spojením a rozšířením myšlenek Dedekindova řezu a Cantorových ordinálních čísel pomocí dvojice navzájem se prolínajících rekurzivních definic.

**Definice 3.** Nadreálné číslo $x \equiv \{L \mid R\}$ je dvojice uspořádaných (dříve vytvořených nebo prázdných) množin nadreálných čísel takových, že neexistuje dvojice nadreálných čísel $x^L \in L$ a $x^R \in R$ splňující $x^R \leqslant x^L$.

Množiny $L$ a $R$ nazýváme levou a pravou množinou (z angl. left and right sets). Definice 3 dává smysl pouze s paralelní definicí vztahu $x \leqslant y$.[5]

[5]Dle Conwaye budeme rozlišovat $x \leq y$ pro běžně používaná čísla (racionální, reálná, ...) a $x \leqslant y$ pro nadreálná čísla.

**Definice 4.** Jsou-li $x \equiv \{X^L \mid X^R\}$ a $y \equiv \{Y^L \mid Y^R\}$ nadreálná čísla, potom platí $x \leqslant y$ právě tehdy, když neplatí $y \leqslant x^L$ ani $y^R \leqslant x$ pro žádné $x^L \in X^L$ a $y^R \in Y^R$.

V obou definicích i dále v textu používáme v návaznosti na Conwayovo značení identickou rovnost nadreálných čísel $x \equiv y$ a budeme ji odlišovat od rovnosti ve smyslu stejné hodnoty $x = y$, viz příklad 5. Nadreálná čísla $x \equiv \{X^L \mid X^R\}$ a $y \equiv \{Y^L \mid Y^R\}$ jsou si identicky rovna (značíme $x \equiv y$), pokud $X^L = Y^L$ a $X^R = Y^R$.

Nadreálná čísla budeme značit malými písmeny, jejich množiny pak velkými písmeny. Navíc pro nadreálné číslo $x$ budeme používat $X^L$ a $X^R$ k označení levé a pravé množiny čísla $x \equiv \{X^L \mid X^R\}$. Třídu všech nadreálných čísel označujeme **No**.[6]

Ukažme si korektnost definic na konstrukci nejjednodušších nadreálných čísel. Jsou-li $L = R = \emptyset$, je číslo $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ korektně definováno, protože $\emptyset$ žádné prvky nemá. Číslo $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ označíme 0 a píšeme $0 \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\}$.

Pomocí 0 lze zavést dvě další nadreálná čísla, $1 \equiv \{0 \mid\}$ a $-1 \equiv \{\mid 0\}$.[7] Všimněme si, že $\{0 \mid 0\}$ není nadreálné číslo, protože platí $0 \leqslant 0$.

Definujeme $x = y$, pokud $x \leqslant y$ a $y \leqslant x$, a ostrou nerovnost $x < y$, pokud $x \leqslant y$ a $y \nleqslant x$. Platí $-1 < 0 < 1$. Ukažme si platnost druhé nerovnosti. Platí $x \equiv 0 \equiv \{\mid\} \leqslant \{0 \mid\} \equiv 1 \equiv y$, protože $X^L = Y^R = \emptyset$, a neplatí tedy $y \leqslant x^L$ ani $y^R \leqslant x$ pro žádné $x^L \in X^L$ a $y^R \in Y^R$.

Zároveň ale $y \equiv 1 \equiv \{0 \mid\} \nleqslant \{\mid\} \equiv 0 \equiv x$, protože platí $x \equiv 0 \leqslant 0 \equiv y^L$. Proto $0 < 1$. Nerovnost $-1 < 0$ se ukáže obdobně.

Než budeme pokračovat, představme si koncept narozenin nadreálného čísla. Řekneme, že číslo 0 bylo vytvořeno (narodilo se) nultý den. Čísla $-1$, 1, která byla vytvořena z 0, se narodila první den. Díky tomu můžeme mluvit o mladších a starších nadreálných číslech (např. 0 je o den starší než 1).

V následujícím kroku (tj. druhý den) dostaneme čtyři nová nadreálná čísla $-2 \equiv \{\mid -1\}$, $-\frac{1}{2} \equiv \{-1 \mid 0\}$, $\frac{1}{2} \equiv \{0 \mid 1\}$, $2 \equiv \{1 \mid\}$ a platí

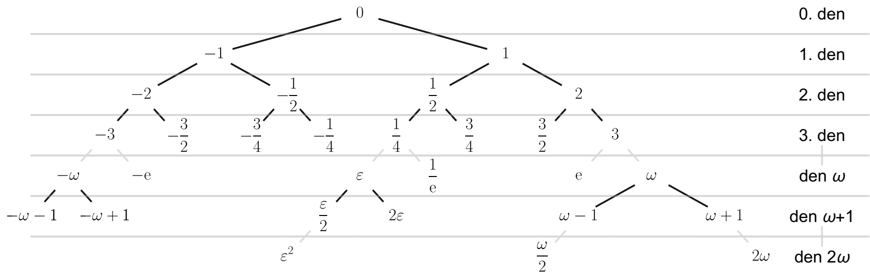
$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2. \qquad (1)$$

Poznamenejme opět, že existuje mnoho dvojic množin, která nevytvoří dle definice 3 nadreálné číslo (např. $\{1 \mid -1\}$), ale zmiňme i nový důležitý aspekt konstrukce. Existuje celkem 17 korektně definovaných nadreálných čísel, která lze vytvořit ve druhém dni (tj. z čísel 0, $-1$, 1). Ukazuje se ale, že jsou všechna rovna jednomu z již dříve definovaných čísel z (1), což si ilustrujeme na jednoduchém příkladě.

**Příklad 5.** Číslo $\{-1 \mid 1\}$ je korektně definováno a platí $0 = \{-1 \mid 1\}$ (zdůrazněme, že dle Conwaye zde jde o rovnost ve smyslu stejné hodnoty, nikoliv o identickou rovnost, tj. $\{-1 \mid 1\} \not\equiv 0 \equiv \{\mid\}$). Abychom rovnost dokázali, musíme ověřit, že $\{-1 \mid 1\} \leqslant \{\mid\}$ a současně $\{\mid\} \leqslant \{-1 \mid 1\}$.

[6] Opět se budeme držet Conwayova značení a používat **No** místo na první pohled přirozenějšího $\mathbb{S}$ (z angl. surreal numbers). Důvodem, jak uvidíme v pozn. 11, je zdůraznění faktu, že nadreálná čísla netvoří množinu, ale bohatší strukturu, tzv. vlastní třídu, podobně jako ordinální čísla **On**.

[7] Dle zvyku vynecháváme symbol prázdné množiny a množinové složené závorky, aby výrazy byly čitelnější, tj. budeme psát např. $1 \equiv \{0 \mid\}$ místo $1 \equiv \{\{0\} \mid \emptyset\}$ a podobně.




Obr. 1. Ilustrace postupné konstrukce některých nadreálných čísel, inspirováno [11]

První nerovnost plyne z faktu, že neexistuje $x^L \in \{-1\}$ pro které $0 \leqslant x^L$ a současně (triviálně) neexistuje žádné $y^R \in \emptyset$ splňující $y^R \leqslant \{-1 \mid 1\}$. Opačná nerovnost se ověří podobně. Obdobně můžeme ukázat např. $\{-1 \mid 0, 1\} = -\frac{1}{2}$, $\{-1, 0, 1 \mid\} = 2$, atd.

Třetí den můžeme ze sedmi dříve vytvořených čísel (1) zkonstruovat osm nových čísel $-3 \equiv \{\mid -2\}$, $-\frac{3}{2} \equiv \{-2 \mid -1\}$, $-\frac{3}{4} \equiv \left\{-1 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right\}$, $-\frac{1}{4} \equiv \left\{-\frac{1}{2} \,\middle|\, 0\right\}$ a $\frac{1}{4} \equiv \left\{0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right\}$, $\frac{3}{4} \equiv \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right\}$, $\frac{3}{2} \equiv \{1 \mid 2\}$, $3 \equiv \{2 \mid\}$, pro něž platí

$$-3 < -2 < -\frac{3}{2} < -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 2 < 3. \quad (2)$$

Tímto způsobem můžeme pokračovat dále. Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ získáme $n$-tý den z dříve vytvořených $2^n - 1$ nadreálných čísel $2^n$ nových, přičemž každé nové číslo lze reprezentovat tak, že množiny $L$ a $R$ mají nejvýše jeden prvek. Mezi každou dvojicí nově vytvořených čísel leží právě jedno dříve vytvořené, viz (1) a (2). Takto zkonstruujeme všechna celá čísla a dyadická racionální čísla ve tvaru $\frac{p}{2^q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Podle definice 3 lze ale získat další nadreálná čísla pomocí nekonečných množin celých a dyadických čísel, mluvíme o dni narození $\omega$. Tím získáme všechna zbylá (tj. nedyadická) racionální čísla, např.

$$\frac{1}{3} \equiv \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \frac{85}{256}, \ldots \,\middle|\, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \frac{43}{128}, \ldots\right\},$$

a všechna iracionální čísla, např. (všimněme si úzké vazby na Dedekindovy řezy z definice 1)

$$\sqrt{2} \equiv \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots \,\middle|\, \ldots, \frac{12}{8}, \frac{3}{2}, 2\right\}, \quad \pi \equiv \left\{3, \frac{25}{8}, \frac{201}{64}, \ldots \,\middle|\, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{51}{16}, \frac{101}{32}, \ldots\right\}.$$

Navíc ale získáváme i nereálná čísla jako je nejmenší nekonečné ordinální číslo[8]

$$\omega \equiv \{1, 2, 3, \ldots \mid\}, \quad (3)$$

větší než jakékoliv reálné číslo, nebo nekonečně malé číslo

$$\varepsilon \equiv \left\{0 \,\middle|\, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}, \quad (4)$$

nadreálné číslo, které je větší než 0 a zároveň menší než jakékoliv kladné reálné číslo.

[8]Všimněme si (na rozdíl od celých a dyadických čísel), že reprezentanta nadreálných čísel narozených dne $\omega$ nelze určit jednoznačně ani pomocí nějaké úmluvy. Zde lze alternativně použít např. $\omega \equiv \{\mathbb{Z} \mid\}$, nebo $\omega \equiv \{2, 4, 6, \ldots \mid\}$, nebo $\omega \equiv \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots \mid\}$.

Pro nadreálná čísla lze zavést binární operace sčítání a násobení, čímž získáme algebraickou strukturu. Podobně jako nadreálné číslo samotné se obě operace definují také rekurzivně.

**Definice 6.** Jsou-li $x \equiv \left\{X^L \mid X^R\right\}$ a $y \equiv \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$ nadreálná čísla, potom[9]

$$x + y \equiv \left\{X^L + y, x + Y^L \mid X^R + y, x + Y^R\right\}.$$

Conwayova intuice za definicí součtu, na první pohled komplikovanou, je, že součet dvou čísel by měl být větší (menší) než jakýkoliv součet, při kterém libovolný ze sčítanců nahradíme menším (větším) číslem.

Lze ukázat, že nadreálná čísla **No** s operací sčítání $+$ tvoří abelovskou (komutativní) grupu s neutrálním prvkem 0 a opačnými prvky $-x$ ve tvaru

$$-x \equiv \left\{-X^R \mid -X^L\right\}. \tag{5}$$

**Příklad 7.** Ilustrujme definici sčítání na jednoduchém příkladu, který nám ozřejmí racionalitu našeho značení $\frac{1}{2}$ pro nadreálné číslo $\{0 \mid 1\}$. Ukážeme, proč nedává smysl toto číslo označit jinak než $\frac{1}{2}$.[10]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \equiv \left\{0 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0 \;\middle|\; \frac{1}{2} + 1, 1 + \frac{1}{2}\right\} \equiv \left\{\frac{1}{2} \;\middle|\; 1\frac{1}{2}\right\} = 1.$$

**Definice 8.** Jsou-li $x \equiv \left\{X^L \mid X^R\right\}$ a $y \equiv \left\{Y^L \mid Y^R\right\}$ nadreálná čísla, potom

$$\begin{aligned} xy \equiv\ &\left\{X^L y + xY^L - X^L Y^L,\ X^R y + xY^R - X^R Y^R \right| \\ &\left| X^L y + xY^R - X^L Y^R,\ X^R y + xY^L - X^R Y^L \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Intuice za definicí se opírá o následující myšlenku. Například pro libovolná $x^L \in X^L$ a $y^L \in Y^L$ platí $x^L < x$ a $y^L < y$. Proto $(x^L - x)(y^L - y) > 0$. Po roznásobení a úpravě dostáváme $x^L y + xy^L - x^L y^L < xy$, viz první člen na pravé straně (6). Tvar ostatních členů lze odvodit obdobně.

Ukažme pro ilustraci, že násobení čísly 0 a 1 má očekávané vlastnosti, což opět ospravedlňuje jejich označení v nultém resp. prvním dni konstrukce nadreálných čísel.

**Příklad 9.** Ověřme nejprve $0x \equiv 0$ pro všechna $x \in \mathbf{No}$ ($x0 \equiv 0$ se ukáže podobně):

$$\begin{aligned} 0x &\equiv \left\{\emptyset x + 0X^L - \emptyset X^L, \emptyset x + 0X^R - \emptyset X^R \mid \emptyset x + 0X^R - \emptyset X^R, \emptyset x + 0X^L - \emptyset X^L\right\} \\ &\equiv \{\mid\} \equiv 0, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z faktu, že součet a součin prázdné množiny s libovolným prvkem je prázdná množina. Dále ukažme, že $1x \equiv x$. Budeme postupovat pomocí

[9] Součtem množiny a nadreálného čísla rozumíme množiny $M + n = \{m + n;\ m \in M\}$ a $n + M = \{n + m;\ m \in M\}$. Podobně součinem nadreálného čísla a množiny rozumíme $Mn = \{mn;\ m \in M\}$ a $nM = \{nm;\ m \in M\}$, značíme $-M = \{-m;\ m \in M\}$ a zavádíme součet a součin množin.

[10] V poslední rovnosti využíváme tzv. větu o nejstarším prvku (někdy též Simplicity theorem), která říká, že hodnota nadreálného čísla $x \equiv \{y \mid z\}$ je nejstarší číslo $x$ splňující $y < x < z$.

indukce. Z předchozího výpočtu víme, že $1 \cdot 0 \equiv 0$ a dále předpokládáme, že $1x \equiv x$ pro všechna $x \in X^L$ a $x \in X^R$. Pak platí

$$\begin{aligned} 1x &\equiv \left\{0x + 1X^L - 0X^L, \emptyset x + 1X^R - \emptyset X^R \,\middle|\, 0x + 1X^R - 0X^R, \emptyset x + 1X^L - \emptyset X^L\right\} \\ &\equiv \left\{1X^L \,\middle|\, 1X^R\right\} \equiv \left\{X^L \,\middle|\, X^R\right\} \equiv x, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost opět vyplývá z faktu, že součet a součin prázdné množiny s libovolným prvkem je prázdná množina.

Následně lze ukázat komutativitu vzhledem k násobení a asociativitu nadreálných čísel. Nadreálná čísla $\mathbf{No} \setminus \{0\}$ s operací násobení $\cdot$ tvoří abelovskou grupu s jednotkovým prvkem 1 a inverzním prvkem $y \equiv x^{-1}$ ve tvaru (pro $x > 0$)

$$x^{-1} = \left\{0, \frac{1 + (X^R - x)Y^L}{X^R}, \frac{1 + (X^L - x)Y^R}{X^L} \,\middle|\, \frac{1 + (X^L - x)Y^L}{X^L}, \frac{1 + (X^R - x)Y^R}{X^R}\right\}.$$

Dále lze ověřením distributivity $x(y + z) = xy + xz$ ukázat, že $(\mathbf{No}, +, \cdot)$ tvoří těleso. Nadreálná čísla tedy zachovávají většinu vlastností čísel reálných. Zmiňme ale dvě důležité výjimky, existenci nekonečných prvků a fakt, že nadreálná čísla jsou moc velká na to, aby byla nazývána množinou.

**Poznámka 10.** Nadreálná čísla nejsou, na rozdíl od reálných čísel, archimédovská. Pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel $x$, $y$ platí, že existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n \cdot x > y$. Pro nadreálná čísla tento vztah neplatí. Uvědomme si například, že nekonečně malé číslo $\varepsilon$ definované vztahem (4) splňuje $\varepsilon > 0$ ale platí $n\varepsilon < x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $x > 0$.

**Poznámka 11.** Z pohledu teorie množin netvoří nadreálná čísla $\mathbf{No}$ množinu, ale obecnější strukturu, tzv. třídu. Představme si, sporem, že $\mathbf{No}$ je množina všech nadreálných čísel. Pak lze ale podle definice 3 zavést $s \equiv \{\mathbf{No} \mid\}$, což je nadreálné číslo větší než všechna nadreálná čísla, tj. speciálně i $s > s$, což je spor. Mluvíme o tzv. vlastní třídě (která není množinou), více viz např. [4].

Nebudeme zde podrobně rozebírat teorii ordinálních ani hyperreálných čísel, ale naznačíme konstrukci dalších nekonečných a nekonečně malých čísel, která budou mladší než čísla $\omega$ a $\varepsilon$ definovaná v (3)–(4). Můžeme položit

$$\omega + 1 \equiv \{\omega + 0, \mathbb{N} + 1 \mid\} = \{\omega \mid\},$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že $\omega$ je větší než všechna přirozená čísla. Podobně lze zavést další ordinální čísla, např.:

$$\begin{aligned} \omega + 2 &\equiv \{\omega + 1 \mid\}, \\ \omega + 3 &\equiv \{\omega + 2 \mid\}, \\ &\vdots \\ 2\omega &\equiv \{\omega + 1, \omega + 2, \ldots \mid\} = \{\omega + \mathbb{N} \mid\}, \\ 2\omega + 1 &\equiv \{2\omega \mid\}, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3\omega &\equiv \{2\omega + \mathbb{N} \mid\}, \\ &\vdots \\ \omega^2 &\equiv \{\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots \mid\}, \\ &\vdots \\ \omega^\omega &\equiv \left\{\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots \,\middle|\right\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Konstrukce je nekonečná. Nadreálná čísla narozená později než v den $\omega$ navíc ale zaplňují i „mezery“ mezi staršími čísly. Např. mezi $\mathbb{N}$ a $\omega$ nacházíme nekonečná nadreálná čísla, která již nejsou ordinální (Cantorova ordinální čísla mají ve smyslu definice 3 tvar $\{L\mid\}$, tj. $R=\emptyset$):

$$\begin{aligned} \omega-1 &\equiv \{\mathbb{N}\mid\omega\}, \\ \omega-2 &\equiv \{\mathbb{N}\mid\omega-1\}, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\omega}{2} &\equiv \{\mathbb{N}\mid\omega-1,\omega-2,\ldots\}, \\ &\vdots \\ \sqrt{\omega} &\equiv \Big\{\mathbb{N}\;\Big|\;\omega,\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{3},\ldots\Big\}. \end{aligned}$$

Podobně můžeme zaplňovat mezery mezi jakýmikoli ordinálními čísly (např. mezi $\omega$ a $\omega+1$), ale i mezi reálnými čísly, atd. Existuje tak i množství nekonečně malých čísel mezi 0 a všemi kladnými reálnými čísly, např.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\equiv \{0\mid\varepsilon\}, \\ \frac{\varepsilon}{4} &\equiv \Big\{0\;\Big|\;\frac{\varepsilon}{2}\Big\}, \\ &\vdots \\ \varepsilon^2 &\equiv \Big\{0\;\Big|\;\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{4},\ldots\Big\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\varepsilon &\equiv \Big\{\varepsilon\;\Big|\;1,\frac{1}{2},\ldots\Big\}, \\ 3\varepsilon &\equiv \Big\{2\varepsilon\;\Big|\;1,\frac{1}{2},\ldots\Big\}, \\ &\vdots \\ \sqrt{\varepsilon} &\equiv \Big\{\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon\ldots\;\Big|\;1,\frac{1}{2},\ldots\Big\}. \end{aligned}$$

Conwayova nadreálná čísla byla poprvé publikována roku 1972 [12]. Širší pozornosti se jim dostalo díky beletristickému dílu Donalda E. Knutha[11] z roku 1974 [26], v českém překladu viz [27]. Citujme alespoň krátkou pasáž:

> *Na počátku všeho byla prázdnota a John H. W. H. Conway začal tvořit čísla. I řekl Conway:*
>
> *„Nechť jsou dvě pravidla, která všechna čísla vytvářejí, malá i velká.*
>
> *Toto budiž pravidlo první: Každé číslo nechť odpovídá dvěma množinám čísel už stvořených tak, že žádný prvek množiny levé není větší nebo roven žádnému prvku množiny pravé…“*

Tento neobvyklý text je i filozofickou úvahou o povaze matematiky a Knuth v něm navrhl i název *surreal numbers*, Conway do té doby mluvil pouze o „číslech“.

Eleganci konstrukce nadreálných čísel ocenily i další významné matematické osobnosti. Kurt Gödel ji považoval za první úplnou teorii nekonečně malých čísel [32], § 10. Martin Kruskal studoval vlastnosti nadreálných funkcí $f\colon \mathbf{No}\to\mathbf{No}$ a možnosti zavedení diferenciálního a integrálního počtu. Ačkoliv bylo např. ukázáno, že existuje široká třída nadreálných funkcí, pro které lze zavést určitý integrál [16], aplikace nadreálných čísel je v tuto dobu omezena na kombinatorické hry.

[11] D. E. Knuth (1938), americký informatik a matematik, autor známé série knížek The Art of Computer Programming, tvůrce typografického systému TEX a Metafontu.

## 3. Kombinatorické hry

Jak jsme již upozornili, John Conway nezkonstruoval nadreálná čísla cíleně, ale na základě analýzy kombinatorických her. Profesoři i studenti katedry matematiky na cambridgeské univerzitě v šedesátých a sedmdesátých letech trávili významnou část svého volného času hraním šachů, dámy, go a mnoha dalších her. John Conway nepatřil k nejsoutěživějším hráčům, ale byl zcela nejplodnějším autorem nových her[12]. Zároveň vášnivě analyzoval situace, možnosti vítězných strategií a s nimi spojené ohodnocení aktuálního stavu hry. První hrou, která byla tímto způsobem analyzována, byla ve třicátých letech 20. století hra nim, při které se odebírají objekty (např. zápalky) z několika hromádek, s tím, že vítězem se stává ten, kdo odebere poslední objekt (alternativně prohrává ten, kdo odebere poslední objekt). John Conway si všiml, že podobně lze ohodnotit konečné pozice v go a každá pozice vzniká součtem jiných a jednodušších pozic. Stejně rozebral pozice i v mnohých dalších (často jím samým zkonstruovaných) hrách. Vznikla teorie kombinatorických her, jejíž základy nyní představíme a jejímž vedlejším výsledkem byla konstrukce nadreálných čísel.

Kombinatorické hry[13] hrají dva hráči, levý a pravý (jež budeme označovat stručně $L$ a $R$ z angl. left and right), kteří se v tazích střídají. V každém tahu změní svou současnou pozici do nějaké jiné pozice podle pravidel hry. Hráč na tahu se svého tahu nemůže vzdát. Ve hře nejsou žádné skryté informace, oběma hráčům jsou známy všechny možné tahy. Hra probíhá bez náhody (jako je hod kostkou nebo míchání karet). Pravidly hry je zaručeno, že hra po konečně mnoha tazích skončí dosažením koncové pozice. Poslední tah určuje vítěze. V normální variantě hráč, který nemůže táhnout (nemá pravidly povolený tah), prohrál. V betlové variantě (misère) prohrává hráč, který je donucen udělat poslední tah.

Říkáme, že hráč má vítěznou strategii, pokud může vyhrát nezávisle na tazích soupeře. Popsat takovou strategii znamená popsat pro jednoho z hráčů v každé možné pozici, jaký tah má hráč provést.

Hry je možné rozdělit na nestranné (impartial), kdy oba hráči mají po dobu hry na výběr stejné tahy, a na barevné (partizan), kdy vybírají z odlišných možností. Nestranné hry se řeší jednodušeji, základem je klasická Spragueova–Grundyova teorie (každá konečná nestranná hra je ekvivalentní jednohromádkové variantě hry nim). Velikost této hromádky je možné určit pomocí rekurzivní Spragueovy–Grundyovy funkce (více v [7], § 3).

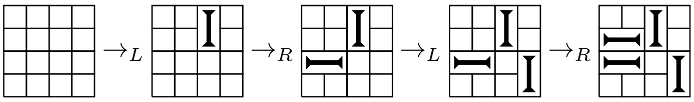
Conwayův přínos se týká barevných her. Příkladem barevné hry, kterou použijeme pro ilustraci Conwayovy teorie, je dominové dláždění.[14] Dva hráči střídavě kladou kameny domina (obdélník $2 \times 1$) na předem danou hrací plochu, levý hráč svisle, pravý vodorovně, jednotlivé kameny se nemohou překrývat. Hrací plocha může být libovolná, nejčastěji jde o mřížku z $n \times n$ čtverečků. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

[12] Mezi nejznámější patří Sprouts (výhonky), nebo tzv. zelený hackenbush, viz [7], [11].

[13] Z pohledu teorie her jsou speciální podmnožinou dynamických her. Obecnou teorií her se zde ale nezabýváme, a proto v následujícím textu vypouštíme přídavné jméno kombinatorické a budeme hovořit pouze o hrách.

[14] V angličtině lze hru dominové dláždění nalézt pod názvy Domineering, Dominoes, Stop-Gate nebo Cross-Cram, autorem hry je Göran Andersson [7].

Na obr. 2 jsou znázorněny první čtyři tahy jedné možné partie na mřížce o velikosti $4 \times 4$.



Obr. 2. Příklad prvních čtyř tahů partie hry dominové dláždění na hrací ploše velikosti $4 \times 4$

Pokud $G$ označuje hru (aktuální konfiguraci hry), potom levý hráč může táhnout do množiny nových pozic $G^L$ a pravý hráč do množiny nových pozic $G^R$, píšeme $G \equiv \left\{G^L \mid G^R\right\}$. Hra je následně definována dvěma množinami, které mohou být prázdné, spočetné nebo nespočetné. Analýza pozice je nezávislá na tom, kdo ve hře začíná. Zkoumáme tedy možné tahy z perspektivy obou hráčů. Je-li na tahu levý hráč a $G^L = \emptyset$, potom prohrává a pravý vyhrává a obráceně.

Nyní můžeme přistoupit k formální rekurzivní definici abstraktní hry.

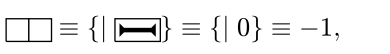
**Definice 12.** Kombinatorická hra je dvojice $\left\{G^L \mid G^R\right\}$, kde $G^L$ a $G^R$ jsou množiny (dříve vytvořených nebo prázdných) her.

Význam $G^L$ a $G^R$ pro konkrétní hru $G$ je následující:

$$\begin{aligned} G^L &= \{\text{hry, kam levý hráč může táhnout z } G \text{ jedním tahem}\},\\ G^R &= \{\text{hry, kam pravý hráč může táhnout z } G \text{ jedním tahem}\}. \end{aligned}$$

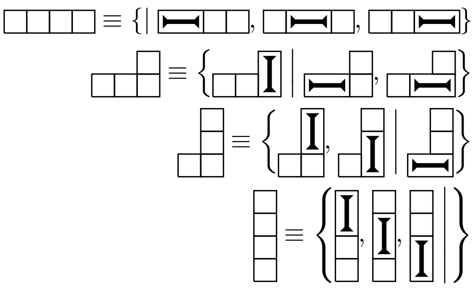
Pro ilustraci se nyní pokusme zopakovat myšlenky z konstrukce nadreálných čísel (viz obr. 1) na hru dominové dláždění.

**Příklad 13 (Dominové dláždění a nejstarší nadreálná čísla).** Ve hře dominové dláždění nultého dne vzniká jediná hra $\square = \{|\} \equiv 0$. Nadreálným číslům $-1$ a $1$, vzniklým prvního dne, odpovídají hry



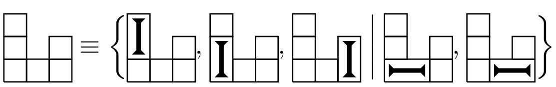
$$\equiv \{|\,0\} \equiv -1, \qquad \equiv \{0\,|\} \equiv 1.$$

Čtyřem nadreálným číslům (1) vzniklým druhého dne odpovídají hry



$$\begin{aligned} &\equiv \{|\,-1, 0, -1\} = \{|\,-1\} \equiv -2,\\ &\equiv \{-1 \mid 1, 0\} = \{-1 \mid 0\} \equiv -\frac{1}{2}, \qquad (7)\\ &\equiv \{-1, 0 \mid 1\} = \{0 \mid 1\} \equiv \frac{1}{2},\\ &\equiv \{1, 0, 1\,|\} = \{1\,|\} \equiv 2. \end{aligned}$$

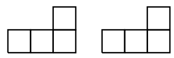
Třetího dne vznikne např. hra



$$\equiv \left\{-\frac{1}{2}, *, \frac{1}{2} \,\middle|\, 2, 1\right\} = \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right\} \equiv \frac{3}{4},$$

kde přesnou hodnotu druhé hry z $G^L$ nelze vyjádřit nadreálným číslem. Význam symbolu $*$ a platnost třetí rovnosti ozřejmíme v příkladu 14.

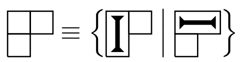
Všimněme si, že číselná hodnota jakékoliv hry je kladná, má-li levý hráč vítěznou strategii a záporná, má-li ji pravý hráč. Číselná hodnota kvantifikuje počet tahů, které má daný hráč navíc k dispozici. To platí při vhodné interpretaci i pro neceločíselné hodnoty. Např. výhoda poloviny tahu pravého hráče ve hře (7) znamená, že hrací plocha složená ze dvou takových tvarů (7) dává pravému hráči výhodu jednoho tahu



$$\equiv -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Hry jsou ale bohatší než čísla. Při srovnání definic 3 a 12 snadno zjistíme, že u her nevyžadujeme nerovnost mezi prvky levé a pravé množiny $G^L$ a $G^R$. Mnohé hry tedy nejsou čísly.

**Příklad 14 (Dominové dláždění a hry, které nejsou nadreálnými čísly).** Uvažujme následující jednoduchou hru, která vzniká prvního dne a jejíž hodnota je tzv. hvězdička



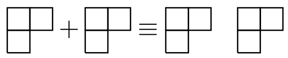
$$\equiv \{0 \mid 0\} \equiv *.$$

Počáteční pozice není výhodnější ani pro levého ani pro pravého hráče (hodnota tedy není ani záporná ani kladná), vítězná strategie ale existuje pro začínajícího hráče.

Zmiňme nyní důležité vlastnosti hry $*$. Budeme-li uvažovat všechny hry $G$, které odpovídají kladným nadreálným číslům (tj. pro které má výhodu levý hráč) a zavedeme relaci $<$ podobně jako v definici 4, lze ukázat, že $* < G$. Podobně pro všechny hry $G$ odpovídající záporným nadreálným číslům, ve kterých má výhodu pravý hráč, platí $G < *$.

Druhým pozorováním je fakt, že součtem (který zavádíme ekvivalentně s definicí 6) je hra s nulovou hodnotou, což lze intuitivně naznačit následovně

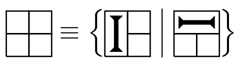
$$* + * \equiv$$



$$= 0.$$

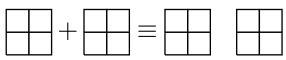
Ve výsledné hře má vítěznou strategii druhý hráč (první hráč svým tahem vždy zablokuje jeden ze dvou tvarů).

Podobným příkladem nečíselné hry, ve které vítězí začínající hráč, je



$$\equiv \{1 \mid -1\} \equiv \pm 1.$$

Zvláštní hodnota $\pm 1$ je zvolena proto, že lze ukázat, že hra je větší než všechny hry s nadreálnou hodnotou menší než $-1$ a menší než všechny hry s hodnotou větší než 1. Poznamenejme, že i v tomto případě platí, že hodnota součtu je rovna nule,



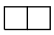
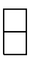
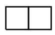
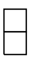
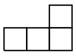
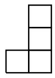
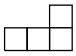
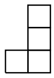
$$= 0.$$

Ve výsledné hře má opět vítěznou strategii druhý hráč, přičemž hra skončí po čtyřech tazích.

Dvě hry uvedené v příkladu 14 ilustrují tzv. fuzzy hry, ve kterých má vítěznou strategii začínající hráč a píšeme $G \parallel 0$. Hry tedy můžeme obecně klasifikovat takto: $G = 0$ (hra $G$ je nulová), pokud existuje vítězná strategie pro druhého hráče; $G > 0$, pokud existuje vítězná strategie pro levého hráče; $G < 0$, pokud existuje vítězná strategie pro pravého hráče a $G \parallel 0$, pokud existuje vítězná strategie pro prvního hráče.

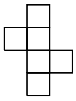
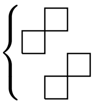
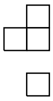
Tyto čtyři relace můžeme i kombinovat mezi sebou, $G \geqslant 0$ (levý vyhraje, nezačíná-li), $G \leqslant 0$ (pravý vyhraje, nezačíná-li), $G \mathrel{|\!\!\triangleright} 0$ (levý vyhraje, pokud začíná) a $G \mathrel{\triangleleft\!\!|} 0$ (pravý vyhraje, pokud začíná). Upozorněme, že například $\nleqslant$ neznamená $>$ jako u čísel, ale $\mathrel{|\!\!\triangleright}$ . Žádná jiná možnost než výše uvedené neexistuje (viz [11], Th. 50).

Při zavedení opačné hry dle definice 5 lze ověřit, že $G - G = 0$, a proto ve hrách tvaru $G - G$ má vždy výhodu druhý hráč. Příklady takových her pro dominové dláždění jsou konfigurace

 $+$  $\equiv 1 - 1 \equiv$   $= 0,$  $+$  $\equiv -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \equiv$   $= 0.$

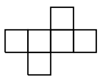
Kombinace fuzzy her mezi sebou případně fuzzy her s hrami, které odpovídají nadreálným číslům, vytváří celou řadu konfigurací, které opět nejsou čísly. Tuto skutečnost ilustrujme na jednoduchém příkladě.

**Příklad 15 (Hry $\uparrow$ a $\downarrow$).** Uvažujme hru, která se označuje „up“

 $= \Big\{$  $\Big|$  $\Big\} \equiv \{0 \mid *\} \equiv \uparrow.$

Všimněme si, že ve hře má vítěznou strategii levý hráč nezávisle na tom, zda začíná či hraje druhý. Platí tedy $\uparrow > 0$, ale zároveň $\uparrow < G$ pro všechna kladná nadreálná čísla $G > 0$.

Obdobně hra označovaná „down“

 $= \downarrow$

splňuje $\downarrow = -\uparrow$, $\downarrow < 0$ a zároveň $\downarrow > G$ pro všechna záporná nadreálná čísla $G < 0$.

**Poznámka 16.** Jak jsme již naznačili, Conway objevil nadreálná čísla jako vedlejší výsledek svého studia kombinatorických her. Oproti našemu výkladu Conwayovou prioritou nebylo nalezení konfigurace studované hry k dané číselné hodnotě, ale naopak analýza předem dané konfigurace – určení hráče s vítěznou strategií, nalezení této strategie, přiřazení číselné hodnoty apod.

Pozoruhodný příběh nadreálných čísel a kombinatorických her tímto úvodem zdaleka nekončí. Moderní teorie kombinatorických her vychází z klasické knížky Johna Conwaye [11]. Standardní referencí je encyklopedie Elwyna Berlekampa[15], Johna Con-

[15] Elwyn Berlekamp (1940–2019) byl americký matematik známý především díky svým příspěvkům k teorii kombinatorických her, teorii kódů a rekreační matematice. Jako systematický matematik, který nevyhledával pozornost, se dostával často s okázalým Conwayem do konfliktů, které v souvislosti se zásadní knihou [7] přerostly až v hrozby soudními spory, viz [32]. Navzájem ale své matematické schopnosti oceňovali, slovy Berlekampa: „Kdyby nebyl tak dobrý, netoleroval bych ho.“

waye a Richarda Guye[16] [7], napsaná nezvyklým stylem – dialogem se čtenářem. Originál byl publikován v roce 1982, novější čtyřsvazkové vydání v roce 2001. Zde čtenář najde analýzu více než sta her na tisíci stránkách. Modernější zdroje [3] a [22], případně česká skripta [9], jsou určeny jako vysokoškolské učebnice. Pro pokročilé čtenáře lze doporučit druhé vydání [11] z roku 2001 a učebnici [35]. Pro složitější výpočty pak slouží volně dostupný softwarový nástroj CGSuite [34].

## 4. Hra života

Žádný z výsledků Johna Conwaye nezískal mezi širokou veřejností tolik pozornosti jako hra života (angl. Game of Life, často i zkráceně GOL), jednoduchý buněčný automat na dvourozměrné mřížce $\mathbb{Z}^2$ definovaný třemi snadno pochopitelnými pravidly a umožňující velmi bohatou dynamiku.

Cesta Conwaye a jeho spolupracovníků ke hře života byla přirozeně motivována vývojem v matematice a informatice kolem druhé světové války. Alan Turing těsně před válkou navrhl univerzální matematický výpočtový model (dnes označovaný jako Turingův stroj), který se skládá z nekonečné paměti reprezentované jednorozměrnou mřížkou (páskou) [38]. John von Neumann a Stanisław Ulam následně položili základy obecné teorie buněčných automatů [29], dynamických systémů s diskrétním časem, prostorem i stavovým prostorem. V šedesátých letech dvacátého století došlo k významnému posunu v porozumění deterministickému chaosu, např. díky výsledkům Alexandra Šarkovského týkajícím se diskrétní logistické rovnice [37].

Motivováni a zároveň zklamáni složitostí obecných teorií a výsledků Johna von Neumanna usilovali členové skupiny Johna Conwaye (zahrnující např. Michaela Guye, Simona Nortona, Milese Reida) o konstrukci co nejjednodušších pravidel pro buněčné automaty na dvourozměrné mřížce vedoucí ke komplexnímu chování. Mnoho neúspěšných návrhů během nesčetných přestávek na kávu v průběhu několika let nakonec celou skupinu přivedlo v roce 1970 ke hře života.

Dvourozměrná nekonečná mřížka $\mathbb{Z}^2$ reprezentuje buňky, z nichž každá je v libovolném čase buď mrtvá (stav 0, na obrázcích bílá) nebo živá (stav 1, na obrázcích černá), tj. může nabývat hodnot z binárního stavového prostoru $\{0, 1\}$. Každá buňka má v mřížce osm sousedů (dva vertikální, dva horizontální a čtyři diagonální, tzv. Mooreova mřížková topologie). Dynamika v diskrétním čase $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ je definována tak, že v každé iteraci dochází k vývoji podle tří pravidel:

**Pravidlo 1 – narození.** Je-li buňka v čase $t$ mrtvá a právě tři sousedé jsou živí, poté je buňka v čase $t + 1$ živá.

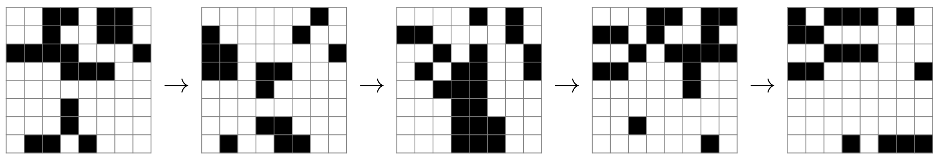
**Pravidlo 2 – umírání.** Je-li buňka v čase $t$ živá a méně než dva sousedé jsou živí, je v čase $t + 1$ mrtvá z důvodu nemožnosti se rozmnožit. Podobně je v čase $t + 1$ mrtvá, jsou-li alespoň čtyři sousedé živí, a to z důvodu nedostatku potravy.

**Pravidlo 3 – přežití.** Je-li buňka v čase $t$ živá a dva nebo tři sousedé jsou živí, poté je buňka i v čase $t + 1$ živá.

[16] Richard Guy (1916–2020) byl britský matematik zabývající se teorií čísel, teorií her i teorií grafů. Ve skupině „tří mušketýrů“ teorie kombinatorických her působil často jako zklidňující prvek mezi organizovaným Berlekampem a živelným Conwayem. Shodou okolností zemřel přirozenou smrtí měsíc před svým spoluautorem Johnem Conwayem. Jejich společnou snahu o popularizaci matematiky hezky shrnuje krátká vzpomínka bývalého editora MAA [2].

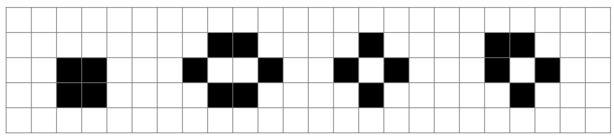
Formálněji lze hru života zavést jako dvourozměrný buněčný automat popsaný rekurentním vztahem
$$x(t+1) = f_{GOL}(x(t)), \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$
kde funkce (tzv. přepisovací pravidlo) $f_{GOL}\colon \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ je definována předpisem
$$(f_{GOL}(x))_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ pokud } x_{i,j} = 0 \text{ a } \displaystyle\sum_{(k,l)\in\mathscr{N}(i,j)} x_{k,l} = 3, \\ \qquad \text{nebo } x_{i,j} = 1 \text{ a } \displaystyle\sum_{(k,l)\in\mathscr{N}(i,j)} x_{k,l} \in \{2, 3\}, \\ 0 \text{ jinak,} \end{cases}$$
přičemž $\mathscr{N}(i, j)$ značí množinu 8 sousedů buňky $(i, j)$ v dvourozměrné mřížce $\mathbb{Z}^2$.

Tato jednoduchá pravidla umožňují dynamiku, o které bylo rychle zřejmé, že ji nelze jednoduše charakterizovat. Každá snaha o její popis vedla k objevu nových a zajímavých jevů. Zatímco dnes máme k dispozici nepřeberné možnosti simulačních prostředků, počáteční výpočty probíhaly na cambridgeské univerzitě pomocí hrací desky a kamenů dámy. Příklad dynamiky hry života je na obr. 3.



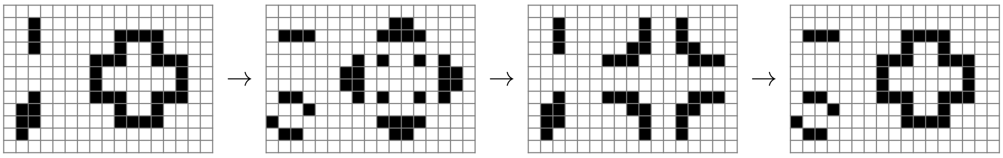
Obr. 3. První čtyři iterace hry života s náhodnou počáteční podmínkou

Rychle se hromadící zajímavé struktury byly vzhledem k povaze Johna Conwaye a jeho kolegů i nevědecké formě vzniku hry života u kávy pojmenovávány neformálně a úsměvně. Základními objekty jsou tzv. *still lifes* (neměnné životy), z matematického hlediska jde o stacionární řešení $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, pro která platí $x = f_{GOL}(x)$, viz obr. 4.

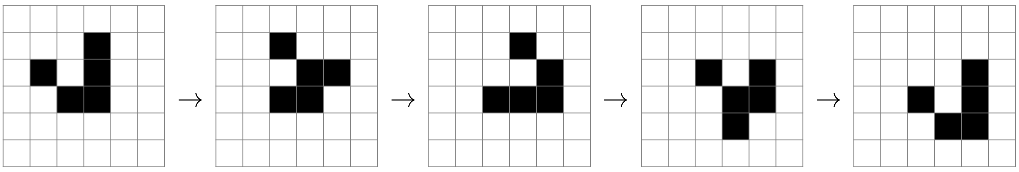


Obr. 4. Čtyři příklady stacionárních struktur hry života (tzv. still lifes), hovorově přezdívaných po řadě *block, beehive, tub, boat* (volně přeloženo blok, úl, vana, loďka)

Dále existují $k$-periodické struktury, tzv. *oscillators* (oscilátory), $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, pro které platí
$$x = \underbrace{f_{GOL}(f_{GOL}(\ldots f_{GOL}}_{k\text{-krát}}(x)\ldots)),$$
viz obr 5.



Obr. 5. První tři iterace hry života ilustrující existenci $k$-periodických struktur: vlevo nahoře 2-periodický *blinker* (mrkač), vlevo dole 2-periodická *toad* (ropucha), vpravo pak 3-periodický *cross* (kříž). Jejich zobrazená kombinace je 6-periodická



Obr. 6. První čtyři iterace hry života ilustrující existenci cestující struktury

Dalším zajímavým dynamickým jevem jsou cestující struktury, tzv. *spaceships* (vesmírné lodě). Jsou to řešení $x(t)$ rovnice (8), pro něž existují konstanty $k$, $l$, $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$x_{i+k,j+l}(t+m) = x_{i,j}(t).$$

O tom, jak hra života přitahovala (nejen) matematiky, svědčí fakt, že první cestující strukturu, tzv. *glider* (kluzák), s $k = l = 1$ a $m = 4$, objevil otec tehdejšího studenta Michaela Guye, již v odst. 3 zmíněný Richard Guy, viz obr. 6.

Populárně naučný článek [19] z října 1970 napsaný dlouholetým Conwayovým přítelem Martinem Gardnerem[17] přivedl ke hře života nejen matematickou komunitu, ale i širokou veřejnost. Conwayova skupina předpověděla existenci do nekonečna se rozšiřujících struktur a za jejich objev vypsal Conway odměnu padesáti dolarů. Držitelem ceny se stal Bill Gosper[18], který hned měsíc po Gardnerově článku, v listopadu 1970, objevil tzv. *glider gun* (generátor cestujících struktur), strukturu, která každých 30 iterací vypouští stejným směrem cestující strukturu, Guyův glider z obr. 6.

Conway následně formuloval hypotézu, podle které je hra života univerzální, a tedy ekvivalentní s Turingovým strojem, a je schopna simulovat libovolný počítačový výpočet. Odrazen komplikovanou technickou konstrukcí Conway hypotézu nikdy nedo-

[17] Martin Gardner (1914–2010) byl americký spisovatel, novinář a popularizátor vědy, zejména matematiky. Napsal přes 100 knih a byl známý díky svým sloupkům Mathematical Games v časopise Scientific American, ve kterých mj. popularizoval i Conwayova nadreálná čísla, kombinatorické hry, hru života a mnohé další Conwayovy hádanky a hlavolamy. S Conwayem byl v neustálém kontaktu, často se navštěvovali a chovali k sobě velký respekt. Berlekamp, Conway a Guy věnovali svoji encyklopedii [7] „Martinovi Gardnerovi, který přinesl více matematiky většímu množství čtenářů než kdokoliv jiný“ (volně přeloženo). Gardner naopak označoval veškeré Conwayovo dílo za „hluboké, průlomové, standardy bořící, originální, okouzlující, vtipné a okořeněné hraním s jazykem, za které by se nemusel stydět ani Lewis Carroll“ (volně dle [32]).

[18] Bill Gosper (*1943) je americký matematik a informatik, který se proslavil konstrukcí do nekonečna se šířící struktury ve hře života (tzv. *glider gun*), která znamenala základní stavební kámen pro univerzalitu hry života, a též Gosperovým algoritmem pro sčítání hypergeometrických řad.

kázal. Spokojil se jen se svým intuitivním přesvědčením a začal se věnovat jiným otázkám.[19]

Popularita hry života nicméně velmi rychle rostla, zvyšující se počet amatérských i profesionálních příznivců hledal nové stacionární, periodické, cestující i do nekonečna se šířící struktury[20]. Hra života zároveň vzbudila i vědecký zájem o buněčné automaty, agentní modely a jejich aplikace v epidemiologii (např. Greenbergův–Hastingsův automat [39], § 6.2), ekonomii [18], teorii komplexních systémů [6] atd. Programovací jazyk NetLogo byl motivován teorií buněčných automatů a agentních modelů.

V čistě teoretické rovině pokračovalo systematické studium buněčných automatů. Hlavní postavou byl Stephen Wolfram[21], který za pomoci svých spolupracovníků klasifikoval všechny jednorozměrné elementární buněčné automaty (tj. na rozdíl od hry života pouze na jednorozměrné mřížce $\mathbb{Z}$). Jeho hlavním dílem je kniha A new kind of science [40], ve které, kromě zmíněné klasifikace, ambiciózně nastínil nový směr pro přírodní vědy, který by se místo tradičních diferenciálních rovnic opíral více právě o buněčné automaty. Součástí knihy je i první důkaz univerzality (a tedy ekvivalence s Turingovým strojem) buněčného automatu, konkrétně tzv. pravidla 110, jehož autorem je Matthew Cook [15].

Matthewovi Cookovi, zaměstnanci Wolfram Research, bylo soudní cestou zakázáno, aby svůj výsledek publikoval před vydáním A new kind of science [40]. Conway se sám marně u Wolframa přimlouval, aby Cookovi v publikaci nebránil. Vztah Conwaye a Wolframa, dvou geniálních britských matematiků a hlavních postav teorie buněčných automatů, byl bohužel vždy napjatý. Conway nesdílel Wolframovo přesvědčení o širokém významu buněčných automatů pro budoucnost vědy. Conway byl neorganizovaný vědec bojující s drobnými problémy každodenního života, zatímco Wolfram je systematický a úspěšný podnikatel. K jejich nepříjemnému střetu došlo i kvůli polemickému článku Johna Horgana [23], ve kterém se Wolfram vyjádřil skepticky k „posedlosti matematiků důkazy“ a Conway odvětil, že „Wolfram není skutečný matematik, protože ti nezakládají firmy a nejednají agresivním způsobem…“, přičemž za toto tvrzení se později omluvil [32], kap. 9.

## 5. Sporadické grupy a Leechova mřížka

Abstraktní výsledky týkající se symetrií Leechovy mřížky nezískaly Johnu Conwayovi takový věhlas mezi širokou veřejností, jako kombinatorické hry nebo hra života. Z matematického hlediska jsou ale neméně významné. Přispěly silně ke klasifikaci konečných grup, jednomu z nejobdivuhodnějších matematických počinů druhé poloviny 20. století. Zaveďme základní pojmy z teorie grup (více k obecné teorii např. [8], [17], [28]).

[19] Důkaz univerzality hry života se nyní přiřazuje Paulu Rendellovi a lze jej najít např. v [1].

[20] Fascinující encyklopedii těchto struktur (a mnoho dalších zajímavostí) obsahuje `https://www.conwaylife.com/wiki/`. V červenci 2020 je zde uvedeno 337 stacionárních, 519 periodických a 129 cestujících struktur.

[21] Stephen Wolfram (*1959) je angloamerický matematik, fyzik a podnikatel. Dizertace týkající se částicové fyziky, kterou obhájil v 21 letech, ho přivedla k teorii buněčných automatů, k níž vydatně přispěl klasifikací jednorozměrných elementárních buněčných automatů. V roce 1988 založil Wolfram Research, jehož hlavní produkt Wolfram Mathematica je úspěšný a široce používaný matematický software.

**Definice 17.** Uspořádanou dvojici $(G, \circ)$ s neprázdnou množinou $G$ a binární operací $\circ\colon G \times G \to G$ nazveme grupou, pokud:

(G1) operace $\circ$ je asociativní,

(G2) existuje neutrální prvek $e \in G$, tj. $e \circ g = g \circ e = g$ pro všechny $g \in G$,

(G3) pro každý prvek $g \in G$ existuje prvek inverzní $g^{-1} \in G$ splňující $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Je-li $G$ konečná množina, mluvíme o *konečné grupě* a počet prvků $|G|$ nazveme *řádem grupy*. Dle zvyku budeme grupovou operaci vynechávat, tj. např. rovnosti z (G2) budeme zapisovat jako $eg = ge = g$.

**Příklad 18.** Rotační symetrie rovnostranného trojúhelníka tvoří grupu s prvky odpovídajícími rotacím o $e = 0°$, $R_{120} = 120°$ a $R_{240} = 240°$. Snadno nahlédneme, že $e^{-1} = e$, $R_{120}^{-1} = R_{240}$ a $R_{240}^{-1} = R_{120}$. Mluvíme o cyklické grupě $C_3$ řádu $|C_3| = 3$. Poznamenejme, že $C_3$ je izomorfní např. s grupou celých čísel $\mathbb{Z}_3$ s operací sčítání modulo 3.

Struktura $(H, \circ)$ je podgrupou $(G, \circ)$, je-li $H$ podmnožinou $G$ a splňuje-li axiomy grupy (definice 17) se stejnou operací $\circ$ a neutrálním prvkem $e$, značíme $H \leq G$.

Triviální podgrupou nazýváme podgrupu tvořenou pouze neutrálním prvkem $I = \{e\}$. Podgrupa $H \leq G$ se nazývá vlastní, pokud $H \neq G$, značíme $H < G$. Všechny konečné grupy jsou izomorfní s podgrupami symetrických grup $S_n$ všech permutací prvků $n$-prvkové množiny.

**Věta 19 (Cayleyova).** *Každá konečná grupa řádu $n$ je izomorfní s podgrupou symetrické grupy $S_n$.*

Při hledání podgrup hraje významnou omezující roli řád grupy. Základním výsledkem je Lagrangeova věta (jemnější výsledky pak poskytují Burnsidova a Sylowovy věty).

**Věta 20 (Lagrangeova).** *Je-li $H \leq G$, pak $|H|$ dělí $|G|$.*

Podgrupa $H \leq G$ se nazývá normální, pokud platí $g^{-1}hg \in H$ pro všechna $h \in H$ a $g \in G$. Označujeme $H \trianglelefteq G$, případně pro vlastní normální podgrupy $H \triangleleft G$.

**Příklad 21.** Rozšíříme-li příklad 18 a budeme uvažovat grupu symetrií rovnostranného trojúhelníka zahrnující rotace o 120° a osovou souměrnost, dostáváme tzv. dihedrální grupu $D_3$ řádu 6 tvořenou prvky

$$D_3 = \{e, r, r^2, z, rz, r^2z\}.$$

Tato grupa má dvě vlastní podgrupy, normální $H_1 = \{e, r, r^2\}$ a $H_2 = \{e, z\}$, která normální není.

Grupa $G$ se nazývá jednoduchá, jestliže $G$ a triviální grupa $I = \{e\}$ jsou její jediné normální podgrupy.

**Příklad 22.** Zobecníme-li příklad 18, pak grupa rotačních symetrií pravidelného konvexního $n$-úhelníka tvoří grupu $C_n$. Tato grupa je jednoduchá právě tehdy, když je $n$ prvočíslem. V opačném případě můžeme nalézt normální podgrupu, např. $C_6$ má dvě normální podgrupy (rotace o násobky 120° a rotace o násobky 180°, odpovídající $C_3$ a $C_2$).

Je-li $H$ vlastní normální podgrupou $G$, $H \triangleleft G$, pak faktorgrupou (podílovou grupou) nazýváme množinu $G/H := \{gH : g \in G\}$, kde $gH = \{g \circ h : h \in H\}$, s grupovou operací $\circ$ definovanou $g_1 H \circ g_2 H = (g_1 g_2)H$. Řadou normálních grup nazýváme posloupnost $I = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$. Z definice jednoduché grupy plyne, že řada je maximální (nelze přidat žádnou další grupu mezi $G_i$ a $G_{i+1}$) právě tehdy, když každá faktorgrupa $G_{i+1}/G_i$ je jednoduchá. Zásadním tvrzením pro klasifikaci konečných grup je pak následující tvrzení [5].

**Věta 23 (Jordanova–Hölderova).** *Mějme dánu konečnou grupu $G$. Všechny maximální řady normálních grup $I = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$ mají stejnou délku $n$ a stejnou množinu faktorgrup $\{G_{i+1}/G_i : i = 0, 1, \ldots, n-1\}$.*

**Příklad 24.** $I \triangleleft C_2 \triangleleft C_6$ a $I \triangleleft C_3 \triangleleft C_6$ jsou maximální řady normálních grup délky $n = 2$ grupy $C_6$ z příkladu 22. Množina faktorgrup je v obou případech $\{C_2, C_3\}$.

Takto lze najít maximální řady normálních grup všech cyklických grup $C_n$, které obsahují faktorgrupy $C_p$ prvočíselného řádu. Podobně lze postupovat i pro všechny abelovské grupy, pro které je binární operace z definice 17 navíc komutativní. V určitém smyslu je tedy hledání jednoduchých grup podobné hledání prvočísel, rozklad ale není jednoznačný.

Sám Otto Hölder v roce 1892 na základě Jordanova–Hölderova rozkladu inicioval snahu o klasifikaci všech jednoduchých grup [36]: „Es wäre von dem grössten Interesse, wenn eine Übersicht der sämmtlichen einfachen Gruppen von einer endlichen Zahl von Operationen gegeben werden könnte“ (volně přeloženo: „Bylo by nanejvýše zajímavé, pokud by bylo možné podat přehled veškerých jednoduchých konečných grup“). Již Évariste Galois věděl, že cyklické grupy prvočíselných řádů a alternující grupy řádu alespoň pět[22] tvoří dvě nekonečné třídy jednoduchých grup. Třetí nekonečnou množinou jsou rozličné grupy, které jsou souhrnně označovány jako grupy Lieova typu. Souvisí s významnou množinou kompaktních nekonečněrozměrných Lieových grup, které popisují spojité symetrie a mají velký význam např. pro řešení diferenciálních rovnic [31].

Sporadické grupy jsou poslední třídou jednoduchých grup a, na rozdíl od výše uvedených tří nekonečných tříd, jich je konečně mnoho (konkrétně 26). První sporadickou grupu $M_{12}$ objevil Émile Mathieu v roce 1861 a následně připojil další 4 podobné grupy $M_{11}$, $M_{22}$, $M_{23}$, $M_{24}$. Další sporadická grupa byla objevena až v roce 1964 chorvatským matematikem Zvonimirem Jankem, detaily k historii i teorii lze nalézt v [36]. Během následujících dvanácti let byly úsilím mnoha matematiků objeveny všechny zbylé sporadické grupy. V roce 2004 se podařilo ukázat, že žádná další konečná jednoduchá grupa neexistuje, a tím dokončit Hölderův projekt klasifikace konečných jednoduchých grup, viz [5].

[22] Alternující grupy jsou grupy tzv. sudých permutací, jejich řád $|A_n| = n!/2$ je tedy poloviční oproti symetrickým grupám všech permutací $S_n$.

Conwayův originální příspěvek ke klasifikaci sporadických grup začíná u Leechovy mřížky. Německý algebraik Ernst Witt ve třicátých letech 20. století zkonstruoval Steinerův systém[23] $S(5, 8, 24)$, schéma 759 osmic z 24 symbolů, tak, že každá pětice symbolů se vyskytuje právě v jedné osmici. Grupa automorfismů tohoto Steinerova systému je $M_{24}$ a osmice mohou mít tvar např.

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8),\\ w_2 &= (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12),\\ &\vdots\\ w_{759} &= (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24). \end{aligned}$$

Z Wittova schématu vychází i samoopravný binární Golayův kód navržený švýcarským aplikovaným matematikem Marcelem Golayem. Vytvoříme 759 vektorů $g_i \in \mathbb{Z}_2^{24}$ délky 24 z Wittova systému tak, že $(g_i)_j = 1$, kdykoliv je $j$ prvkem dané osmice (tj. $j \in w_i$), a $(g_i)_j = 0$, pokud tomu tak není ($j \notin w_i$):

$$\begin{aligned} g_1 &= 111111110000000000000000,\\ g_2 &= 111100001111000000000000,\\ &\vdots\\ g_{759} &= 000000000000000011111111. \end{aligned}$$

Navíc ale přidáme nové vektory, které získáme sčítáním všech možných dvojic těchto vektorů po složkách modulo 2. Kromě původních 759 vektorů obsahujících 8 jedniček tím získáme jeden vektor samých nul, 2 576 vektorů s 12 jedničkami, 759 vektorů s 16 jedničkami a jeden vektor samých jedniček. Takto získaná množina vektorů je již uzavřená pro výše definované sčítání mod 2. Golayův kód obsahuje celkem $1 + 759 + 2576 + 759 + 1 = 4\,096$ vektorů.

Leechova mřížka je množina bodů v prostoru $\mathbb{R}^{24}$. John Leech v roce 1967 objevil tuto mřížku při zkoumání celočíselných lineárních kombinací Golayových vektorů ve standardní aritmetice (tj. ne v modulární). Naznačme její strukturu [30] pomocí bodů nejbližších k počátku $o = 0^{24}$ (symbolem $0^{24}$ označíme vektor dvaceti čtyř nul), z ostatních bodů lze postupovat podobně. Existují tři typy bodů v minimální vzdálenosti $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ od počátku. První třídou jsou body o souřadnicích $v_1 = \left(0^{16}, (\pm 2)^4_{\text{sudý}\ \pm}\right)$ (ne zcela korektní zápis naznačující šestnáct nulových souřadnic, osm souřadnic s hodnotami $\pm 2$ na pozicích odpovídajících některé osmici z Wittova systému, přičemž počet kladných i záporných znamének je sudý). Těchto vektorů je $n_1 = 759 \cdot 2^7$, kde 759 samozřejmě odpovídá velikosti Wittova systému. Druhým typem sousedů počátku jsou body $v_2 = (0^{22}, (\pm 4)^2)$ mající dvě nenulové souřadnice $\pm 4$. Těchto bodů je $n_2 = 4 \cdot \binom{24}{2} = 1\,104$. Poslední skupinou bodů jsou vektory typu $v_3 = (\pm 1^{23}, \pm(-3))$, přičemž jich vytváříme $n_3 = 24 \cdot 4\,096 = 98\,304$ tak, že pro každý z 24 vektorů typu $(1^{23}, -3)$ měníme znaménko 1 nebo $-3$ postupně na všech pozicích, které odpovídají

[23] Steinerův systém $S(t, k, n)$ je speciální typ blokového schématu obsahující $n$ množin o velikosti $k$ tak, že každá $t$-tice je obsažena v právě jedné množině.

| $d$ | $K(d)$ | uspořádání |
|---|---|---|
| 1 | 2 | |
| 2 | 6 | pravidelný šestiúhelník |
| 3 | 12 | pravidelný dvacetistěn |
| 4 | 24 | |
| 8 | 240 | |
| 24 | 196 560 | Leechova mřížka |

Tab. 1. Známé hodnoty kissing number $K(d)$, maximálního počtu dotyků koulí se stejným poloměrem

všem 4 096 vektorům z Golayova kódu. Počátek (a podobně každý další bod Leechovy mřížky) má dohromady

$$n_1 + n_2 + n_3 = 97\ 152 + 1\ 104 + 98\ 304 = 196\ 560$$

sousedů ve stejné vzdálenosti $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Souvislost Leechovy mřížky se symetrickým Wittovým schématem i Golayovým kódem přiměla Johna Conwaye ke studiu symetrií této mřížky. Ukázalo se, že každý ze 196 560 sousedů počátku sousedí přesně s 4 600 dalšími sousedy počátku a totéž platí pro libovolný další bod mřížky. Conway následně s pomocí Johna Thompsona[24] popsal symetrie v Leechově mřížce a objevil novou sporadickou grupu, dnes nazývanou na jeho počest 1. Conwayova grupa $Co_1$. Bylo zjištěno, že Conwayova grupa $Co_1$ obsahuje dalších jedenáct sporadických grup, samozřejmě včetně $M_{24}$ odpovídající symetrii Wittova systému i všech další Mathieuových grup a dalších dvou grup, které byly objeveny přímo Conwayem a Thompsonem, $Co_2$, $Co_3$.

Později se ukázalo [10], že Leechova mřížka poskytuje optimální uspořádání koulí v $\mathbb{R}^{24}$. Toto uspořádání, kde středy koulí leží v bodech mřížky, má nejvyšší možnou hustotu a zabírá přibližně 0,19 % prostoru $\mathbb{R}^{24}$. Každá koule se dotýká celkem 196 560 sousedních koulí, lepšího výsledku nelze dosáhnout. Poznamenejme, že maximální počet dotyků $d$-rozměrné koule s dalšími koulemi se stejnými poloměry se označuje $K(d)$ – kissing number (volně „polibkové číslo“). Všechny známé hodnoty jsou shrnuty v tabulce 1.

V roce 1973 nezávisle na sobě Bernd Fischer a Robert Griess předpověděli existenci největší sporadické grupy, tzv. monstra $M$. Jméno údajně pochází od Conwaye stejně tak jako pravděpodobně první výpočet jejího řádu [32]:

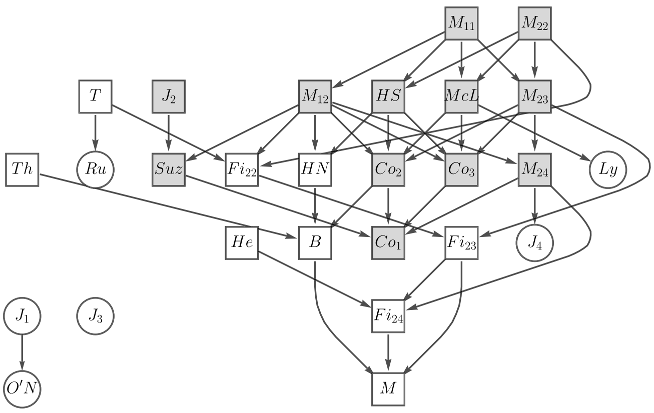
$$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8 \cdot 10^{53}.$$

Robert Griess ji následně v roce 1976 zkonstruoval [21] a, jak se později ukázalo, završil dvanáctileté hledání sporadických grup. Úsilí více než 100 matematiků, které se rozprostřelo do více než 500 článků, vyústilo v tzv. klasifikační větu:

[24] John Griggs Thompson (*1932) americký algebraik, který významně přispěl ke klasifikaci konečných jednoduchých grup, např. důkazem faktu, že neabelovské konečné jednoduché grupy mají vždy sudý řád. Za svoji práci byl oceněn mj. Fieldsovou medailí v roce 1970 a Abelovou cenou v roce 2008, více detailů v článku [28]. Ač s Johnem Conwayem nesdílel mnoho lidských vlastností a lišili se i ve způsobu práce ([32], kapitola 8), jejich společné úsilí vyústilo v objevení tří důležitých jednoduchých grup.

**Věta 25.** *Každá konečná jednoduchá grupa je izomorfní s*

- *cyklickou grupou $C_p$ prvočíselného řádu $p$, nebo*
- *alternující grupou $A_n$ s $n \geq 5$, nebo*
- *jednou z 16 tříd grup Lieova typu, nebo*
- *jednou z 26 sporadických grup.*[25]




| zkratka | název |
|---|---|
| $M_n$ | Mathieuovy |
| $T$ | Titsova* |
| $J_n$ | Jankovy |
| $HS$ | Higmanova–Simsova |
| $McL$ | McLaughlinova |
| $Th$ | Thompsonova |
| $Ru$ | Rudvalisova |
| $Suz$ | Suzukiho |
| $Fi_n$ | Fischerovy |
| $HN$ | Haradova-Nortonova |
| $Co_n$ | Conwayovy |
| $Ly$ | Lyonsova |
| $He$ | Heldova |
| $B$ | Baby monster |
| $M$ | Monster |

Obr. 7. Vazby mezi sporadickými podgrupami, inspirováno [28], [33]. Šipka naznačuje, že daná grupa je vlastní podgrupou. Grupy ve čtvercích jsou vlastní podgrupy monstra (tzv. šťastná rodinka). Grupy se šedým pozadím jsou grupy symetrií Leechovy mřížky

Její důkaz byl považován za uzavřený článkem Davida Gorensteina [20] z roku 1986. Nicméně kvůli odstraňování (vzhledem k rozsahu zcela samozřejmých) nedostatků a chybějících částí důkazu se nyní považuje za dokončení důkazu až rok 2004 [5].

John Conway kromě objevu výše zmíněných grup týkajících se Leechovy mřížky přispěl ke klasifikaci spoluvytvořením Atlasu konečných grup [13], který obsahuje detailní popisy a vlastnosti konečných jednoduchých grup, a spoluodkrytím vazby monstra na eliptické modulární funkce [14].

## 6. Závěrečné poznámky

Conwayova tvorba značně přesahuje uvedené výsledky. Vzhledem k rozsahu se nedostalo na mnoho jeho dalších významných příspěvků. Např. významně přispěl k teorii uzlů tím, že vytvořil jejich systematické názvosloví. Zabýval se dále i podobností identit plynoucích z Fibonacciho posloupnosti s goniometrickými rovnostmi. Studenty i širokou veřejnost přitahoval paradoxy, hrami a jednoduchými otázkami. Díky fotografické paměti byl schopen citovat přes 1 000 číslic Ludolfova čísla $\pi$. Byl proslulý i díky algoritmu *doomsday*, který určuje den v týdnu pro libovolné datum. Aby si udržoval svěží

[25] Někdy je uváděno 27 grup. Titsova grupa je některými autory řazena mezi sporadické, jinými ke grupám Lieova typu [33].

mysl i v pozdějším věku, musel správně určit den v týdnu pro deset náhodných dat, než se přihlásil na svůj počítač. Dokázal stejně vášnivě formulovat otevřené otázky z teorie grup i otázky pochopitelné pro širokou veřejnost. Jeho dosud nevyřešený klavírní problém je otázka, jaký je největší možný obsah půdorysu tělesa, které lze otočit okolo pravoúhelného rohu v chodbě dané šířky. Conway je i autorem známé „čtecí“ posloupnosti (angl. *look-and-say* sequence)

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, \ldots$$

a prozkoumal její vlastnosti (např. asymptotický růst délky $n$-tého bloku o přibližně 30 %). Byl známý i díky důmyslným hádankám, uveďme jednu z poloviny 60. let [24]:

> V autobuse jsem včera slyšel rozhovor mezi dvěma kouzelníky:
>
> A: „Mám kladný počet dětí; jejich stáří jsou kladná celá čísla. Pokud sečtete jejich věk dohromady, získáte číslo tohoto autobusu. Pokud vynásobíte jejich věk, získáte můj vlastní věk.“
>
> B: „Jak zajímavé! Pokud mi řeknete váš věk a řeknete mi, kolik dětí máte, mohu zjistit jejich věk?“
>
> A: „Ne!“
>
> B: „Aha! Ale teď už vím, jak jste starý!“
>
> Jaké je číslo autobusu?

Výsledky v kap. 2–5 představují nejen hloubku a šířku Conwayova přínosu, ale snad i věrně reprezentují jeho jedinečný přístup, který vyvolával řadu kontroverzí. Díky svému nadšení a charismatu strhával studenty a vědce pro jím formulované otázky. Zároveň byl nepřístupný i dlouholetým spoluautorům pro otázky, které ho nezajímaly. Byl kritizován, že diskusemi a pohledy ničí přístup studentů, ale byl ochoten každoročně dva týdny věnovat nadaným středoškolákům na letních táborech. Byl považován za originálního přednášejícího schopného vysvětlit abstraktní koncepty jednoduchým způsobem, který ale zároveň často přicházel pozdě, bez zájmu a nepřipravený. Chlubil se tím, že v životě nikdy nepracoval a celý život si hrál, ale usilovná práce o nocích i víkendech ho připravila o důvěru tří manželek a sedmi dětí. Odmítal filozofickou debatu o důsledcích komplexního chování své hry života, ale zároveň na konci života vytvářel se Simonem Kochenem teorie, které matematicky popisovaly hluboké otázky o svobodné vůli a deterministické povaze světa.

Conwaye tak lze lidsky i oborově jen těžko zařadit. Jeho práce a přístup vyvolávají hluboké otázky o povaze matematiky. Pro případné doplňující informace odkazujeme čtenáře zejména na biografii [32] a věříme, že tento článek bude sloužit i jako motivace pro všechny, kteří se nebojí jít vlastní cestou.

**Poděkování.** Autoři vřele děkují anonymnímu recenzentovi, šéfredaktoru PMFA Antonínu Slavíkovi, Haně Rajdlové, Vladimíru Švíglerovi a Jonáši Volkovi za velmi užitečné komentáře a návrhy na vylepšení textu.

L i t e r a t u r a


[1] Adamatzky, A.: *Collision-based computing.* Springer, 2002.

[2] Albers, D.: *Remembering Richard K. Guy and John Horton Conway.* Dostupné z `https://think.taylorandfrancis.com/richard-guy-and-john-conway/` [cit. 3. 8. 2020].

[3] Albert, M. H., Nowakowski, R. J., Wolfe, D.: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory.* AK Peters, 2019.

[4] Alling, N. L.: *Fundamentals of analysis over surreal number fields.* Quadratic Forms and Real Algebraic Geometry 19 (1989), 565–573.

[5] Aschbacher, M.: *The status of the classification of the finite simple groups.* Notices Amer. Math. Soc. 51 (2004), 736–740.

[6] Bak, P.: *How nature works: The science of self-organized criticality.* Springer, 1999.

[7] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning ways for your mathematical plays.* Taylor & Francis Inc, 2001.

[8] Carter, N.: *Visual group theory.* Mathematical Association of America, 2009.

[9] Cihlář, J., Vopravil, V.: *Hry a čísla*, PF UJEP, Ústí nad Labem, 1995.

[10] Cohn, H., Kumar, A., Miller, S. D., Radchenko, D., Viazovska, M.: *The sphere packing problem in dimension 24.* Ann. of Math. 185 (2017), 1017–1033.

[11] Conway, J.: *On numbers and games.* Academic Press, 1976.

[12] Conway, J. H.: *All numbers, great and small.* The Univ. of Calgary Math. Res. Paper 149 (1972).

[13] Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A., Wilson, R. A.: *Atlas of finite groups.* Oxford University Press, 1985.

[14] Conway, J. H., Norton, S. P.: *Monstrous moonshine.* Bull. Lond. Math. Soc. 11 (1979), 308–339.

[15] Cook, M.: *Universality in elementary cellular automata.* Complex Systems 15 (2004), 1–40.

[16] Costin, O., Ehrlich, P., Frideman, H. M.: *Integration on the surreals: a conjecture of Conway, Kruskal and Norton.* Dostupné z arXiv: 1505.02478 (2015).

[17] Drápal, A.: *Teorie grup: základní aspekty.* Karolinum, 2000.

[18] Epstein, J., Axtell, R.: *Growing artificial societies.* MIT Press, 1996.

[19] Gardner, M.: *Mathematical games.* Scientific American 223 (1970), 120–123.

[20] Gorenstein, D.: *Classifying the finite simple groups.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 14 (1986), 1–98.

[21] Griess, R. L., Jr.: *The structure of the "monster" simple group.* In: Proceedings of the Conference on Finite Groups (Univ. Utah, Park City, Utah, 1975), 1976, 113–118.

[22] Haff, L. R., Garner, W. J.: *An introduction to combinatorial game theory.* Lulu.com, 2018.

[23] Horgan, J.: *The death of proof.* Scientific American 4 (1993), 93–103.

[24] Khovanova, T.: *Conway's wizards.* Dostupné z arXiv: 1210.5460 (2012).

[25] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 3.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990.

[26] Knuth, D.: *Surreal numbers: how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness: a mathematical novelette.* Addison-Wesley, 1974.

[27] Knuth, D.: *Nadreálná čísla.* PMFA 23 (1978), 66–76, 130–139, 187–196, 246–261. (Překlad: Helena Nešetřilová.)

[28] Křížek, M., Somer, L.: *Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup.* PMFA 53 (2008), 177–187.

[29] von Neumann, J.: *The general and logical theory of automata.* In: Cerebral Mechanisms in Behavior. The Hixon Symposium. John Wiley & Sons, 1951, 1–31.

[30] Pfender, F., Ziegler, G. M.: *Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs.* Notices Amer. Math. Soc. 51 (2004), 873–883.

[31] Pravda, V.: *Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry.* PMFA 52 (2007), 219–230.

[32] Roberts, S.: *Genius at play: the curious mind of John Horton Conway.* Bloomsbury, 2015.

[33] Ronan, M.: *Symmetry and the monster.* Oxford University Press, 2006.

[34] Siegel, A.: *Combinatorial game suite.* Dostupné z `http://cgsuite.sourceforge.net/`, 2011.

[35] Siegel, A.: *Combinatorial games theory.* Grad. Stud. Math. 146. AMS, 2013.

[36] Solomon, R.: *A brief history of the classification of the finite simple groups.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 38 (2001), 315–352.

[37] Šarkovskiĭ, O. M.: *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself.* Ukraïn. Mat. Zh. 16 (1964), 61–71.

[38] Turing, A. M.: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* Proc. London Math. Soc. 42 (1936), 230–265.

[39] de Vries, G., Hillen, T., Lewis, M., Müller, J., Schönfisch, B.: *A course in mathematical biology.* SIAM, vol. 12, 2006.

[40] Wolfram, S.: *A new kind of science.* Wolfram Media, 2002.

[41] Zandonella, C.: *Mathematician John Horton Conway, a 'magical genius' known for inventing the 'game of life', dies at age 82.* Dostupné z `https://www.princeton.edu/news/2020/04/14/mathematician-john-horton-conway-magical-genius-known-inventing-game-life-dies-age`