Pavel Pokorný

Jak dostříknout co nejdále

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 1, 50–51

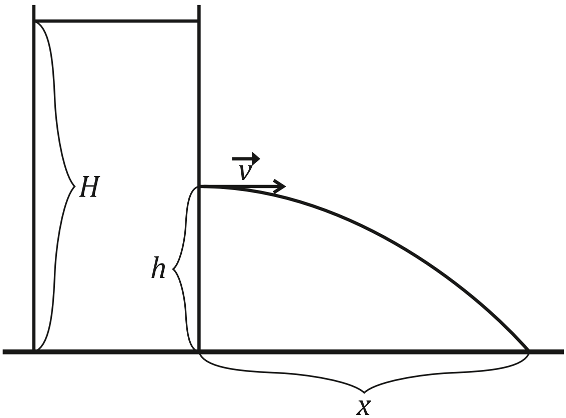
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148130`

Jak dostříknout co nejdále

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Ukážeme, jak hledáním extrému funkce jedné reálné proměnné lze vyřešit praktickou fyzikální úlohu.

Uvažujme vodorovnou podlahu a na ní nádrž, která je do výšky H naplněna vodou. Nádrž má svislou stěnu, ve které vytvoříme malou dírku ve výšce h. Touto dírkou vytéká voda vodorovně ven z nádrže, viz obrázek. Jak vysoko má být tato dírka, aby voda dostříkla na podlahu co nejdále, předpokládáme-li, že hladina je stále stejně vysoko?



Sloupec vody o výšce $H - h$ nad otvorem způsobí tlak, díky kterému proudí voda otvorem vodorovně ven rychlostí v. Voda dostříkne do vzdálenosti

$$x = vt,$$

kde v je rychlost vody ve vodorovném směru a t je čas, za který voda po opuštění nádrže dopadne na podlahu. Na základě Bernoulliovy rovnice můžeme psát

$$(H - h)\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2,$$

kde ρ je hustota vody, tedy

$$v^2 = 2g(H - h).$$

Neuvažujeme, že by se voda pohybovala v nádobě před otvorem, což lze, pokud je otvor malý.

Element vody koná pohyb, který si můžeme představit jako složený ze dvou pohybů: rovnoměrný pohyb ve vodorovném směru rychlostí v a rovnoměrně zrychlený pohyb ve svislém směru se zrychlením g. Ve svislém směru element vody urazí vzdálenost h za čas t, pro který platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

tedy

$$t^2 = \frac{2h}{g}.$$

Odpor vzduchu zanedbáváme.

My hledáme maximum vzdálenosti x. Abychom se vyhnuli odmocnině, budeme hledat maximum čtverce (druhé mocniny) této vzdálenosti (to je ekvivalentní, protože $x > 0$), tedy hledáme maximum výrazu

$$x^2 = v^2t^2 = 2g(H - h)\frac{2h}{g} = 4h(H - h).$$

Maximum funkce lze hledat pomocí derivace, ale v tomto jednoduchém případě nemusíme ani derivaci použít. Výraz $4h(H - h)$ definuje kvadratickou funkci proměnné h

$$f(h) = 4h(H - h) = -4h^2 + 4Hh,$$

která nabývá nulových hodnot pro $h = 0$ a pro $h = H$. Grafem příslušné funkce je parabola otevřená dolů se svislou osou souměrnosti, proto maximum nastane v polovině mezi $h = 0$ a $h = H$, tedy pro

$$h = \frac{H}{2}.$$

Pak

$$x = H.$$

Závěr: Bude-li otvor ve stěně ve výšce rovné polovině výšky H sloupce kapaliny, dostříkne voda nejdále, a to do vzdálenosti $x = H$.

Poděkování

Za inspiraci k této úvaze jsem vděčný svému příteli Tomáši Mouchovi.