Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 4, 8–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148012

[4] Karmarkar, N.: A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, roč. 4 (1984), č. 4, s. 373–395.

[5] Khachiyan, L. G.: Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, roč. 20 (1980), č. 1, s. 53–72.

[6] Land, A. H., Doig, A. G.: An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, roč. 28 (1960), č. 3, s. 497–520.

[7] Spielman, D. A., Teng, S.-H.: Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time. *J. ACM*, roč. 51 (2004), č. 3, s. 385–463.

Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstrakt. This article presents the following simple property of a general triangle ABC: Let D be an arbitrary point and A_0, B_0, C_0 the feet of the perpendiculars from D on the (possibly extended) sides BC, CA, AB, respectively. Then

$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2.$$

This statement is a proper generalization of the Pythagorean theorem. Surprisingly, it does not appear in textbooks or other publications.

Dobří učitelé vědí, že každá hodina matematiky by měla být zajímavým a přitažlivým příběhem. To platí pro výuku všeobecně, ale pro výuku na školách především. Pro matematiku je to o to důležitější, že takový přístup pomyslné matematické záhady polidšťuje a tím jakékoliv obavy, či dokonce strach z tohoto předmětu zmírňuje. Ano, každá zajímavá matematická historka sdělená s pohlazením, úsměvem a nadšením zahání strašáka symbolů a zbytečného biflování.

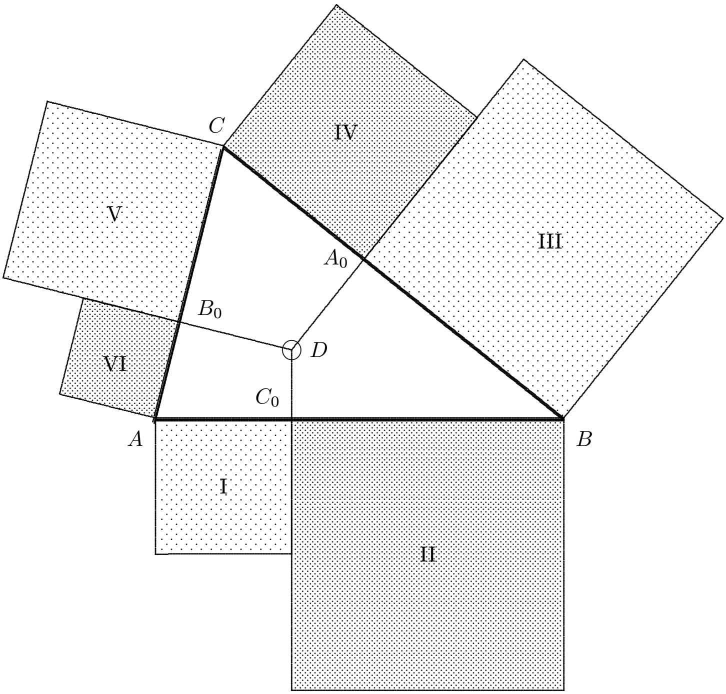
Dnešním úkolem je odhalit tajemství tohoto tvrzení:

V rovině uvažujeme trojúhelník ABC a libovolný bod D. Nechť A_0 je pata kolmice z bodu D na přímku určenou vrcholy B a C, B_0 pata kolmice z bodu D na přímku určenou vrcholy C a A a C_0 pata kolmice z bodu D na přímku určenou vrcholy A a B. Potom

$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2. \qquad (*)$$

Případ, kdy bod D leží uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC, je znázorněn na obr. 1. Takový obrázek si snadno zapamatujeme, čtverce nad příslušnými úsečkami jsou jednoduše označeny římskými číslicemi I, II, III, IV, V a VI.

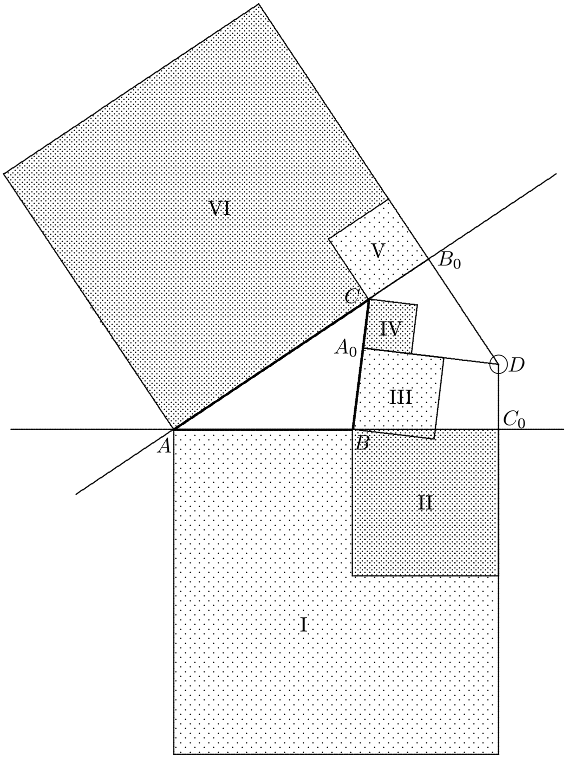
Obecnější volbu trojúhelníku ABC a bodu D vidíme na obr. 2. Výsledné čtverce se zde mohou celkem libovolně překrývat. Důležitou je zcela speciální volba bodu D, kdy tento bod splývá s jedním z vrcholů trojúhelníku. Tu uvidíme níže na obr. 3, který zobrazuje situaci, kdy $D = A$.



Obsah (I + III + V) = Obsah (II + IV + VI)

Obr. 1

Pythagoras ze Samu žil kolem roku 500 př. n. l. Keramické tabulky YBC 7289 v babylonské sbírce university Yale a Plimpton 322 ve sbírce university Columbia ukazují, že tvrzení Pythagorovy věty byla známa v Babylonii už v letech 1800–1600 př. n. l. Někteří historikové se domnívají, že Pythagoras mohl znát důkaz tohoto tvrzení alespoň pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník (takový důkaz byl znám Baudhayanovi v Indii kolem roku 600 př. n. l.).



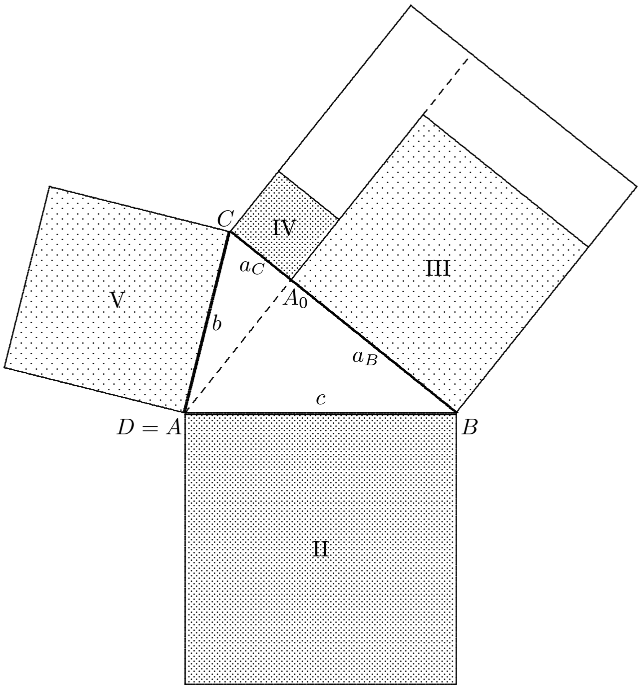
Obsah (I + III + V) = Obsah (II + IV + VI)

Obr. 2

Důkaz Pythagorovy věty je obsažen v Základech Euklida z Alexandrie (žil kolem roku 300 př. n. l.). Základy obsahují dva důkazy tohoto tvrzení, ale ani jednou není v Základech žádné jméno osobnosti s tímto tvrzením spojeno, tj. ani jméno Pythagorovo. Bartel van der Waerden (1903–1996) cituje ve své knize Science Awakening [5] historika Ottu Neugebauera (1899–1990) takto: *Měli bychom korektně nazývat „babylonskými" řadu věcí, které nám řecká tradice předložila jako „pythagorské".*

Poznamenejme, že Johannes Kepler (1571–1630) považoval Pythagorovu větu za jeden z dvou skvostů geometrie; druhým skvostem byl pro něj zlatý řez.

Jak jsme už poznamenali dříve, důležitou je zcela speciální volba bodu D, kdy tento bod splývá s jedním z vrcholů trojúhelníku. Obr. 3 zobrazuje situaci, kdy $D = A$. To je případ, který se v učebnicích všeobecně popisuje užitím goniometrické funkce kosinus ve tvaru tzv. *věty kosinové.*[1)]



Obsah (II + IV)=Obsah (III + V)

Obr. 3

Přepis obr. 3 je snadný, stačí užít definice kosinu: $a_C = b \cos |\sphericalangle ACB|$:

[1)]Poznamenejme, že ve francouzských učebnicích je tato věta nazývána větou Al-Kashiho (1380–1429).

Rovnost $c^2 + a_C^2 = a_B^2 + b^2$ přepíšeme do tvaru

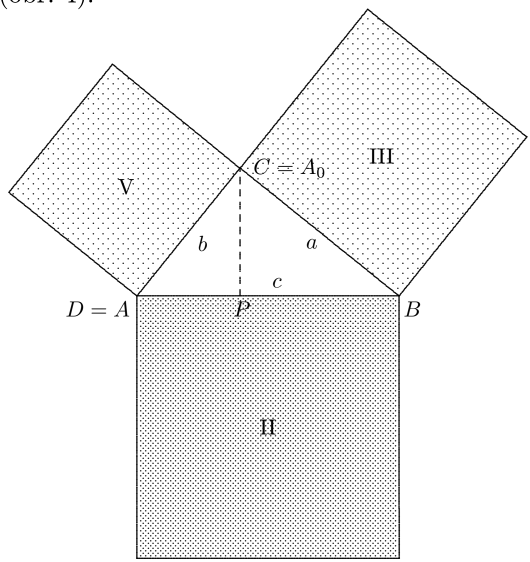
$$\begin{aligned} c^2 &= a_B^2 + a_C^2 + b^2 - 2a_C^2 = \\ &= (a_B + a_C)^2 + b^2 - 2a_C(a_B + a_C) = a^2 + b^2 - 2aa_C = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos|\sphericalangle ACB|. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že je velmi užitečné (a důležité) si uvědomit, že kosinovou větu lze též jednoduše vyjádřit jako vlastnost rovnoběžníků: *Strany a, b a úhlopříčky u, v každého rovnoběžníku splňují*

$$u^2 + v^2 = 2\,(a^2 + b^2). \tag{$**$}$$

Důkaz je snadný. Označíme-li úhly rovnoběžníku řeckými písmeny α a $\beta = \pi - \alpha$, užitím kosinové věty máme $u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ a $v^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. Sečtením těchto rovností dostáváme ihned $(**)$.

V případě, že trojúhelník je pravoúhlý (s pravým úhlem při vrcholu C), dostáváme jednoduché tvrzení $c^2 = a^2 + b^2$, všeobecně nazývané *Pythagorovou větou* (obr. 4).



$c^2 = \text{Obsah (II)} = \text{Obsah (III + V)} = a^2 + b^2$

Obr. 4

Velmi těžce bychom hledali někoho, kdo se ve škole nesetkal a nepamatuje se na Pythagorovu větu. Vyjádřeme ji nyní v přesnější formulaci:

Trojúhelník ABC o stranách $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ má při vrcholu C pravý úhel právě tehdy, když $a^2 + b^2 = c^2$.

Tato formulace tedy obsahuje dvě tvrzení. Jedno matematicky zcela zřejmé, ale pro aplikace důležité: Jestliže délky stran trojúhelníka splňují rovnost $a^2 + b^2 = c^2$, je trojúhelník pravoúhlý. Matematicky je to pouhé vyjádření faktu, že délky stran určují jednoznačně trojúhelník.

Podstatné je druhé tvrzení: V pravoúhlém trojúhelníku platí mezi stranami vztah $a^2 + b^2 = c^2$. Dnes existuje několik set důkazů tohoto tvrzení, některé naprosto jednoduché, jiné náročnější. Náš důkaz je pouhým vyjádřením zřejmého faktu, že trojúhelníky ABC, CBP a ACP na obr. 4 (kde P je patou výšky z vrcholu C) jsou podobné (mají stejné úhly). Tedy

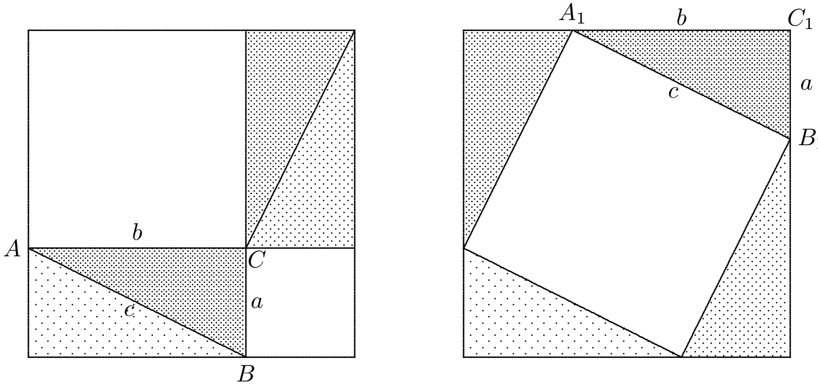
$$\frac{a}{c} = \frac{|PB|}{a}, \quad \frac{b}{c} = \frac{|AP|}{b},$$

odkud

$$a^2 + b^2 = c\,(|AP| + |PB|) = c^2.$$

Velmi známý je též čínský důkaz, který je někdy přisuzován Pythagorovi. Důkaz je očividný z obr. 5. Vhodně využívá rovnosti

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\,\frac{ab}{2}.$$



$c^2 = a^2 + b^2$

Obr. 5

Nyní už pouze zbývá dokázat naše výchozí tvrzení. S poukazem na obr. 1 využijme Pythagorovu větu, kterou jsme právě dokázali, k vyjádření čtverců $|AD|^2$, $|BD|^2$ a $|CD|^2$:

$$|AC_0|^2 + |C_0D|^2 = |AB_0|^2 + |B_0D|^2,$$

$$|BA_0|^2 + |A_0D|^2 = |BC_0|^2 + |C_0D|^2,$$

$$|CB_0|^2 + |B_0D|^2 = |CA_0|^2 + |A_0D|^2.$$

Sečtením a porovnáním těchto rovností dostáváme požadovanou rovnost $(*)$.

Příběh Pythagorovy věty zakončeme obecnou poznámkou. Naše úvahy a výpočty nevyžadovaly, aby body A, B, C, D ležely v rovině. Úvodní tvrzení se týká prostorového čtyřstěnu $ABCD$:

V prostoru jsou dány čtyři zcela libovolné (ne nutně různé) body A, B, C, D. Nechť A_0 je pata kolmice z bodu D na přímku určenou body B a C ($A_0 = B$ když $B = C$) a podobně B_0 a C_0 jsou paty kolmic z bodu D na přímky určené body C, A a A, B. Potom

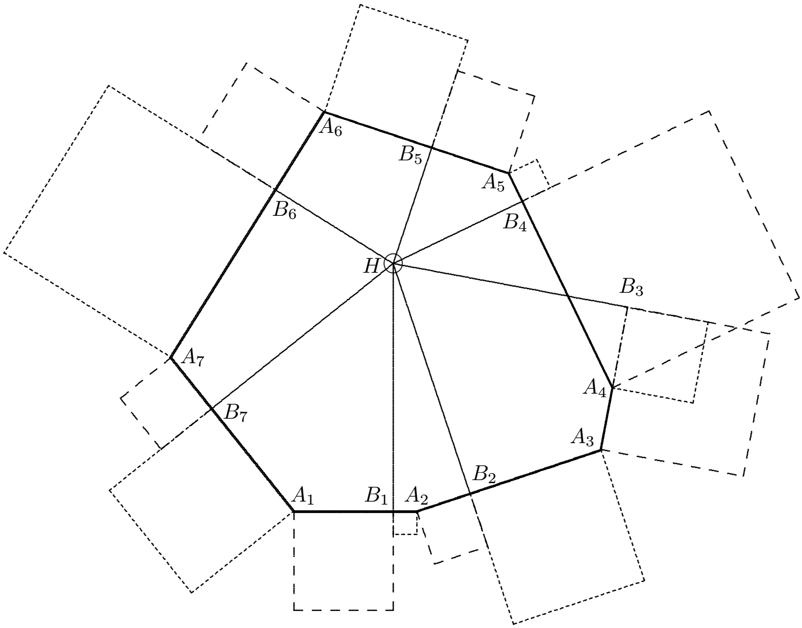
$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2.$$

Dodatek. Pythagorově větě je věnováno velké množství publikací všeho druhu, od statí a knih tento předmět popularizujících po práce ryze vědecké. Mnohé nalezneme na internetu. Většina z nich jsou pouhé přepisy a úpravy předchozích prezentací [3]. Z nedávných seriózních publikací připomeňme zevrubnou studii E. Maora [4]. Je pozoruhodné, že v žádné z těchto publikací nenalezneme jednoduché kořeny Pythagorovy věty vysvětlené v této krátké stati. Právě naopak, tyto přirozené formulace pro obecný trojúhelník jsou často zakryty formulacemi používajícími goniometrické funkce. Výjimkou je nedávný článek [1] v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a článek [2] v časopise The College Mathematics Journal.

A nakonec se přesvědčte, že jste tvrzení $(*)$ znázorněnému na obr. 1 porozuměli. Dokažte zobecnění tohoto tvrzení pro libovolný n-úhelník: *V prostoru uvažujeme libovolný n-úhelník $A_1A_2 \cdots A_n$ a libovolný bod H. Nechť B_t je pata kolmice z bodu H na přímku určenou vrcholy A_t a A_{t+1} pro $1 \le t \le n-1$ a B_n pata kolmice z bodu H na přímku určenou vrcholy A_n a A_1. Potom*

$$\sum_{t=1}^{n} |A_tB_t|^2 = \sum_{t=1}^{n} |B_tA_{t+1}|^2, \quad \text{kde } A_{n+1} = A_1.$$

Pomůže vám ilustrace tohoto 7-úhelníku?



L i t e r a t u r a

[1] Bečvář, J., Dlab, V.: Bohatství pýthagorejských tvrzení včetně Pythagorovy věty pro čtyři i více bodů v prostoru. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 62 (2017), č. 4, s. 283–294.

[2] Dlab, V., Williams, K. S.: The many sides of the Pythagorean theorem. *The College Mathematics Journal*, roč. 50 (2019), č. 3, s. 162–172.

[3] Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii.* ALBRA, Praha, 1996.

[4] Maor, E.: *The Pythagorean Theorem.* Princeton University Press, Princeton, 2007.

[5] van der Waerden, B.: *Science awakening.* Oxford University Press, New York, 1961.