Rozhledy matematicko-fyzikální

Vojtěch Kloud

Geometrické řešení problému brachistochrony

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 95 (2020), No. 1, 20–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148124

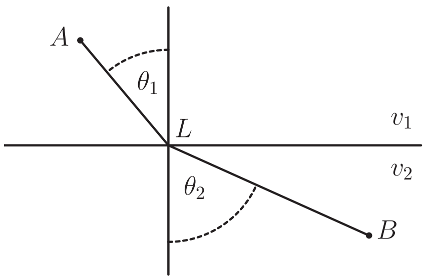
# Geometrické řešení problému brachistochrony

*Vojtěch Kloud, První soukromé jazykové gymnázium v Hradci Králové*

**Abstrakt.** Tento článek je věnován čistě geometrickému nalezení křivky brachistochrony. Brachistochrona je křivka, po které se hmotný bod dostane z počátečního bodu do bodu konečného v nejkratším čase za působení pouze homogenního gravitačního pole. Ukážeme, že řešením tohoto problému je cykloida; křivka vykreslená pevně daným bodem na obvodu kružnice, která se valí po přímce. Za pomoci Fermatova principu a Ptolemaiovy nerovnosti ukážeme platnost Snellova zákona, kterého poté využijeme k řešení problému brachistochrony.

## 1. Snellův zákon a Ptolemaiova nerovnost

Klíčem k ryze geometrickému řešení problému brachistochrony je Snellův zákon (Willebrord Snellius, 1591–1626). Ten popisuje, jak se láme světlo při přechodu z jednoho prostředí do druhého, například ze vzduchu do vody.




Obr. 1: Snellův zákon

Označíme-li rychlost světla v horním prostředí jako $v_1$ a rychlost světla v prostředí dolním jako $v_2$, pak Snellův zákon říká, že platí:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}. \tag{1}$$

Platnost zákona lze odvodit z přesného pozorování a měření, jehož výsledky by vždy splňovaly právě podmínku (1). Zákon jako takový nemůžeme dokázat, můžeme ho pouze potvrdit tím, že ukážeme, jak je možné ho odvodit z jiného, řekněme jednoduššího, zákona. Snellův zákon lze odvodit z Huygensova principu nebo Maxwellových rovnic. V tomto článku se ale zaměříme na odvození zákona pomocí Fermatova principu (Pierre de Fermat, 1607–1665), který tvrdí, že světlo se šíří mezi dvěma body tak, aby doba šíření byla co nejkratší [5].

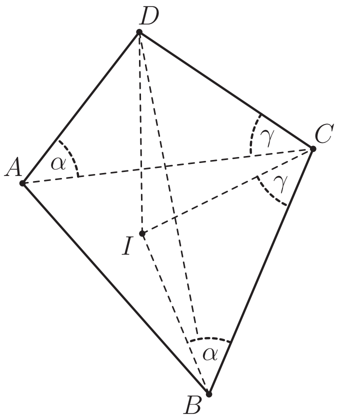
Ukážeme tedy, že pokud platí Fermatův princip, pak nutně platí i Snellův zákon. K důkazu využijeme následující větu z geometrie:

**Věta 1** (Ptolemaiova nerovnost)**.** *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Pak*

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|, \tag{2}$$

*kde rovnost nastává, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový (vepsaný kružnici) [2].*

*Důkaz.* Nejprve určeme bod $I$ takový, že $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBI|$ a zároveň $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle ICB|$.




Obr. 2: Ptolemaiova (ne)rovnost

Dostáváme tak dva podobné trojúhelníky $\triangle ACD \sim \triangle BCI$, které splňují

$$\frac{|CD|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|BI|}.$$

Odsud dostáváme

$$|DA| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BI|. \tag{3}$$

Protože $|\sphericalangle DCI| = |\sphericalangle ACB|$ a

$$\frac{|BC|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|CD|},$$

pak jsou si podobné i trojúhelníky $\triangle ICD \sim \triangle BCA$, což znamená, že

$$\frac{|BC|}{|CI|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|DI|},$$

odkud dostáváme

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |DI|. \tag{4}$$

Sečtením (3) a (4) dostáváme

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| = |AC|(|BI| + |DI|),$$

což po použití trojúhelníkové nerovnosti $|BI|+|DI| \geq |BD|$ dá hledanou nerovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Pro tětivový čtyřúhelník pak podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí, že: $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD|$. Tedy bod $I$ leží na úsečce $BD$ a $|BI| + |DI| = |BD|$. Pro takový čtyřúhelník dostáváme Ptolemaiovu rovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |DA| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|. \tag{5}$$

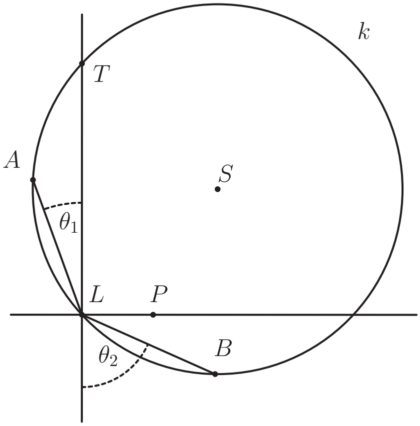
Důkaz implikace druhým směrem ponechávám jako případné cvičení čtenáři. Fakt, že pro čtyřúhelník $ABCD$ rovnost (5) implikuje tětivový čtyřúhelník dále v článku nevyužijeme. □

Následující důkaz Snellova zákona na základě Fermatova principu a Ptolemaiovy nerovnosti je převzat z knihy [6]. Ze vzorce $t = \frac{s}{v}$ určíme podle obr. 1 čas, za který se paprsek světla dostane z bodu $A$ do bodu $B$:

$$\frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2}. \tag{6}$$

Paprsek procházející na rozhraní prostředí bodem $L$ splňuje Snellův zákon (1). Ukážeme, že pro všechny ostatní body $P$ na rozhraní platí:

$$\frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2} < \frac{|AP|}{v_1} + \frac{|PB|}{v_2}.$$




Obr. 3: Odvození Snellova zákona z Fermatova principu

Sestrojme kružnici $k$ se středem v $S$, která prochází body $A$, $L$, $B$ (zdůrazněme, že tyto body nejsou kolineární). Tato kružnice protíná normálu k rozhraní v bodě $T$.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu je $|\sphericalangle TSA| = 2\theta_1$. Pokud tedy označíme poloměr kružnice $k$ jako $r$, pak $|TA| = 2r \sin\theta_1$. Dále je $|\sphericalangle BLT| = 180^\circ - \theta_2$, odkud vyplývá, že $|\sphericalangle TSB| = 2\theta_2$. Obdobně pak $|BT| = 2r \sin\theta_2$. Podle našeho předpokladu pak dostáváme

$$\frac{|TA|}{|BT|} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Pro nějaké $\lambda > 0$ pak máme

$$\begin{aligned} |TA| &= \lambda \cdot v_1, \\ |BT| &= \lambda \cdot v_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Pro čtyřúhelníky $ALBT$ a $APBT$ na obr. 3 máme podle podle Ptolemaiových vztahů (5) a (2):

$$\begin{aligned} |TA| \cdot |LB| + |AL| \cdot |BT| &= |AB| \cdot |TL|, \\ |TA| \cdot |PB| + |AP| \cdot |BT| &\geq |AB| \cdot |PT|. \end{aligned}$$

z kterých lze získat za použití nerovnosti $|TL| < |PT|$ následující nerovnost:

$$|TA| \cdot |PB| + |AP| \cdot |BT| > |TA| \cdot |LB| + |AL| \cdot |BT|.$$

Provedeme-li substituci z (7) a vydělíme obě strany výrazem $\lambda v_1 v_2$, pak dostaneme právě hledanou nerovnost

$$\frac{|AP|}{v_1} + \frac{|PB|}{v_2} > \frac{|AL|}{v_1} + \frac{|LB|}{v_2}.$$

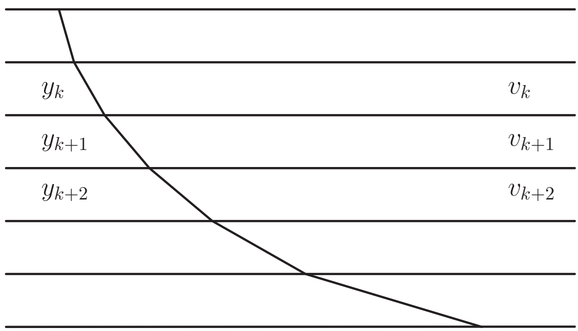
Je-li tedy $P$ různé od bodu $L$, pak čas není minimalizován. Podle Fermatova principu se tedy světlo šíří z bodu $A$ do bodu $B$ přes $L$, kde je splněn Snellův zákon (1).

## 2. Problém brachistochrony

Brachistochrona je křivka, po které se hmotný bod dostane z počátečního bodu do bodu konečného v nejkratším čase za působení pouze homogenního gravitačního pole.

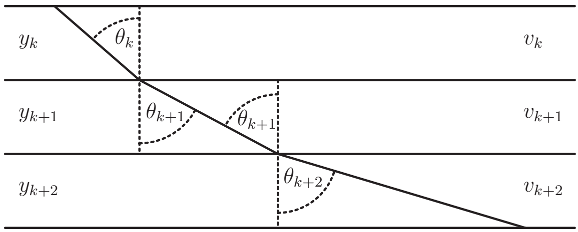
V této sekci uvedeme řešení Johanna Bernoulliho (1667–1748), které vychází právě z Fermatova principu, resp. ze Snellova zákona. Bernoulliho hlavní myšlenkou bylo udělat z tohoto spojitého problému se spojitým pádem problém diskrétní. Dále uvažoval, jakou cestu by si vybralo světlo [3].

Rovinu rozdělme na tenké vrstvy, ve kterých uvažujeme konstantní rychlost, která závisí na výšce. Při přechodu zpět na spojitý případ si tuto závislost vyjádříme tak, aby reprezentovala pád hmotného bodu rovinou.




Obr. 4: Diskrétní přístup

Světlo si vybere cestu nejkratšího času, tedy ve všech přechodech platí Snellův zákon.

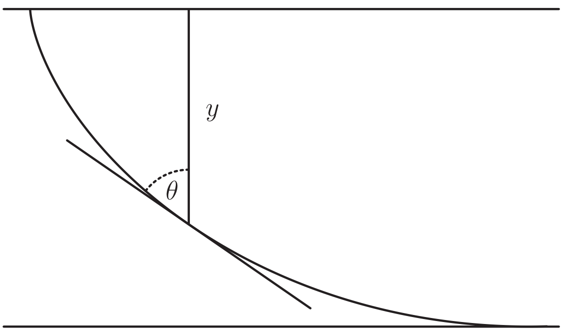



Obr. 5: Snellův zákon v brachistochroně

$$\frac{\sin\theta_k}{v_k} = \frac{\sin\theta_{k+1}}{v_{k+1}} = \frac{\sin\theta_{k+2}}{v_{k+2}} = \cdots = \ell \text{ pro všechna } k.$$

Při přechodu zpět na spojitý problém máme tedy podle značení na obr. 6 $\sin\theta/v = \ell$. Protože počáteční rychlost hmotného bodu je nulová, máme $v = \sqrt{2gy}$, což vyplývá z platnosti $y = \frac{1}{2}gt^2$a $v = gt$ při volném pádu. Označením $C_1 = \ell\sqrt{2g}$ dostáváme nutnou podmínku pro křivku nejrychlejšího spádu:

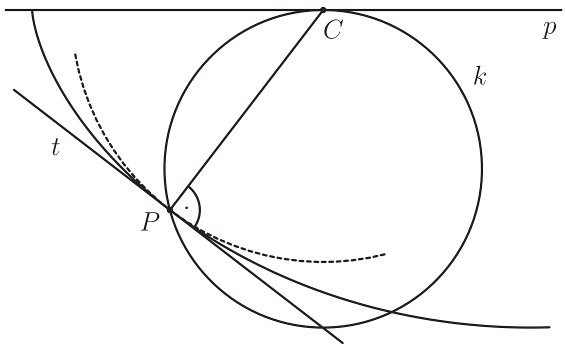
$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}} = C_1. \tag{8}$$




Obr. 6: Nutná podmínka brachistochrony

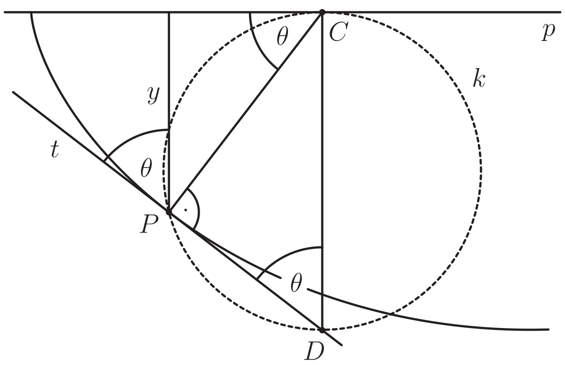
Nyní máme daný jasný vztah mezi pozicí a sklonem tečny ke každému bodu hledané křivky. Stejně jako původně Bernoulli můžeme tuto křivku najít vyřešením odpovídající diferenciální rovnice. Do této doby jsme se ovšem obešli bez diferenciálního počtu. V tomto duchu chceme pokračovat. Za pomoci geometrie ukážeme, že podmínku brachistochrony splňuje právě cykloida; křivka vykreslená pevně daným bodem na obvodu kružnice, která se valí po přímce [4].

Dotýká-li se kružnice $k$, tvořící cykloidu, přímky $p$ v nějakém bodě $C$, pak se v tomto okamžiku chová $C$ jako střed otáčení bodu $P$ na cykloidě. Proto je tečna $t$ k cykloidě v bodě $P$ kolmá na $CP$.




Obr. 7: Tečna k cykloidě

Jako na obr. 6 označme vzdálenost bodu $P$ od přímky $p$ jako $y$ a úhel svíraný tečnou $t$ a normálou k $p$ jako $\theta$.




Obr. 8: Geometrie cykloidy

Kružnice $k$ má průměr $d = CD$. Pak $CP = d \sin\theta$, a tedy

$$y = d \sin^2 \theta.$$

Odsud dostáváme, že cykloida splňuje právě podmínku brachistochrony (8):

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{d}} = C_2.$$

Konstanta $C_2$ je závislá na poloměru $r$, který se při válení kružnice samozřejmě nemění. Poloměr $r$ můžeme ovšem zvolit tak, aby $C_1 = C_2$ (viz čtvrtá odrážka v sekci 3).

Diskretizace je častý a efektivní přístup k řešení fyzikálních problémů, avšak se nejedná o zcela rigorózní přístup, spíše praktický. I přesto dává přesné řešení problému brachistochrony, které lze najít ještě například pomocí variačního počtu [1, 3].

## 3. Analýza brachistochrony

Několik argumentů v tomto článku bychom mohli rychleji dokázat nebo alespoň potvrdit právě metodami matematické analýzy. Pro čtenáře, kteří jsou s ní již seznámeni, ponechávám následující otázky:

- Pro důkaz Snellova zákona na základě Fermatova principu jsme využili Ptolemaiovy nerovnosti. Dokažte Snellův zákon za pomoci derivace odpovídající funkce.

- Dokažte, že vždy existuje právě jedno $L$ na rozhraní, které splňuje Snellův zákon. *Nápověda.* Využijte věty o nabývání mezihodnot, spojitosti a monotónnosti odpovídající funkce.

- Najděte parametrické vyjádření cykloidy. *Odpověď.* Pro souřadnice, kde osa $y$ směřuje dolů s počátečním bodem v $A[0, 0]$ mají rovnice cykloidy tvar:

$$x(t) = r(t - \sin t),$$
$$y(t) = r(1 - \cos t),$$

  kde $r$ je poloměr kružnice tvořící cykloidu a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je parametr. Máme- li daný konečný bod $[x_1, y_1]$, pak můžeme numericky určit z rovnic $r$ a interval parametru $t$.

- Z nutné podmínky pro brachistochronu (8) sestavte odpovídající diferenciální rovnici. Ukažte, že jejím řešením je právě cykloida splňující $C_1 = C_2$ v sekci 2.

- Důležitým poznatkem v případě obr. 7 bylo, že $t \perp CP$. Za pomoci parametrických rovnic cykloidy dokažte, že vskutku je tečna $t$ v bodě $P$ normálou k $CP$ pro všechny $P$ na cykloidě.

- Uvedený důkaz Ptolemaiovy nerovnosti je jeden z mnoha. Nerovnost dokažte za pomoci komplexních čísel, respektive za pomoci trojúhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla:

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{C}\colon (|w_1| + |w_2| \geq |w_1 + w_2|).$$

Literatura


[1] Chamrová, M.: *Brachistochrona v teorii a pokusech.* Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Praha, 2018.

[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: *Geometry revisited.* 5th ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[3] Kielhöfer, H.: *Calculus of variations.* Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 2018.

[4] Levi, M.: Quick! Find a Solution to the Brachistochrone Problem. *SIAM News*, roč. 48 (2015), č. 6, https://sinews.siam.org/Details-Page/quick-find-a-solution-to-the-brachistochrone-problem.

[5] Malý, P.: *Optika.* Karolinum, Praha, 2008.

[6] Niven, I. M.: *Maxima and minima without calculus.* 3rd ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1981.


* * * * *

Immanuel Kant (1724–1804), německý filozof:

*Tvrdím však, že v každé jednotlivé nauce o přírodě lze najít jen tolik skutečné vědy, kolik je v ní matematiky.*

(Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, A VIII)

Zdroj: https://citaty.net/temata/matematika/?page=2