Rozhledy matematicko-fyzikální

Adéla Foglarová; Kristýna Kamenářová

Korespondenční seminář M&M

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 3, 54–58

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147899`

ÚLOHA 6. (5 bodů)
Pro která kladná reálná čísla b existuje posloupnost kladných reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n+2} = \sqrt{b \cdot a_{n+1} - a_n}$$

pro všechna přirozená n?

ÚLOHA 7. (5 bodů)
Jsou dány dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel, přičemž pro všechna přirozená n je b_n rovno součinu všech různých prvočísel dělících a_n. Dále pro všechna $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dokažte, že existuje přirozené k splňující $a_k/b_k = 2019$.

ÚLOHA 8. (5 bodů)
Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že $a_1 = 1$ a pro všechna přirozená n větší než 1 je a_n nejmenší přirozené číslo, které je různé od všech předchozích prvků posloupnosti a které je nesoudělné s jejich součtem. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje všechna přirozená čísla.

Korespondenční seminář M&M

Za M&M Adéla Foglarová & Kristýna Kamenářová, MFF UK Praha

Milý čtenáři!

Rádi bychom Ti představili korespondenční seminář M&M. Je určený pro středoškoláky, které zajímá matematika, fyzika nebo informatika a rádi se o těchto vědách dovídají něco nového. A jak to funguje? Během školního roku vydáváme 6 čísel časopisu nabitého články, úlohami, ale především tématy k zamyšlení. Za každou vyřešenou úlohu nebo úvahu k tématu získáváš body a soutěžíš tak s ostatními řešiteli o krásné ceny, a hlavně se tak můžeš dostat na soustředění, která pořádáme dvakrát ročně. Na soustředění poznáš lidi s podobnými zájmy, budeš chodit na zajímavé přednášky, zahraješ si spoustu neotřelých her a taky si zkusíš, jaké je to zabývat se určitým problémem a pak ho prezentovat na malé, téměř vědecké, konferenci. A teď bychom Ti chtěli ukázat jeden z řešitelských článků, abys věděl/a, na co se těšit.

Řešitelský článek

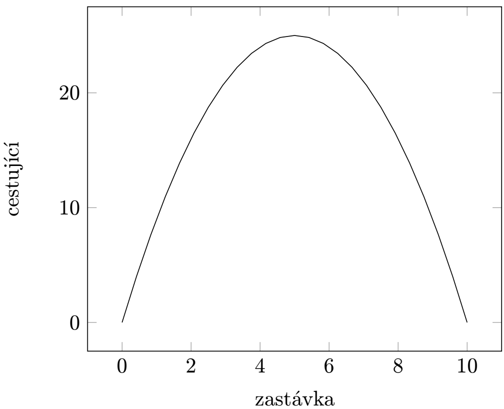
Abstrakt. V tomto článku se teoreticky zabývám odhadem vývoje počtu cestujících na linkách bez konkrétního směru a v dlouhodobém průměru dní i časů. Používám několik metod, které mají za cíl postupně zpřesnit výsledný odhad.

Úvod

Bohužel jsem neměl dostatek experimentálních dat, takže jsem situaci popisoval čistě teoreticky. Pro začátek uvažujme pouze dlouhodobý průměr, tedy neorientovanou trasu bez konkrétního času (cestující se zpravidla vrací i zpět). V tom případě můžeme problém převést na „Čemu je úměrný počet lidí jedoucích mezi místy/městy A a B?“ (Resp. n_1 a n_2.)

Rovnoměrné rozložení

V nejtriviálnějším případě mezi každou dvojicí jede stejný počet lidí. Po vydělení konstantou tohoto počtu zjistíme, že na k-té zastávce z n při číslování od 1 vystoupí k–1 lidí (předchozí zastávky) a nastoupí $n-k$ (následující zastávky) lidí, počet lidí se tedy zvýšil o $n - k - k + 1 = n - 2k + 1$ (resp. sníží, je-li toto číslo záporné). Z toho vyplývá, že po l-té zastávce je uvnitř $\sum_{k=1}^{l} n - 2k + 1 = l * (n + 1) - 2\sum_{k=1}^{l} k = ln + l - 2\frac{l(l+1)}{2} = ln + l - l^2 - l = ln - l^2$ osob. Pokud bude zastávek celkem 10, graf zachycující vývoj počtu cestujících vypadá takto:



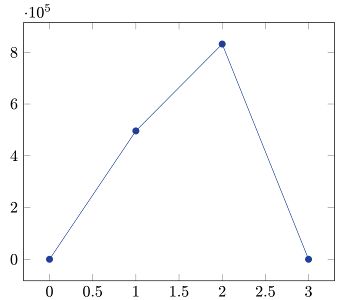
Jedná se o kvadratickou funkci, tedy parabolu, takže nejvyšší počet cestujících je uprostřed – ve vrcholu paraboly. Všimněme si, že na začátku i na konci je tramvaj podle očekávání prázdná. Bohužel zastávky běžně nejsou rovnocenné, takže musíme zavést nějaký jiný model.

Součet obyvatel

Pokud zanedbáme ostatní spoje, popřípadě řekneme, že jsou rozložené úměrně počtu obyvatel, můžeme říct, že počet pasažérů mezi dvěma městy záleží na velikosti těchto měst, resp. na počtu lidí, kteří z nich mohou cestovat – součtu počtů obyvatel daného města (pro n-té město o_n). Pokud mezi dvěma městy cestuje $o_n + o_k$ lidí, můžeme říci, že $o_n + o_k$ nastoupí na n-té zastávce a vystoupí na k-té. Na n-té zastávce z l tedy nastoupí $\sum_{k=n+1}^{l}(o_n + o_k)$ lidí a vystoupí jich $\sum_{k=1}^{n-1}(o_n + o_k)$. Celkový počet se zvýší (resp. sníží při záporném čísle) o $\sum_{k=n+1}^{l}(o_n + o_k) - \sum_{k=1}^{n-1}(o_n + o_k) = o_n(l - n - n + 1) + \sum_{k=n+1}^{l} o_k - \sum_{k=1}^{n-1} o_k = o_n(l - 2n + 1) + \sum_{k=1}^{l} o_k - o_n - 2\sum_{k=1}^{n} o_k = o_n(l - 2n) + \sum_{k=1}^{l} o_k - 2\sum_{k=1}^{n-1} o_k$. Přitom $\sum_{k=1}^{l} o_k$ je konstantní, protože se jedná o součet obyvatel všech měst na trase, můžeme jej tedy nahradit zápisem O.

Dostáváme tedy rekurzivní funkci, kde se počet cestujících po n-té zastávce změní o $o_n(l - 2n) + O - 2\sum_{k=1}^{n-1} o_k$, přičemž poslední sumace je zřejmě počet obyvatel měst před n-tým. Vzhledem k tomu, že používáme konstantní velikosti měst, bude jednodušší než vystihnout tuto rekurzivní funkci předpisem ukázat příklad pomocí počítačově dopočítaných dat. Pro tento příklad jsem vybral trasu Přerov–Kroměříž–Brno. Vstupní data mohou vypadat např. takto (údaje o počtech obyvatel jsou z Wikipedie): Přerov 43 791, Kroměříž 29 002, Brno 379 527.

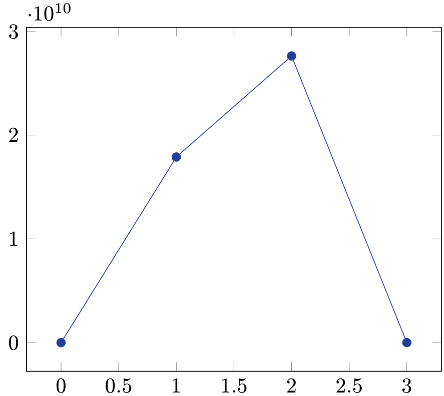
Strojovým zpracováním těchto dat s využitím rekurzivní funkce se startem v bodě 0 dostaneme počty 496091 a 831807, před první a po poslední zastávce samozřejmě 0. (Na žádost mohou dodat i použitý kód v Pythonu.) Graficky znázorněno:



Vidíme, že v tomto případě nebyl předchozí způsob tak daleko od tohoto, ale určité rozdíly jsou.

Důležitost

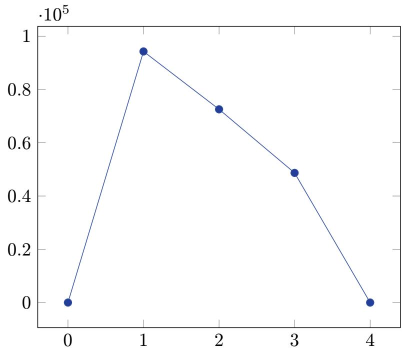
Dalším způsobem, jak odhadnout rozložení, je využití důležitosti města – čím důležitější město, tím více lidí do něj bude cestovat. Pro účely tohoto článku zjednodušme důležitost na veličinu přímo úměrnou počtu obyvatel – většinou se někam jezdí za někým. Z toho vyplývá, že pokud si počty obyvatel dvou měst označíme o_n, resp. o_k, bude zde cestovat $o_n * o_k$ lidí z města n a obdobně $o_k * o_n$ lidí z města k, celkem tedy $2o_no_k$. Pořád roznásobujeme konstantou, takže pro účely tvaru křivky můžeme počítat s tím, že mezi těmito městy bude cestovat o_no_k pasažérů. V n-tém městě z l tedy nastoupí $\sum_{k=n+1}^{l} o_ko_n$ lidí a vystoupí $\sum_{k=1}^{n-1} o_no_k$, celkem se počet pasažérů změní o $\sum_{k=n+1}^{l} o_ko_n - \sum_{k=1}^{n-1} o_no_k = o_n(\sum_{k=n+1}^{l} o_k) - \sum_{k=1}^{n-1} o_k = o_n(O - o_n - 2\sum_{k=1}^{n-1} o_k)$. Pokud takto získanou rekurzivní funkci použijeme na výše zmíněná data, dostaneme čísla obrovských řádů – kromě nulových krajních bodů jsou postupně 17889017619 a 27625453051, graficky:



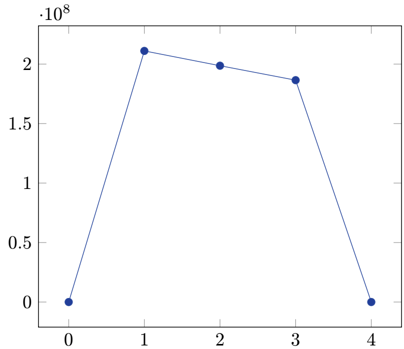
Můžeme si všimnout, že u těchto dat se grafy téměř neliší, hlavně z toho důvodu, žě města jsou řádově podobně velká. Rozdíl je vidět na následující sadě dat, která zobrazují vlak mezi dvěma malými městy, z nichž jedno je znatelně větší, který projíždí přes dvě vesnice.

Kroměříž	Postupky	Bezměrov	Kojetín
29002	558	520	6200

Minulým způsobem (konkrétní data neuvádím, nejsou nějak zvláště důležitá a z informací zde na ně není těžké přijít):



A pomocí důležitosti:



Jelikož se jedná o spoj, se kterým mám určité zkušenosti, můžu potvrdit, že druhý graf je podstatně přesnější. V Postoupkách a Bezměrově téměř nikdo nevystupuje a nenastupuje – co by tam taky kdo dělal.

Závěr

Pravděpodobně nejpřesnější metodou je počítání s důležitostí daného města pomocí rekurzivní funkce, pro nedostatek experimentálních dat bylo tuto domněnku ale nemožné spolehlivě potvrdit. Důležitost města navíc samozřejmě ovlivňují i další faktory a úměra nemusí být nutně přímá – uvažoval jsem i o exponenciální podobě, kterou vidíme například u Prahy – v důsledku pragocentrismu je více než dvakrát důležitější než Brno. Dále třeba vzdálenost, častěji se jezdí kratší úseky než delší. Samostatnou kapitolu potom tvoří orientované trasy a konkrétní časy, protože faktorů rychle přibývá.