Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vlasta Moravcová; José Marcial Nájares Romero

Věta o obvodovém a středovém úhlu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 64 (2019), No. 2, 104–114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147804`

Věta o obvodovém a středovém úhlu

Vlasta Moravcová, José Marcial Nájares Romero

Abstrakt. V článku se zabýváme méně známým přístupem k důkazu věty o obvodovém a středovém úhlu, které přísluší témuž kružnicovému oblouku. V obvyklém důkazu je použita věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Zde předložený důkaz je však založen na jednodušších tvrzeních, díky čemuž může být věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku následně prezentována jako jeden z důsledků věty o obvodovém a středovém úhlu.

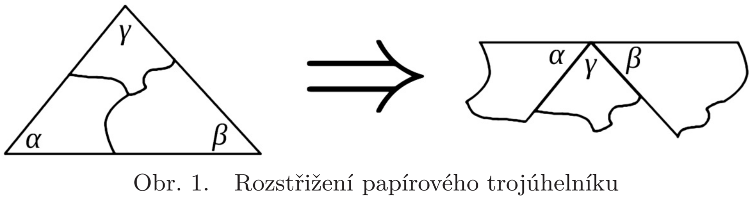
Potřebu dokládat matematická tvrzení důkazy a systematicky tak budovat celou teorii spatřujeme již v antickém Řecku u Pýthagorejců. Podrobnější vymezení správných deduktivních postupů podal filosof Aristotelés ze Stageiry (4. století př. n. l.) a první dochované základy axiomaticky vystavěné geometrie představil okolo roku 300 př. n. l. Eukleidés v díle *Stoicheia* [Základy]. Patrně nejznámější poloformální axiomatický systém [2] vytvořil na přelomu 19. a 20. století německý matematik David Hilbert (1862–1943) a představil jej v knize *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1899). Dalšími autory moderních axiomatických systémů geometrie jsou George Birkhoff (1884–1944) nebo Alfred Tarski (1901–1983). Hilbertův systém je však nejbližší Eukleidovu pojetí a díky tomu také školské matematice, proto z něj v následujícím textu vycházíme.

1. Postavení věty o obvodovém a středovém úhlu ve školské planimetrii

S větou o obvodovém a středovém úhlu se žáci zpravidla seznamují na středních školách, a sice v následující podobě:

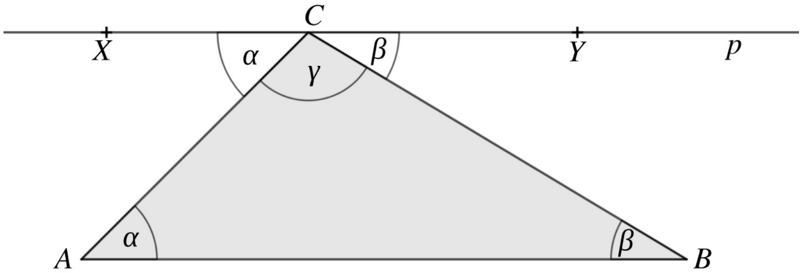
> *Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž kružnicovému oblouku.*

V obvyklém důkazu této věty (viz např. [8], s. 61–63) je využito tvrzení, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°. S ním se žáci setkávají již na základní škole, kde jej nejprve vysloví jako hypotézu na základě rozstřižení papírového trojúhelníku na tři části a následného vhodného přiložení těchto částí vedle sebe (viz obr. 1). Větu o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku můžeme dokázat následovně:



Obr. 1. Rozstřižení papírového trojúhelníku

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky, MFF UK, Praha, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: morava@karlin.mff.cuni.cz, Mgr. José Marcial Nájares Romero, Základní škola Gutova, Gutova 39/1987, 100 00 Praha 10, e-mail: Najares_R@seznam.cz



Obr. 2. K důkazu věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku

Označme daný trojúhelník ABC a velikosti jeho vnitřních úhlů BAC, ABC a ACB po řadě α, β a γ (obr. 2). Bodem C veďme rovnoběžku p s úsečkou AB. Na přímce p vyznačme libovolný bod X různý od C, který leží v polorovině BCA, a libovolný bod Y různý od C, který leží v polorovině ACB. Z vlastnosti střídavých úhlů vyplývá, že velikost úhlu XCA je rovna α, velikost úhlu BCY je rovna β. Vidíme, že velikost přímého úhlu XCY je rovna součtu velikostí úhlů XCA, BCY, ACB, a tedy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Podobné, byť – adekvátně věku žáků – zjednodušené důkazy nalezneme také v základoškolských učebnicích, například v [7] nebo [3]. Zjednodušení spočívá především v zanedbání rozdílu mezi označením úhlu (jako geometrického objektu) a jeho velikosti.[1] Dále bychom rádi podotkli, že rovnost střídavých úhlů je předkládána žákům bez důkazu, jen na základě názoru. Navíc zde u žáků dochází k vytvoření zkreslené představy o pojmech *souhlasné* a *střídavé* úhly. Ze základní i střední školy žáci přichází s nesprávnou představou, že souhlasné a střídavé úhly souvisí pouze s rovnoběžnými přímkami a jsou vždy shodné.[2] Tuto představu bohužel podporují i některé učebnice.[3]

Výše popsaný přístup představuje větu o obvodovém a středovém úhlu jako důsledek věty o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku. V následujícím textu podáme jiný, méně známý[4] důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu, v němž větu o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku nepoužijeme. To nám umožní obrátit pohled na vztah uvedených vět a vnímat větu o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku jako důsledek věty o obvodovém a středovém úhlu.

[1] Ve zmíněných učebnicích je vynecháno slovo velikost, avšak součet je vyjadřován ve stupních. Větu lze vyslovit i bez uvažování metriky: *Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý*, pokud nahlížíme na úhly jako na geometrické útvary – části roviny. Přímý úhel lze pak definovat jako polorovinu atd., viz např. [5].

[2] V axiomaticky budované geometrii nejprve definujeme dvojice souhlasných a střídavých úhlů jako dvojice příslušných úhlů, které svírají dvě libovolné různé přímky a, b s příčkou p – korektní definice souhlasných úhlů viz ([5], s. 31); střídavé úhly lze definovat analogicky. Teprve poté můžeme vyslovit tvrzení, že tyto úhly jsou shodné právě tehdy, když jsou přímky a, b rovnoběžné.

[3] Nesprávná fixace na rovnoběžky se vyskytuje například v učebnicích ([1], s. 25), ([7], s. 17), ([9], s. 15–16).

[4] Předkládaný důkaz se opírá o rovnost souhlasných úhlů při rovnoběžných přímkách, je tedy založen na obdobné myšlence jako obvyklý důkaz věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku. Je pravděpodobné, že již byl někdy takový nebo obdobný důkaz věty o středovém a obvodovém úhlu podán, avšak není nám známá žádná publikace, která by jej v této podobě a takto podrobně prezentovala. Jiný, též elegantní důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu uvedl Leischner [6], avšak vycházel z předpokladu, že součet velikostí vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 360°.

2. Důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu

Předložený důkaz je vystavěn v duchu Hilbertovy axiomatiky. Tento axiomatický systém je tvořen primitivními pojmy *bod*, *přímka*, *rovina*, primitivními relacemi *ležet mezi*, *ležet na* a *být shodný* a 21 axiomy rozdělenými do pěti skupin: *incidence*, *uspořádání*, *shodnost*, *rovnoběžnost*, *spojitost* [4].[5] Na jejich základu lze postupně formulovat definice a věty eukleidovské geometrie. Nechceme však čtenáře zatěžovat podrobnými definicemi pojmů, s nimiž v textu dále pracujeme, ani důkazy všech pomocných tvrzení. Podáváme proto jen jejich přehled s odkazem na literaturu, kde lze dohledat více podrobností. V následujícím důkazu pracujeme s pojmy:

- *kolineární body*, *průsečík*, *polorovina*, *rovnoběžná přímka/rovnoběžka*
- *kružnice*, *menší/větší kružnicový oblouk s krajními body*, *polokružnice*
- *úhel*, *součet/rozdíl úhlů*, *rameno úhlu*, *vrcholové úhly*, *souhlasné úhly*
- *středový/obvodový úhel příslušný kružnicovému oblouku*
- *trojúhelník*, *vnitřní/vnější bod trojúhelníku/úhlu*

Předpokládáme, že čtenáři jsou uvedené pojmy známy. Definici většiny z nich na základě Hilbertovy axiomatiky lze nalézt v [5]. Dále využíváme několik tvrzení, která je možné dokázat na základě axiomů incidence, uspořádání, shodnosti a rovnoběžnosti (důkazy těchto nebo obdobných vět viz [5]):

- *Vrcholové úhly jsou shodné.* (v1)
- *Souhlasné úhly, které jsou tvořeny dvojicí rovnoběžných přímek a jejich příčkou, jsou shodné.* (v2)
- *Daným bodem, který neleží na dané přímce, lze vést k této přímce právě jednu rovnoběžku.* (v3)

V našem důkazu se také odvoláváme přímo na jeden z Hilbertových axiomů shodnosti ([4], s. 10):[6]

- *Mějme dva trojúhelníky* ABC, $A'B'C'$. *Pokud je* $AB \simeq A'B'$, $AC \simeq A'C'$ *a* $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$, *potom je také* $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ *a* $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle A'C'B'$. (S)

Věta o obvodovém a středovém úhlu a její důkaz

Znění věty můžeme formulovat následovně:

> *Středový úhel* ASB *příslušný danému kružnicovému oblouku* AB *je shodný s úhlem, který získáme jako součet libovolného obvodového úhlu* ACB *příslušného témuž oblouku se sebou samým.*

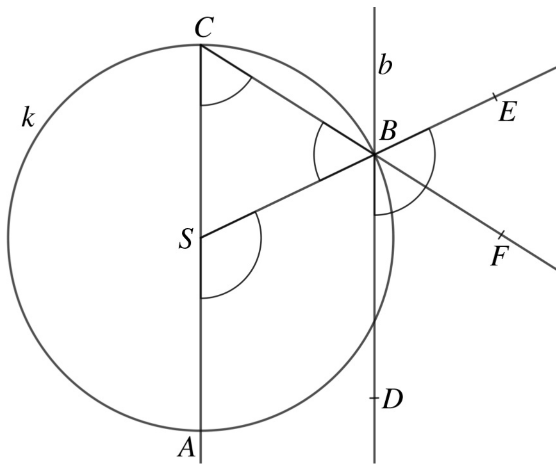
[5] Přehled všech Hilbertových axiomů v češtině je k dispozici například v [2] nebo [5].

[6] V citovaném zdroji je pro shodnost úseček a úhlů (v tom smyslu, že je lze na sebe přemístit tak, že se kryjí) používán znak $\equiv$, v tomto příspěvku však užíváme značení $\simeq$ v souladu s prací [5].

Důkaz. Mějme kružnici k se středem S a různé body A, B takové, že $A \in k$, $B \in k$.

Nejprve předpokládejme, že body A, S, B nejsou kolineární. Uvažujeme-li menší oblouk AB, pak mohou nastat tři disjunktní případy:

(a) Střed S leží na jednom z ramen úhlu ACB (obr. 3).



Obr. 3. K části (a) důkazu věty o obvodovém a středovém úhlu

Nechť bod S leží například na rameni CA, tedy:

$$\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle SCB. \tag{1}$$

Trojúhelníky BCS, CBS splňují předpoklady axiomu (S), neboť $BS \simeq CS$, $CS \simeq BS$ a $\sphericalangle BSC \simeq \sphericalangle CSB$. Díky tomu platí také:

$$\sphericalangle SCB \simeq \sphericalangle SBC. \tag{2}$$

Dále podle (v3) existuje jediná rovnoběžka b s přímkou AC procházející bodem B. Na přímce b zvolíme libovolný bod D různý od B, který leží v polorovině SBA. Dále zvolíme libovolný bod E na přímce SB takový, že bod B leží mezi body S, E, a bod F na přímce CB takový, že bod B leží mezi body C, F. Úhly SBC a FBE jsou vrcholové, a tedy podle (v1) platí:

$$\sphericalangle SBC \simeq \sphericalangle FBE. \tag{3}$$

Úhly SCB a DBF jsou souhlasné a navíc je přímka SC rovnoběžná s přímkou DB. Podle (v2) tedy platí:

$$\sphericalangle SCB \simeq \sphericalangle DBF. \tag{4}$$

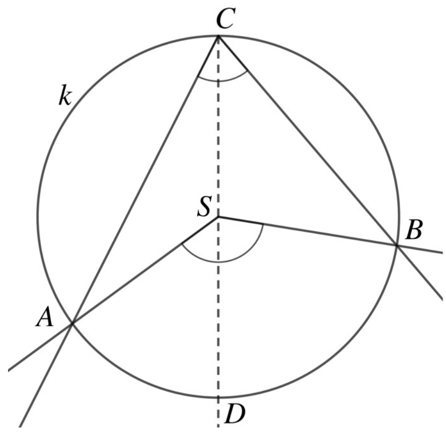
Z uvedených vztahů vyplývá:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DBE &\simeq \sphericalangle DBF + \sphericalangle FBE \overset{(3),(4)}{\simeq} \sphericalangle SCB + \sphericalangle SBC \overset{(2)}{\simeq}\\ &\overset{(2)}{\simeq} \sphericalangle SCB + \sphericalangle SCB \overset{(1)}{\simeq} \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Jelikož je úhel DBE souhlasný s úhlem ASB a přímky AS, DB jsou rovnoběžné, je $\sphericalangle DBE \simeq \sphericalangle ASB$, a tedy:

$$\sphericalangle ASB \simeq \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACB.$$

(b) Střed S je vnitřním bodem úhlu ACB (obr. 4).



Obr. 4. K části (b) důkazu věty o obvodovém a středovém úhlu

Průsečík přímky CS s danou kružnicí, který je různý od bodu C, označíme D. Pro obvodový a středový úhel příslušný oblouku AB platí:

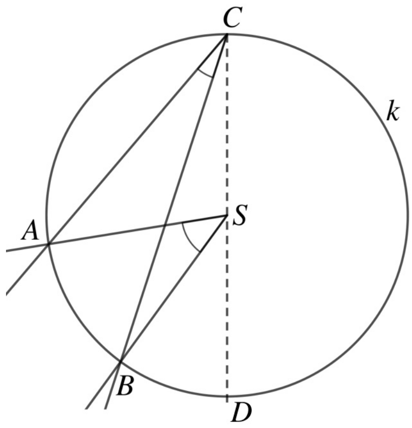
$$\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB, \tag{5}$$
$$\sphericalangle ASB \simeq \sphericalangle ASD + \sphericalangle DSB. \tag{6}$$

Úhly ACD a ASD jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku AD, podobně úhly DCB a DSB jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku DB. Jelikož bod S leží na rameni CD obvodových úhlů ACD a DCB, podle bodu (a) platí:

$$\sphericalangle ASD \simeq \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACD, \tag{7}$$
$$\sphericalangle DSB \simeq \sphericalangle DCB + \sphericalangle DCB. \tag{8}$$

Z uvedených vztahů vyplývá:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle ASB &\overset{(6)}{\simeq} \sphericalangle ASD + \sphericalangle DSB \overset{(7),(8)}{\simeq} \\
&\overset{(7),(8)}{\simeq} (\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACD) + (\sphericalangle DCB + \sphericalangle DCB) \simeq \\
&\simeq (\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB) + (\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB) \overset{(5)}{\simeq} \\
&\overset{(5)}{\simeq} \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACB.
\end{aligned}$$



Obr. 5. K části (c) důkazu věty o obvodovém a středovém úhlu

(c) Střed S je vnějším bodem úhlu ACB (obr. 5).

Průsečík přímky CS s danou kružnicí, který je různý od bodu C, označíme D. Pro obvodový a středový úhel příslušný oblouku AB platí:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACB &\simeq \sphericalangle ACD - \sphericalangle DCB, &(9)\\ \sphericalangle ASB &\simeq \sphericalangle ASD - \sphericalangle DSB. &(10)\end{aligned}$$

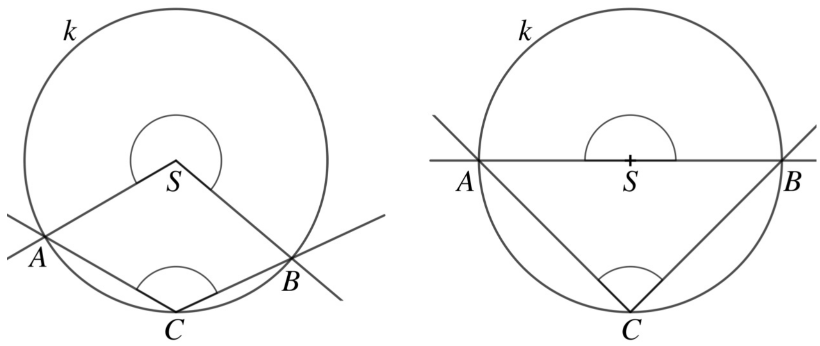
Úhly ACD a ASD jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku AD, podobně úhly DCB a DSB jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku DB. Jelikož bod S leží na rameni CD obvodových úhlů ACD a DCB, podle bodu (a) platí:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASD &\simeq \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACD, &(11)\\ \sphericalangle DSB &\simeq \sphericalangle DCB + \sphericalangle DCB. &(12)\end{aligned}$$

Z uvedených vztahů vyplývá:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASB &\overset{(10)}{\simeq} \sphericalangle ASD - \sphericalangle DSB \overset{(11),(12)}{\simeq}\\ &\overset{(11),(12)}{\simeq} (\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACD) - (\sphericalangle DCB + \sphericalangle DCB) \simeq\\ &\simeq (\sphericalangle ACD - \sphericalangle DCB) + (\sphericalangle ACD - \sphericalangle DCB) \overset{(9)}{\simeq}\\ &\overset{(9)}{\simeq} \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Uvažujeme-li větší oblouk AB nebo jsou-li body A, S, B kolineární, je bod S vždy vnitřním bodem obvodového úhlu ACB (obr. 6) a platí část (b) výše. Důkaz je proveden. $\square$



Obr. 6. K důkazu věty o obvodovém a středovém úhlu: větší oblouk AB (vlevo), kolineární body A, S, B (vpravo)

3. Důsledky věty o obvodovém a středovém úhlu

Z věty o obvodovém a středovém úhlu vyplývá mnoho dalších zajímavých tvrzení. Připomeneme zde vybraná z nich od těch nejznámějších po věty, které se obvykle dokazují jinak, bez použití věty o obvodovém a středovém úhlu. Tvrzení uvádíme již jen ve zjednodušené školské terminologii a jejich důkazy pouze naznačíme.

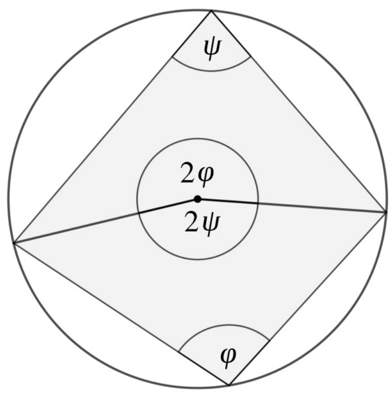
* * *

Patrně nejznámějším důsledkem ve středoškolské matematice je jedna z vlastností tětivového čtyřúhelníku:

Součet velikostí protějších úhlů tětivového čtyřúhelníku je roven 180°.

Tato vlastnost ihned vyplývá z toho, že součet velikostí středových úhlů odpovídajících protějším obvodovým úhlům je 360° (obr. 7).

* * *



Obr. 7. Součet velikostí protějších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku

Další známou větou je věta Thalétova:

Množinou vrcholů pravých úhlů nad úsečkou AB je kružnice sestrojená nad průměrem AB vyjma bodů A, B.

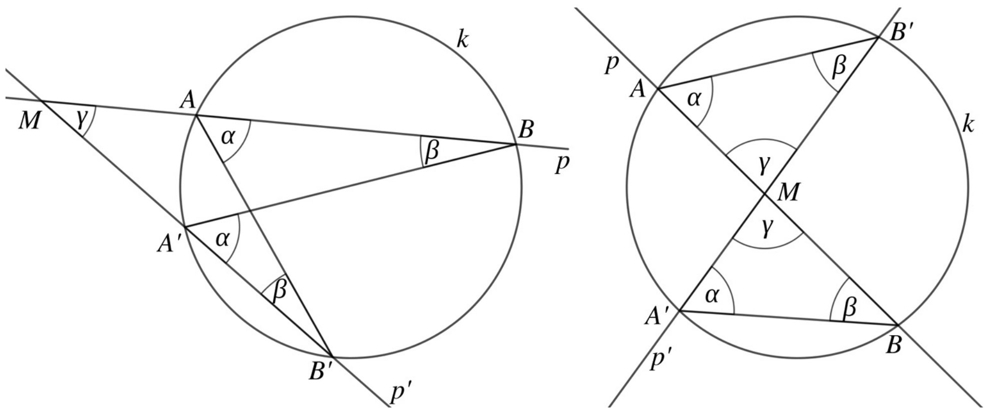
Na základní škole, kde se s ní žáci obvykle poprvé setkají, je tato věta dokazována právě s využitím součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Lze na ni však také nahlédnout jako na přímý důsledek věty o obvodovém a středovém úhlu; viz obrázek 6 vpravo, kde obvodový úhel ACB odpovídá přímému středovému úhlu ASB. Za její zobecnění pak lze považovat tvrzení: *množinou bodů, z nichž je daná úsečka vidět pod daným úhlem, je kružnicový oblouk* (přesněji sjednocení dvou kružnicových oblouků), s jehož aplikací se setkáváme v úlohách o konstrukcích trojúhelníků.[7]

* * *

Přímým důsledkem věty o středovém a obvodovém úhlu je tvrzení, že *všechny obvodové úhly příslušné témuž kružnicovému oblouku jsou shodné.* Toho můžeme využít v důkazu věty související s mocností bodu ke kružnici:

Je dána kružnice k a bod M, který na ní neleží. Nechť přímky p, p' jsou dvě různé libovolné sečny kružnice k vedené bodem M. Označme A, B průsečíky sečny p s kružnicí k a A', B' průsečíky sečny p' s kružnicí k. Potom $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.

Díky shodnosti obvodových úhlů příslušných témuž oblouku jsou trojúhelníky MAB', $MA'B$ podobné[8] nezávisle na tom, zda je bod M vnějším nebo vnitřním bodem kružnice k (obr. 8). Proto jsou si rovny poměry jejich odpovídajících si stran, tedy $\dfrac{|MA|}{|MA'|} = \dfrac{|MB'|}{|MB|}$. Odtud již plyne platnost uvedeného tvrzení.

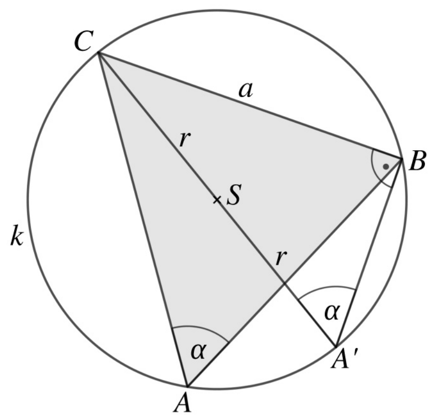


Obr. 8. Konstantní součin délek úseček na sečnách kružnice

* * *

[7]Například v úloze: *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany AB, velikost úhlu γ a velikost výšky na stranu AB.*

[8]Podle věty o podobnosti trojúhelníků *uu*.



Obr. 9. Sinová věta

Shodnost obvodových úhlů příslušných témuž kružnicovému oblouku můžeme využít také k elegantnímu důkazu sinové věty:

V trojúhelníku ABC je $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Každému trojúhelníku lze opsat kružnici k, její poloměr označme r. Na kružnici k sestrojíme bod A' tak, aby trojúhelník $A'BC$ byl pravoúhlý s přeponou $A'C$ (obr. 9). Z Thalétovy věty vyplývá, že úsečka $A'C$ je průměrem kružnice k. Úhel $BA'C$ je shodný s úhlem BAC, neboť oba tyto úhly přísluší oblouku BC. V trojúhelníku $A'BC$ je $\sin\alpha = \dfrac{a}{2r}$, a tedy $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r$. Analogicky je také $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2r$ a $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$, tedy $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

* * *

Jelikož jsme větu o obvodovém a středovém úhlu dokázali, aniž bychom předpokládali, že součet velikostí úhlů v trojúhelníku je $180°$, můžeme ji nyní naopak použít k snadnému důkazu již uvedeného tvrzení:

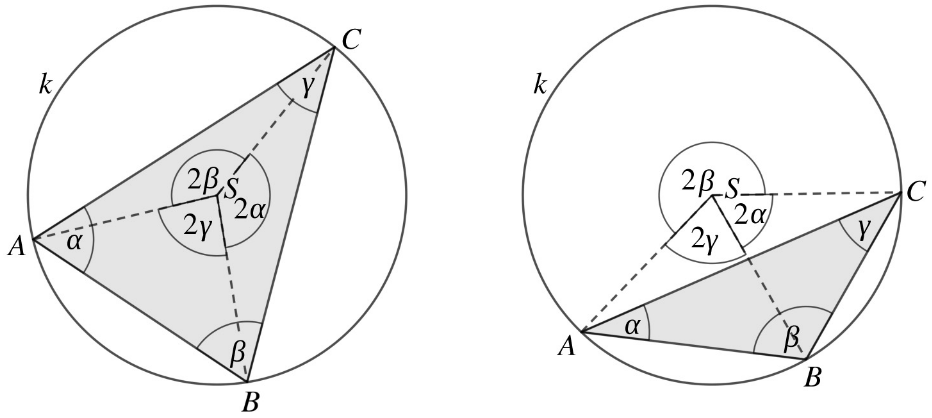
Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je $180°$.

Trojúhelníku ABC opíšeme kružnici k (obr. 10).[9] Vnitřní úhly trojúhelníku jsou pak obvodovými úhly příslušnými obloukům kružnice k, přičemž součet velikostí jim odpovídajících středových úhlů je roven $360°$. Odtud $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Tento důkaz věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je uveden například na `proofsfromthebook.com`[10]. Na těchto stránkách je však věta o obvodovém a středovém úhlu dokázána pomocí součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku, důkazy se zde tedy nevhodně cyklí.

[9] Nezáleží na tom, zda je daný trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý. Na obr. 10 je znázorněn ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník, k náhledu situace v pravoúhlém trojúhelníku může posloužit obr. 6 vpravo.

[10] Přesný odkaz je: `http://proofsfromthebook.com/2013/04/13/triangle-angle-sum-and-inscribed-angle-theorems` [cit. 26. 5. 2019].



Obr. 10. Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku

4. Závěr

Pokud se nebudeme striktně držet axiomatického přístupu a připustíme určité, již dříve naznačené, nepřesnosti,[11] lze předložený důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu zjednodušit a více přiblížit žákům. Porovnáme-li pak uvedený důkaz s obvyklým školským přístupem, neshledáváme, že by byl komplikovanější, spíše naopak. Použití nejen tradičního, ale i alternativního přístupu středoškolákům umožňuje pozorovat souvislosti planimetrických vět a rozvíjet tak logické myšlení i objevovat krásu a eleganci eukleidovské geometrie.

Poděkování. Tento článek vznikl za podpory programu Univerzitní výzkumná centra UK, č. UNCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.* Za cenné rady autoři děkují doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D.

L i t e r a t u r a

[1] Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: *Matematika 6. Geometrie, učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* Fraus, Plzeň, 2007.

[2] Halas, Z.: *Poznámky k axiomatizaci planimetrie.* PMFA 63 (1) (2018), 51–67.

[3] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J.: *Matematika. Trojúhelníky a čtyřúhelníky.* Prometheus, Praha, 2015.

[4] Hilbert, D.: *The foundations of geometry.* Přeložil E. J. Townsend. The Open Court, La Salle, IL, 1902. Reprint z roku 1950 [online], [cit. 20. 5. 2019]. Dostupné z: `https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf`

[5] Lávička, M.: *Syntetická geometrie.* Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2007 [online], [cit. 29. 5. 2019]. Dostupné z: `https://docplayer.cz`

[11] Zejména máme na mysli ztotožnění úhlu a jeho velikosti, kdy výrazy typu $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACB$ zapíšeme jako $|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$ apod.

[6] Leischner, P.: *Proofs of the inscribed angle theorem.* I2 GEO Conference Proceedings, 2010, 1–10 [online], [cit. 26. 5. 2019]. Dostupné z:
`https://cermat.org/i2geo2010/downloads/index.html`

[7] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl.* Prometheus, Praha, 1999.

[8] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus, Praha, 2008.

[9] Vondra, J.: *Matematika pro střední školy, 3. díl: Planimetrie. Učebnice.* Didaktis, Brno, 2013.