Zdeněk Drozd; Marie Snětinová; Kateřina Žilavá

Vážení zeměkoule II

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 2, 24–31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148004`

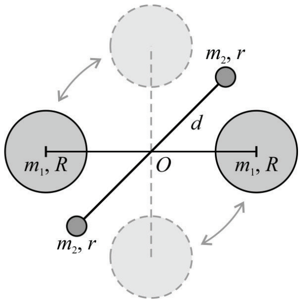
Vážení zeměkoule II

Zdeněk Drozd, Marie Snětinová, Kateřina Žilavá, MFF UK, Praha

V první části tohoto článku (v minulém čísle) jsme vás seznámili s gravitačními vahami, které jsou umístěny v posluchárně T2 na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze-Troji. Věnovali jsme se také historii Cavendishových torzních vah, které byly pro tuto aparaturu předlohou. Nyní ukážeme, co a jak lze těmito vahami změřit.

Parametry Cavendishových vah

Vraťme se k obrázkům z předchozího dílu článku (obr. 1) a popišme si naše váhy podrobněji.



Obr. 1: Cavendishovy váhy

Jejich parametry jsou následující:

závěs: molybdenové vlákno o délce $l = 0{,}4$ m a průměru $\phi = 30\,\mu$m;

velké koule (olověné): hmotnost každé koule $m_1 = 18{,}80$ kg, poloměr $R = 0{,}075\,0$ m;

torzní kyvadlo: kuličky o hmotnostech $m_2 = 0{,}006\,5$ kg a poloměru $r = 0{,}009$ m spojovací tyčka o hmotnosti $m_\mathrm{t} = 0{,}006\,5$ kg, přičemž vzdálenost středů kuliček od sebe je $a = 0{,}276$ m;

vzdálenost středů koulí (velká–malá): $b = 0{,}096\,5$ m;

vzdálenost středu zrcátka umístěného na závěsu torzního kyvadélka od značky „0“ na protější stěně posluchárny: $L = 9{,}12$ m;

odchylka laserového paprsku odraženého od zrcátka na závěsu kyvadélka měřená od kolmice ke stupnici v bodě „0“: $\alpha = 36°$.

Většina hodnot je převzata z [1], kde jsou uvedeny i chyby měření. Vzhledem k tomu, že posluchárna T2 prošla v minulých letech rekonstrukcí, bylo nutné váhy demontovat a opětovně do posluchárny instalovat. Přitom se samozřejmě změnily některé parametry vůči těm, které jsou uvedeny v [1]. Nové parametry vah, které již nebylo možné z práce [1] převzít, změřila Kateřina Žilavá.

Určení direkčního momentu vlákna

V první části článku jsme si představili důležitou veličinu – direkční moment vlákna D. Známe-li direkční moment, víme, k jak velkému stočení vlákna dojde vlivem působení vnějšího momentu sil M. (V následujícím textu budeme uvažovat pouze velikosti daných fyzikálních veličin a nebudeme to nadále zdůrazňovat.)

Mezi výsledným vnějším momentem sil M a stočením (zkroucením) vlákna φ platí vztah

$$M = -D\varphi. \tag{1}$$

Tento vztah říká, že vlákno se brání zkroucení a má snahu vrátit se zpět do původního stavu. Vztah (1) platí pouze v případě elastické deformace vlákna. Při nepatrných stočeních, která přicházejí v úvahu u Cavendishových vah, bude deformace vlákna vždy elastická.

Nyní napíšeme rovnici, která popisuje pohyb torzního kyvadla, tedy naší „činky" na vlákně. Vyjdeme přitom z toho, co bezpochyby zná každý student, který na střední škole absolvoval výuku mechaniky – z druhého Newtonova zákona neboli zákona síly. Ten můžeme napsat ve tvaru

$$F = ma. \tag{2}$$

Teď jste možná zpozorněli a říkáte si, jestli se náhodou neodchylujeme od tématu. Druhý Newtonův zákon přece nepopisuje pohyb, který vykonává torzní kyvadlo. Kdyby šlo např. o vozík, bylo by to něco jiného, ale tyčka s kuličkami na drátku. . . ? Hloubka Newtonových pohybových zákonů je ale veliká. Druhý Newtonův zákon nás přece jenom k torznímu kyvadlu dovede. Použijeme analogii mezi posuvným a rotačním pohybem, kterou určitě znáte (i když si ji třeba právě teď nevybavujete). Začneme tím, že si připomeneme fyzikální význam veličin vystupujících v zákonu síly. F představuje výslednici sil, které zvenčí působí na nějaké těleso (třeba na vozík). Písmenem a jsme označili zrychlení, které vozík díky působící síle má. Dostali jsme se k „okřídlené" formulaci: „Když síla, tak zrychlení." V rovnici (2) vystupuje ještě jedna veličina, a to m.

Je to hmotnost urychlovaného tělesa. Hmotnost v našem kontextu vyjadřuje nechuť tělesa měnit rychlost.

Pokud se těleso nemůže pohybovat translačním (posuvným) pohybem, ale je schopno otáčet se okolo nějaké osy, což je zrovna případ našeho torzního kyvadla, bude situace následující: Působí-li na něj (výsledný) moment síly M, začne se roztáčet. Moment síly má, jak víte, otáčivý účinek. Je to analogie výslednice sil, která rozjíždí vozík. Díky momentu síly M získává torzní kyvadélko *úhlové zrychlení* ε. Torzní kyvadlo má také nechuť roztáčet se. Tuto nechuť popisuje moment setrvačnosti J. Zapamatujte si tuto názornou „definici“ momentu setrvačnosti. Pomůže vám lépe pochopit některé fyzikální děje. Takže ještě jednou: „Moment setrvačnosti vyjadřuje nechuť tělesa roztáčet se“ (nebo přesněji: měnit úhlovou rychlost). Nyní tedy můžeme napsat novou rovnici pro torzní kyvadélko, kterou jsme právě vyvodili pomocí analogií mezi posuvným a rotačním pohybem:

$$M = J\varepsilon. \tag{3}$$

Za moment síly dosaďme z rovnice (1). Získáme vztah:

$$-D\varphi = J\varepsilon. \tag{4}$$

Nyní si dovolíme použít „trošku“ diferenciálního počtu. Pokud si s ním příliš (nebo vůbec) nerozumíte, přeskočte v četbě k rovnici (10).

Úhlové zrychlení můžeme zapsat jako druhou derivaci úhlu φ podle času (úhel φ je, jak jistě tušíte, funkcí času). Rovnici (4) tedy můžeme napsat také takto:

$$-D\varphi = J\ddot{\varphi}. \tag{5}$$

Pro zápis derivace podle času jsme použili tečku nad znakem φ. Dvě tečky tedy znamenají druhou derivaci podle času (takový zápis časové derivace je ve fyzice poměrně běžný). Rovnici ještě malinko upravíme:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J}\varphi. \tag{6}$$

Této rovnici budeme říkat *pohybová rovnice torzního kyvadla*. Co je jejím řešením? Je to nějaká funkce času, označená φ, kterou když dvakrát zderivujeme podle času, získáme tutéž funkci, ale násobenou nějakou konstantou se znaménkem mínus. Vymyslíte nějakou takovou funkci? Napadne vás jich možná hned několik. Zkusme třeba:

$$\varphi = \cos\omega t. \tag{7}$$

Po dvojím derivování podle času dostaneme

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cos \omega t, \tag{8}$$

neboli

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi. \tag{9}$$

Porovnáním rovnic (6) a (9) zjistíme, že

$$\omega^2 = \frac{D}{J}. \tag{10}$$

Postup, který jsme právě provedli, byl vlastně řešením diferenciální rovnice. Byl to trochu zvláštní způsob řešení – uhádli jsme ho.

Ve veličině ω jste asi poznali tzv. *úhlovou frekvenci*, pro kterou platí $\omega = 2\pi f$, neboli

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{11}$$

kde T je perioda, se kterou kmitá naše torzní kyvadélko. Pokud tuto periodu změříme, získáme vztah pro direkční moment vlákna D:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} J. \tag{12}$$

K určení direkčního momentu tedy potřebujeme znát periodu kmitů torzního kyvadélka a jeho moment setrvačnosti J.

Právě jsme se dostali na první rozcestí na cestě k cíli – ke změření gravitační konstanty G, a tedy také ke zvážení zeměkoule. Na tomto rozcestí se musíme rozhodnout, chceme-li počítat co nejpřesněji, nebo si dovolíme nějaká malá zanedbání, což bude znamenat zjednodušení výpočtu. Zvolíme cestu zjednodušení. Chcete-li počítat přesněji a text je vám srozumitelný, jistě to zvládnete sami.

První přiblížení zde bude znamenat to, že poněkud zjednodušíme výpočet momentu setrvačnosti kyvadélka. Nebudeme uvažovat hmotnost spojovací tyčky. Započítáme tedy jenom moment setrvačnosti kuliček o hmotnosti m_2. Výsledkem bude:

$$J = 2m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2, \tag{13}$$

kde $a/2$ je vzdálenost středu kuličky od osy otáčení kyvadélka.

Výsledný vztah pro direkční moment tedy je:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} 2m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 m_2 a^2. \tag{14}$$

Změřit periodu T lze poměrně snadno. Perioda je totiž dosti dlouhá (okolo 230 s). Neměříme ji ale tak, že bychom sledovali přímo torzní kyvadélko. Jeho pohyb si prohlížíme na opačné straně posluchárny, kde se pohybuje stopa laserového paprsku odraženého od zrcátka na závěsu kyvadélka. Tento pohyb je, na rozdíl od přímého pozorování kyvadélka, dobře viditelný a změření periody je docela snadné. Výpočet direkčního momentu je potom již také snadný.

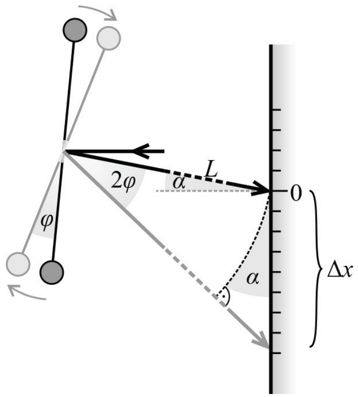
Měření gravitační síly

Nyní přejdeme k samotnému měření síly, kterou na sebe působí velká koule a kulička vahadélka. To spočívá ve dvou krocích.

Nejprve opatrně přetočíme držák s velkými koulemi tak, aby se dotkl zarážky, která vymezuje jeho krajní polohu. Na každou z kuliček působí gravitační síla (ve výsledku jde o dvojici sil), která nepatrně stočí torzní kyvadélko. Na protější zdi pozorujeme pohyb stopy laserového paprsku. Ta pomalu kmitá a naším úkolem je nalézt bod (rovnovážnou polohu), okolo kterého toto kmitání probíhá. Pečlivě sledujeme krajní body výchylky stopy paprsku a určujeme střed jejich spojnice. Když jsme hotovi, tento bod označíme a přesuneme držák s koulemi do druhé krajní polohy. Nyní na vahadélko působí dvojice gravitačních sil, které se jej snaží stočit na druhou stranu. Projeví se to tím, že stopa paprsku na zdi se kmitavým pohybem pomalu přesouvá a kmitá okolo nové rovnovážné polohy. Tu opět pečlivě určíme. Nakonec zjistíme, o jakou vzdálenost Δx se rovnovážná poloha posunula. V tomto údaji je skrytá informace o tom, jak se díky působícím momentům gravitačních sil zkroutilo molybdenové vlákno, na kterém je vahadélko zavěšeno a jehož direkční moment jsme předtím určili. Je to klíč k nalezení velikosti gravitačních sil mezi velkými koulemi a malými kuličkami.

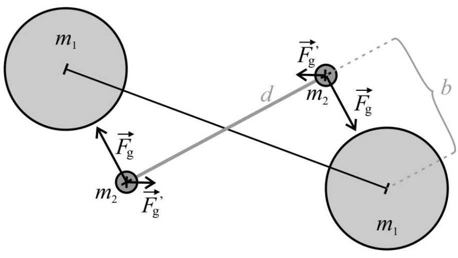
Situace je schematicky, ve značném nepoměru ke skutečným velikostem, znázorněna na obr. 2. Uvědomte si, že vzdálenost L je přibližně 9 m, zatímco posunutí Δx je asi jenom 4 cm. Tmavěji je v obrázku znázorněno vahadélko v situaci, kdy jsou velké koule v jedné krajní poloze, světleji v poloze druhé. Skutečné stočení vlákna je znázorněno úhlem φ. Odražený parsek se přitom stočil o úhel 2φ (o φ se zvětšil úhel dopadu paprsku na zrcátko, o stejný úhel se musel zvětšit i úhel odrazu). Oblouk, který opsal konec paprsku o délce L, můžeme v daném případě považovat za úsečku s délkou $L \cdot 2\varphi$. Tato „úsečka“ (ve skutečnosti část kružnice) svírá se stěnou úhel α. Pro vzdálenost Δx tedy platí následující vztah:

$$\Delta x = \frac{2L\varphi}{\cos\alpha}. \tag{15}$$



Obr. 2: Náčrt situace popisované v textu – stáčení vahadélka vlivem gravitačních sil

Podívejme se nyní na obr. 3, který znázorňuje gravitační síly působící na vahadélko (resp. na jeho kuličky) v jedné z krajních poloh. V tomto okamžiku stojíme na druhém rozcestí, na kterém si budeme muset vybrat, jestli chceme počítat s větší přesností, ale složitěji, nebo jestli provedeme opět nějaké zanedbání. Zvolíme druhou z naznačených možností. Budeme uvažovat pouze působení bližší velké koule na každou z kuliček. Pokud byste chtěli započítat i působení koulí vzdálenějších, můžete se o to pokusit samostatně. (Zpřesnění výsledku ale nebude příliš výrazné.)



Obr. 3: Síly působící na vahadélko v jedné z krajních poloh

Každá z velkých koulí působí na vahadélko momentem síly o velikosti $F_g \cdot d$. Písmenem d jsme označili polovinu vzdálenosti a, tedy vzdálenost středu malé kuličky od osy otáčení. Po přesunutí velkých koulí do druhé krajní polohy budou působit stejně velké momenty gravitačních sil, jejich otáčivý účinek bude ale opačný. Ve výsledku tedy stočení vlákna o úhel φ způsobil celkový moment (vnějších) sil

$$M = 4F_g d.$$

Vzhledem k tomu, že vzdálenost středu velké a malé koule v krajní poloze je b, platí pro každou z gravitačních sil F_g:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{b^2}. \tag{16}$$

Mezi velikostí momentu vnějších sil a stočením vlákna platí vztah $M = D\varphi$, což lze s využitím předchozího zapsat jako

$$4F_g d = D\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{4F_g d}{D}. \tag{17}$$

Po dosazení do rovnice (15) získáme pro Δx vztah:

$$\Delta x = \frac{2L}{\cos\alpha}\frac{4F_g d}{D}. \tag{18}$$

Nyní už jenom stačí dosadit za direkční moment ze vztahu (14), za gravitační sílu F_g ze vztahu (16) a po malé úpravě získáme výraz pro výpočet gravitační konstanty G (nezapomeňme, že jsme si dočasně označili $a/2$ jako d):

$$G = \frac{\pi^2 a b^2 \Delta x \cos\alpha}{2 l m_1 T^2}. \tag{19}$$

Měřením provedeným pro účely tohoto článku jsme zjistili, že:
$T = 230{,}2\ \mathrm{s}$,
$\Delta x = 5{,}4\ \mathrm{cm}$.

Po dosazení do vztahu (16) získáváme $G \doteq 6{,}09 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Tabulková hodnota je přitom $G \doteq 6{,}6 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Když uvážíte zjednodušení, která jsme vědomě při odvození vztahu (16) udělali, a vezmete v úvahu, do jak delikátního měření jsme se pustili, můžeme být s výsledkem spokojeni. Při měření s gravitačními vahami se většinou, je-li měření provedeno pečlivě a s dostatečnou dávkou trpělivosti, neodchýlíme od tabulkové hodnoty o více než 10 %. Při měření se musíme vypořádat s různými rušivými vlivy. Patří mezi ně např. chvění budovy, proto je lepší měřit večer, nebo v noci. Velmi nepříjemným rušivým faktorem je případný elektrický náboj na součástech měřicích zařízení. Tento vliv eliminujeme tím, že jsou všechny kovové součásti vah uzemněny a před měřením celé zařízení „postříkáme" antistatickým sprejem. Je také zapotřebí dostatečně dlouho čekat, než se vahadélko přesune z jedné polohy do druhé po přetočení držáku s velkými koulemi. Momenty sil jsou totiž velice malé a vahadélko se přesouvá tomuto faktu přiměřenou dobu. Chcete-li tedy získat dobrý výsledek, bude měření trvat třeba i více než dvě hodiny. Inu… experimentální fyzika je zajímavá tím, že na vás nastraží nejednu překážku, s níž se musíte vypořádat a mnohdy si na výsledek musíte dostatečně dlouho počkat.

Závěr

Na závěr bychom měli doplnit to, co jsme slíbili v názvu článku, tedy vysvětlit, jak lze Cavendishovými vahami zvážit zeměkouli. Vypadá to totiž, že jsme popsali něco jiného – měření gravitační konstanty G. Krok od gravitační konstanty ke hmotnosti Země ale jistě snadno dokážete udělat sami. Jak na to? Newtonův gravitační zákon můžeme napsat např. takto:

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{mM_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}^2}. \tag{20}$$

M_{Z} zde představuje hledanou hmotnost Země, R_{Z} její poloměr, m je hmotnost nějakého předmětu a F_{g} je gravitační síla, kterou je tento předmět přitahován Zemí, je-li umístěn na jejím povrchu (zcela zbytečně určitě připomínáme, že tuto sílu určíte jako mg). G jsme změřili, takže stačí z rovnice (20) vyjádřit M_{Z}, dosadit správné hodnoty a zeměkouli máte zváženou.

Chcete si měření gravitační konstanty, a tedy i vážení zeměkoule vyzkoušet sami? Ozvěte se autorům článku, např. na adresu redakce časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, a domluvte se, kdy přijdete. Rádi Vám s měřením pomůžeme.

Literatura

[1] Žilavá, M.: Vážení Země. Diplomová práce. MFF UK, Praha, 1995.