Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ján Andres

Šarkovského věta a diferenciální rovnice III

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 64 (2019), No. 2, 91–103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147803`

Šarkovského věta a diferenciální rovnice III

Jan Andres

Abstrakt. Článek je pokračováním našich dřívějších stejnojmenných příspěvků, v nichž jsme vyšetřovali možnosti aplikace různých variant Šarkovského věty o koexistenci periodických bodů a orbit pro intervalová zobrazení na diferenciální rovnice a inkluze. I tentokrát se budeme zabývat stejným problémem, avšak pro zobrazení na kružnici. Na rozdíl od intervalových zobrazení zde totiž mj. nemusí periodické orbity implikovat existenci pevných bodů, což představuje největší překážku. Na druhé straně lze takto rozšířit aplikace o další zajímavé případy.

1. Úvod

Šarkovského věta [29] o koexistenci periodických bodů pro spojitá intervalová zobrazení z roku 1964 (viz větu 2 níže) patří ke klasickým výsledkům moderní teorie diskrétních dynamických systémů (viz např. [25], kap. 15.3). Tuto slavnou větu však nelze aplikovat na diferenciální rovnice splňující podmínku jednoznačnosti. V případě nejednoznačnosti se situace sice dramaticky mění, avšak je potřeba odvodit vhodnou verzi pro mnohoznačná zobrazení, což bylo předmětem našich úvah v článcích [2], [3].

V tomto příspěvku chceme podobně diskutovat možnost aplikace vět Šarkovského typu na kružnici. Odpovídající standardní větu vyslovil za dodatečného předpokladu existence pevného bodu Block [16] v roce 1981 (viz větu 3 níže). Jak ukážeme, nelze bohužel ani tuto větu aplikovat na obyčejné skalární diferenciální rovnice s podmínkou jednoznačnosti. Pro mnohoznačná zobrazení na kružnici však opět můžeme vyslovit věty o koexistenci periodických orbit, které umíme aplikovat jak na diferenciální rovnice, tak na diferenciální inkluze. V případě absence podmínky jednoznačnosti u rovnic doplňují získané výsledky teorii spojenou se jmény Poincaré [27], Denjoy [20] a van Kampen [24].

Nejdříve ovšem připomeneme základní pojmy, pomocná tvrzení a standardní věty pro jednoznačná zobrazení.

Kružnicí rozumíme – jako obvykle – buď jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^2$ danou rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ nebo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\} = \{z = \mathrm{e}^{2\pi s\,\mathrm{i}}\colon s \in [0, 1]\},$$

nebo faktorový prostor

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{[x]\colon x \in \mathbb{R}\},$$

kde symbol $[x] := \{y \in \mathbb{R}\colon (y - x) \in \mathbb{Z}\}$ označuje třídu prvků ekvivalentních s x, tj. $[x] = x + \mathbb{Z}$, $x \in [0, 1)$, přičemž $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ značí postupně množiny komplexních, reálných a celých čísel. Vzhledem k topologické ekvivalenci není třeba zvlášť rozlišovat

Prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc., katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, e-mail: jan.andres@upol.cz

mezi aditivním a multiplikativním značením, neboť logaritmické zobrazení $e^{2\pi s\,\mathrm{i}} \to s$, $s \in [0, 1]$, zprostředkovává izomorfismus mezi danými reprezentacemi.

Vztah mezi reálnou osou $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a její faktorizací $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ umožňuje projekce $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \to [x]$. Takto můžeme faktorizovat např. spojité zobrazení $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kde $\hat{T} := \tau \circ T$, ale $\hat{T}$ bude spojité v odpovídající metrice $\hat{d}\colon (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to [0, 1/2]$, kde $\hat{d}(x, y) := \min\{|b - a|\colon a \in [x], b \in [y]\}$, jen pokud $T(x) \equiv T(x+1) \pmod 1$.

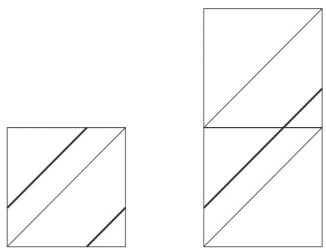
Pro spojitá (vzhledem k metrice $\hat{d}$) zobrazení $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ platí následující tvrzení, které obsahuje definici stupně $\deg(\hat{T})$ zobrazení $\hat{T}$.

Tvrzení 1 (viz např. [23], propozice 4.3.1). *Je-li $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ spojité, pak existuje spojitá funkce $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zvaná* lift *$\hat{T}$ na $\mathbb{R}$, taková, že $\hat{T} \circ \tau = \tau \circ T$, tj. $\hat{T}([x]) = [T(x)]$. Tento lift je – až na aditivní celočíselnou konstantu – jediný, přičemž tzv.* stupeň $\deg(\hat{T}) := T(x+1) - T(x)$ *faktorizace $\hat{T}$ je celé číslo, které nezávisí na $x \in \mathbb{R}$. Je-li $\hat{T}$ homeomorfismus, pak $|\deg(\hat{T})| = 1$. Pokud $\deg(\hat{T}) = 1$, pak daný homeomorfismus zachovává orientaci, tzn. je po částech ryze rostoucí funkcí.*

Příklad 1. Jako triviální příklady můžeme uvést, že identické zobrazení a otočení (rotace) mají stupeň 1. Na obr. 1 je zachycena restrikce $T|_{[0,1]}$ funkce $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na interval $[0, 1]$, kde $T(x) = x + \frac{1}{3}$, a její faktorizace $\hat{T} = \tau \circ T\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kde

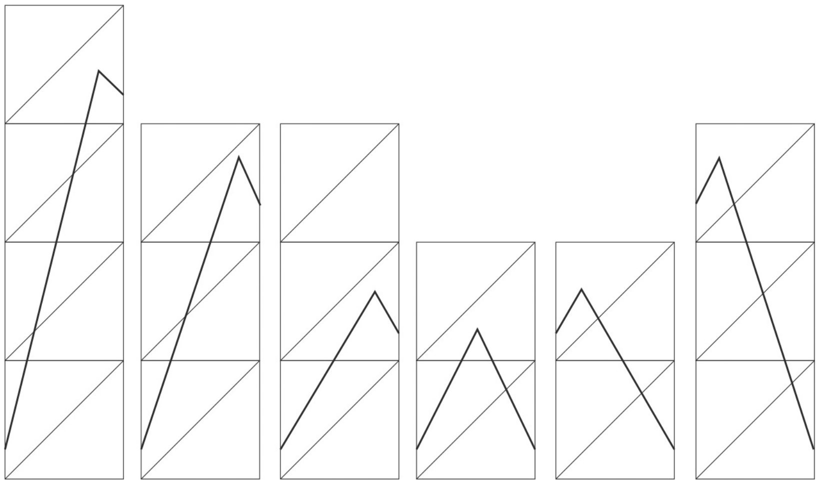
$$\hat{T}(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{3} & \text{pro } x \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ x - \dfrac{2}{3} & \text{pro } x \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

která definuje otočení o 120°. Funkce T je liftem zobrazení $\hat{T}$, pro které platí, že $\deg(\hat{T}) = T(1) - T(0) = 1$.



Obr. 1. Zobrazení $\hat{T}$ a jeho lift $T|_{[0,1]}$ z příkladu 1

Příklad 2 (viz [1], str. 110). Lifty $T|_{[0,1]}$ po částech lineárních zobrazení $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ různých stupňů jsou znázorněny na obr. 2. Všimněme si, že stupeň $\deg(\hat{T})$ zobrazení $\hat{T}$ lze zde (s výjimkou stupně 0) jednoduše charakterizovat jako počet pokrytí celého prostoru $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ množinou $T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Přitom v případě kladné orientace má příslušný stupeň zobrazení kladnou hodnotu, zatímco v případě záporné orientace hodnotu zápornou. Platí, že $\deg(\hat{T}) = T(1) - T(0)$.



Obr. 2. Lifty $T|_{[0,1]}$ zobrazení $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ stupňů 3, 2, 1, 0, −1, −2

Definice 1. Řekneme, že bod $a \in X$ určuje *periodickou orbitu* $\mathcal{O}$ *řádu* $m \in \mathbb{N}$ neboli (primární) *m-orbitu* $\mathcal{O}$ *vzhledem k* $f\colon X \to X$, jestliže $\mathcal{O} = \{a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$, kde

$$f^m(a) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m\text{-krát}}(a) = f(f(\ldots f(a) \ldots)) = a,$$

přičemž prvky tvořící orbitu $\mathcal{O}$ jsou vzájemně odlišné. Samotný bod $a \in X$ pak nazveme *periodickým bodem řádu* m neboli *m-periodickým bodem*. Periodická orbita řádu 1 neboli 1-orbita se nazývá *pevný bod* zobrazení f.

V příkladu 1 určuje každý bod z intervalu $[0, 1)$ 3-orbitu otočení o 120° v kladném směru. Např. počátek 0 je 3-periodickým bodem, který určuje 3-orbitu $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ zobrazení $\hat{T}$, přičemž $\hat{T}(0) = \frac{1}{3}$, $\hat{T}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $\hat{T}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ ($\equiv 0 \pmod 1$). Orbity s jinými periodami se u zobrazení $\hat{T}$ nevyskytují.

Pro homeomorfismy zachovávající orientaci můžeme tvrzení 1 doplnit o následující důležitou informaci.

Tvrzení 2 (viz např. [23], propozice 4.3.8)**.** *Je-li $\hat{T}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfismus zachovávající orientaci, pak všechny příslušné periodické orbity (pokud existují) mají stejnou periodu $m \in \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}$ značí množinu přirozených čísel.*

Na rozdíl od spojitých intervalových zobrazení (viz např. [1]) mohou mít (vzhledem k tvrzení 2) spojitá zobrazení na kružnici m-orbity pro jediné přirozené $m > 1$, aniž by existoval pevný bod (viz příklad 1). Podle výsledků v článcích [15], [26] nemusí mít spojitá zobrazení na kružnici pevný bod ani když mají orbity s nekonečně mnoha (minimálními) periodami.

Podle následující věty (viz [17], [21]) se to však týká výhradně zobrazení stupně 1.

Věta 1 (L. S. Efremova, 1978; L. Block et al., 1980)**.** *Nechť $f\colon S^1 \to S^1$ je spojité zobrazení stupně d. Jestliže $d > 1$ nebo $d < -2$, pak má f k-orbitu pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pro $d = -2$ má zobrazení f k-orbitu pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, přičemž f může (ale nemusí) mít také 2-orbitu. Jestliže $d = 0$ nebo $d = -1$, pak má zobrazení f alespoň pevný bod.*

Pro lepší srozumitelnost následující věty bude nyní vhodné si znovu připomenout klasickou Šarkovského větu pro intervalová zobrazení (viz [29]).

Věta 2 (A. N. Šarkovskij, 1964)**.** *Jestliže existuje přirozené číslo $m > 1$ takové, že spojitá funkce $f\colon I \to I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je libovolný (nedegenerovaný) interval, má m-orbitu, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m \rhd k$ existuje i k-orbita vzhledem k f, kde nerovnost $m \rhd k$ znamená, že m je větší než k v tzv. Šarkovského uspořádání přirozených čísel:*
$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd 2\cdot 9 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd 2^2\cdot 9 \rhd \cdots$ $2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd 2^n\cdot 7 \rhd 2^n\cdot 9 \rhd \cdots 2^{n+1}\cdot 3 \rhd 2^{n+1}\cdot 5 \rhd 2^{n+1}\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^{n+1} \rhd 2^n \rhd \cdots$ $\rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$.

Analogii Šarkovského věty na kružnici vyslovil v roce 1981 Block (viz [16]), a to za předpokladu existence pevného bodu.

Věta 3 (L. Block, 1981)**.** *Nechť $f\colon S^1 \to S^1$ je spojité zobrazení mající pevný bod. Jestliže existuje přirozené číslo $m > 1$ takové, že f má m-orbitu, pak platí alespoň jedna z možností:*

(i) *pro každé $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m < k$ existuje i k-orbita zobrazení f,*

(ii) *pro každé $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m \rhd k$ existuje i k-orbita zobrazení f.*

Příklad 3. Pro lichá $m > 1$ je vždy zaručena alespoň první možnost (i). Např. pro $m = 3$ existuje k-orbita alespoň pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ a pro $m = 5$ existuje k-orbita alespoň pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$. Pro sudá $m > 1$ může nastat kterákoliv z možností (i) nebo (ii). Např. pro $m = 6$ zaručeně existují k-orbity jen pro $k \in \{8, 10, 12, \ldots\}$, zatímco pro $m = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, nemůžeme s jistotou zaručit existenci k-orbity pro žádné konkrétní $k > 1$. Nicméně pro zobrazení stupňů -1 a 0 nastane vždy alespoň možnost (ii) (viz např. [1], [26]).

Vzhledem k větě 1 je zřejmé, že věta 3 nabývá na významu zejména pro spojitá zobrazení $f\colon S^1 \to S^1$ stupně $d = \deg(f) \in \{-1, 0, 1\}$, přičemž pro stupně $d = 0$ nebo $d = -1$ lze ve větě 3 vynechat předpoklad o existenci pevného bodu.

Speciálně pro $m = 3$ dokázal nezávisle výsledek věty 3 Siegberg (viz [28]), a to s dodatkem o chaotičnosti daného zobrazení.

Důsledek 1 (H.-W. Siegberg, 1981)**.** *Nechť $f\colon S^1 \to S^1$ je spojité zobrazení mající pevný bod, 2-orbitu a 3-orbitu. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje k-orbita vzhledem k f.*

Pokud vynecháme v důsledku 1 předpoklad o existenci pevného bodu, pak podle již zmíněných výsledků v článcích [15], [26] je zaručena existence k-orbit jen pro každé k tvaru $k = 2m + 3n$, $m, n \in \mathbb{N}$, tj. $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 4, 6\}$.

Jak nyní ukážeme, nelze bohužel žádnou z uvedených standardních vět 1 a 3 aplikovat na diferenciální rovnice za účelem důkazu koexistence periodických řešení s různými periodami.

Uvažujme tedy obyčejnou skalární diferenciální rovnici 1. řádu

$$x' = F(t, x), \text{ kde } F(t, x) \equiv F(t+1, x) \equiv F(t, x+1), \tag{1}$$

a pro jednoduchost předpokládejme, že $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dále na chvíli předpokládejme, že F splňuje podmínku jednoznačnosti, tj. že každým bodem $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ prochází jediné řešení rovnice (1).

Je známo, že *Poincarého translační operátor* $T_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, podél trajektorií rovnice (1), kde (viz např. [10], kap. III.4, [19], kap. 17)

$$T_n(x_0) := \{x(t_0+n, x_0)\colon x(\cdot, x_0) \text{ je řešením (1), přičemž } x(t_0, x_0) = x_0\}, \tag{2}$$

je ryze rostoucí homeomorfismus, což pro jakékoliv přirozené $m > 1$ vylučuje existenci m-orbit operátoru T_1 ($n = 1$), a tím (vzhledem k vzájemně jednoznačnému vztahu mezi m-periodickými řešeními rovnice (1) a m-orbitami operátoru T_1) i m-periodických (subharmonických) řešení $x(\cdot, x_0)$ rovnice (1). Jinými slovy, podmínka jednoznačnosti vylučuje, aby platilo $x(t, x_0) \equiv x(t+m, x_0)$ a současně $x(t, x_0) \not\equiv x(t+1, x_0)$ pro jakékoliv $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Nicméně předpoklad o biperiodicitě funkce F umožňuje uvažovat jak rovnici (1), tak operátor (2) na faktorovém prostoru $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tj. (mod 1), což již nevylučuje případnou existenci netriviální ($m > 1$) m-orbity odpovídajícího operátoru $\hat{T}_1\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Poněvadž platí, že $\hat{T}_n \circ \tau = \tau \circ T_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde projekce $\tau\colon x \to [x]$ přiřazuje každému bodu $x \in \mathbb{R}$ třídu $[x]$ ekvivalentních bodů (mod 1), je $T_n = T_1^n$, $n \in \mathbb{N}$, liftem (viz tvrzení 1) faktorizovaného operátoru $\hat{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Jelikož je však $\hat{T}_1$ rovněž homeomorfismus zachovávající orientaci (viz např. [9], [19], kap. 17), pak všechny případné periodické orbity musí mít podle tvrzení 2 stejnou periodu. Navíc pro stupeň $\deg(\hat{T}_n) := T_n(x+1) - T_n(x)$ operátoru $\hat{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí za daných podmínek, že $\deg(\hat{T}_n) = 1$ (viz např. [6]), čímž nelze zaručit ani existenci pevného bodu operátoru $\hat{T}_1$.

Je zřejmé, že za dané podmínky jednoznačnosti nemůžeme pro rovnici (1), resp. pro odpovídající operátor $\hat{T}_1$, použít žádnou z výše uvedených vět 1 ani 3. Bez podmínky jednoznačnosti se však operátory T_n a jejich faktorizace $\hat{T}_n$ stávají mnohoznačnými zobrazeními, pro která je potřeba odvodit (vzhledem k případným aplikacím na rovnici (1)) mnohoznačné verze vět 1 a 3 Šarkovského typu nebo alespoň Šarkovského–Liho–Yorkova typu ($m = 3$). Další podrobnosti o tzv. kombinatorických dynamikách pro jednoznačná zobrazení v dimenzi 1 lze nalézt např. v monografii [1].

2. Odpovídající mnohoznačná zobrazení

Je známo (viz např. [10], kap. III.4), že při absenci podmínky jednoznačnosti u rovnice (1) jsou odpovídající Poincarého operátory T_n v definici (2) přípustné (ve smyslu Górniewicze), což mj. znamená, že jsou shora polospojité (tj. pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}$ je množina $\{x \in \mathbb{R}\colon T_n(x) \subset U\}$ otevřená) s kompaktními a souvislými množinami hodnot. Na kompaktních množinách, jako jsou v našem případě kružnice, je možné polospojitost shora ekvivalentně nahradit uzavřeností grafu daného operátoru (viz např. [10], propozice I.3.16). Pokud není navíc v žádném bodě definičního oboru S^1 množinou hodnot celá kružnice, tj. pokud se každý bod S^1 zobrazuje na souvislý, uzavřený oblouk, jehož délka je menší než obvod kružnice, pak hovoříme o tzv. acyklickém zobrazení. Přípustná zobrazení na kružnici je možné jednoduše charakterizovat jako konečné kompozice acyklických zobrazení.

Tyto motivační úvahy vedou k následujícím definicím. Mnohoznačným zobrazením (krátce *M-zobrazením*) $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$, což znamená $\varphi\colon S^1 \to 2^{S^1} \setminus \{\emptyset\}$, budeme rozumět zobrazení s uzavřeným grafem $\Gamma_\varphi := \{(x, y) \in S^1 \times S^1\colon y \in \varphi(x)\}$ a kompaktními, souvislými množinami hodnot $\varphi(x)$ pro všechna $x \in S^1$. Pokud navíc platí, že $\varphi(x) \neq S^1$ pro všechna $x \in S^1$, pak M-zobrazení φ nazveme *acyklickým.* Zobrazení φ nazveme *přípustným* (ve smyslu Górniewicze), jestliže je konečnou kompozicí acyklických zobrazení.

Schematicky můžeme vztahy mezi uvažovanými třídami zobrazení znázornit takto:

$$\{\text{acyklická zobrazení}\} \subset \{\text{přípustná zobrazení}\} \subset \{\text{M-zobrazení}\},$$

kde obě inkluze jsou vzhledem k následujícím příkladům ostré.

Příklad 4 (přípustné neacyklické zobrazení)**.** Příkladem přípustného zobrazení, které není acyklické, je kompozice $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi\colon S^1 \to S^1$, kde $\varphi(x) := \{y \in S^1\colon |x - y| \leqq \sqrt{3}\}$ a $S^1 := \{\mathrm{e}^{2\pi s\,\mathrm{i}}\colon s \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$, neboť $\varphi(\varphi(x)) = S^1$ pro každé $x \in S^1$. Přitom samotné zobrazení φ je acyklické.

Příklad 5 (nepřípustné M-zobrazení)**.** Příkladem M-zobrazení, které není přípustné, je $\varphi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \multimap \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kde

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} \pmod 1 & \text{pro } x \in (0, 1),\\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \text{pro } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Kdyby totiž přípustné bylo, pak by bylo možné aproximovat φ na grafu $\Gamma_\varphi := \{(x, y)\colon y \in \varphi(x)\}$ s libovolnou přesností jednoznačnou spojitou funkcí tvaru $\tau \circ f$ tak, že stupeň d obou zobrazení φ a $\tau \circ f$ je konstantní, konečný a shodný pro všechna $x \in [0, 1]$ (viz např. [4], lemma 3.4), tj.

$$|d| = |\deg(\varphi)| = |\deg(\tau \circ f)| = |f(x + 1) - f(x)| < \infty.$$

Například (jednoznačná) funkce $\tau \circ f$, kde

$$f(x) := \begin{cases} 1 + \dfrac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2} x & \text{pro } x \in [0, \varepsilon),\\ \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \in [\varepsilon, 1),\\ 1 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

se dokonce shoduje s M-zobrazením φ pro každé $x \in [\varepsilon, 1)$ a libovolné dostatečně malé $\varepsilon > 0$, avšak

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} f(1) - f(\varepsilon) = 1 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} = -\infty,$$

což pro přípustné zobrazení nemůže nastat. Navíc f přestává být pro $\varepsilon = 0$ funkčním předpisem v bodě $x = 0$.

Definice 2. Nechť $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ je M-zobrazení. Posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, nazveme *k-orbitou* příslušnou k φ, jestliže $x_{i+1} \in \varphi(x_i)$ pro $i < k-1$, $x_0 \in \varphi(x_{k-1})$ a současně neexistuje žádné přirozené $m < k$ takové, že $m|k$ (m dělí beze zbytku k) a $x_{sm+i} = x_i$ pro $i < m$, $s < \dfrac{k}{m}$. *Primární k-orbitou* vzhledem k φ nazveme takovou k-orbitu $\{x_i\}_{i=0}^{k-1}$ zobrazení φ, pro kterou navíc platí, že $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$, kde $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Příklad 6. Příkladem neprimární k-orbity mnohoznačného zobrazení $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ je např. posloupnost $\{\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{(k-1)\text{-krát}}, x_1\}$, pokud $x_0 \neq x_1$ a $x_0, x_1 \in \varphi(x_0)$, $x_0 \in \varphi(x_1)$.
Pro primární k-orbitu $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ zobrazení $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ totiž musí platit, že $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$, kde $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

K tomu, abychom mohli zformulovat analogii věty 1 pro mnohoznačná zobrazení, potřebujeme zobecnit pojem stupně. Lze přitom využít tzv. Lefschetzovo číslo zobrazení (viz např. [10], kap. I.6), jehož definice je však poměrně složitá. Čtenáři, kteří nejsou s tímto pojmem obeznámeni, se mohou spokojit s konstatováním, že pro jednoznačná zobrazení je následující definice ekvivalentní s definicí uvedenou v tvrzení 1.

Definice 3. Nechť $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ je přípustné zobrazení. *Stupeň* $\deg(\varphi) \in \mathbb{Z}$ tohoto zobrazení můžeme definovat rovností $\deg(\varphi) = 1 - \lambda(\varphi)$, kde $\lambda(\varphi)$ je Lefschetzovo číslo zobrazení φ.

3. Věty Šarkovského typu pro mnohoznačná zobrazení

V práci [4] jsme vyslovili úplnou mnohoznačnou analogii věty 1 pro přípustná zobrazení stupně d, kde $|d| > 1$, avšak v termínech tzv. ireducibilních periodických orbit koincidencí. Tento pojem je obecnější než periodická orbita zavedená v definici 2 a ve zmíněné větě jej nelze nahradit, což je v článku [4] doloženo příklady.

Pokud jsou však zobrazení a všechny jeho iterace acyklické, pak lze tvrzení zmíněné věty z [4] zesílit pro periodické orbity následovně:

Věta 4 (J. Andres, 2017)**.** *Nechť $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ a všechny jeho iterace $\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-krát}}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou acyklická zobrazení, tj. grafy*

$$\Gamma_{\varphi^n} := \{(x, y) \in S^1 \times S^1\colon y \in \varphi^n(x)\},\ \ n \in \mathbb{N},$$

jsou uzavřenými množinami a $\varphi^n(x) \neq S^1$, $n \in \mathbb{N}$, pro všechna $x \in S^1$, a nechť $d = \deg(\varphi)$ je stupeň zobrazení φ. Jestliže $d > 1$ nebo $d < -2$, pak má φ k-orbitu pro každé $k \in \mathbb{N}$. Pro $d = -2$ má φ k-orbitu pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, přičemž φ může (ale nemusí) mít také 2-orbitu. Jestliže $d = 0$ nebo $d = -1$, pak má φ alespoň pevný bod.

Pro M-zobrazení lze dále vyslovit následující analogii věty 3 (viz [9], [11], [12], [13]).

Věta 5 (J. Andres, K. Pastor, 2019). *Nechť* $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ *je M-zobrazení mající pevný bod a* n*-orbitu, kde* $n = 2^m \cdot q > 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* q *je liché přirozené číslo. Pak platí alespoň jedna z možností:*

(i) *pro každé přirozené* $k > n$ *existuje i* k*-orbita zobrazení* φ*,*

(ii) *pro každé přirozené* k *s vlastností* $n \rhd k$ *existuje s nanejvýš dvěma výjimkami pro* $k = 2^{m+1}$*, nebo pro* $k \in \{2^{m+2}, 2^{m+1} \cdot 3\}$ *i* k*-orbita zobrazení* φ*.*

Jestliže je n *sudé a maximální vzhledem k Šarkovského uspořádání přirozených čísel (viz Šarkovského věta* 2*), pak nastane pouze možnost* (ii)*.*

Důsledek 2 (J. Andres, J. Fišer, 2017). *Nechť* $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ *je M-zobrazení mající 3-orbitu a pevný bod. Pak pro každé* $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$*, nebo (ne však současně) pro každé* $k \in \mathbb{N} \setminus \{4, 6\}$ *existuje* k*-orbita vzhledem k* φ*.*

Jelikož každé přípustné (a speciálně také acyklické) zobrazení je M-zobrazení, je zřejmé, že věta 5 a důsledek 2 nabývají vzhledem k větě 4 a jejímu zobecnění v [4] na významu pro přípustná zobrazení $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ stupně $d \in \{-1, 0, 1\}$. Pro přípustná zobrazení stupně $d = 0$ nebo $d = -1$ lze ve větě 5 a důsledku 2 vynechat předpoklad o existenci pevného bodu.

Poněvadž můžeme absenci 2-orbit, nebo 4-orbit a 6-orbit v důsledku 2 doložit konkrétními příklady, a to i v podtřídě acyklických zobrazení (viz [9], [13]), nelze důsledek 2 za daných předpokladů vylepšit.

Věta 6 (J. Andres, K. Pastor, 2019). *Nechť platí předpoklady věty* 5 *a nechť je* n *navíc maximální vzhledem k Šarkovského uspořádání přirozených čísel (viz věta* 2*). Pak platí alespoň jedna z možností:*

(i) *pro každé přirozené* $k > n$ *existuje i* k*-orbita zobrazení* φ*,*

(ii) *pro každé přirozené* k *s vlastností* $n \rhd k$ *existuje i* k*-orbita zobrazení* φ *s nanejvýš dvěma výjimkami danými následovně:*

   (a) *pro* $q > 3$ *nemusí existovat* k*-orbita, kde* $k = 2^{m+2}$*,*

   (b) *pro* $q = 3$ *nemusí existovat* k*-orbita, kde buď* $k = 2^{m+1}$*, nebo* $k \in \{2^{m+2}, 2^{m+1} \cdot 3\}$*,*

   (c) *pro* $q = 1$ *výjimka nenastane.*

Varianta (ii) ve větě 6 je úplnou analogií verze pro intervalová zobrazení, pro něž však není potřeba předpokládat existenci pevného bodu (viz [14]).

4. Aplikace na diferenciální rovnice

Uvažujme znovu rovnici (1), avšak tentokrát bez podmínky jednoznačnosti. Poincarého operátor $T_n = T_1^n$ definovaný vztahem (2), jakož i jeho projekce $\hat{T}_n \circ \tau = \tau \circ T_n$, se tak stanou mnohoznačnými zobrazeními, tj. $T_n\colon \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ a $\hat{T}_n\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \multimap \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Faktorizace $\hat{T}_n$ operátoru T_n je přípustná ve výše uvedeném smyslu (viz např. [10], kap. I.4 a III.3). Poněvadž $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je kompaktní množina, má $\hat{T}_n$ uzavřený graf $\Gamma_{\hat{T}_n} :=$

$:= \{(x, y): y \in \hat{T}_n(x)\}$ a kompaktní, souvislé množiny hodnot. Navíc lze snadno dokázat (viz např. [7]), že stupeň $\deg(\hat{T}_n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však, bohužel, znamená, že větu 4 nelze aplikovat na diferenciální rovnice za účelem důkazu koexistence periodických řešení s různými periodami, a to ani v případě porušení podmínky jednoznačnosti.

Připomeňme zde, že k-periodická (mod 1) řešení rovnice (1) se nazývají v případě $k = 1$ *harmonická*; jinak (tj. pro $k > 1$) se nazývají *subharmonická*.

Přestože neexistuje vzájemně jednoznačný vztah mezi k-periodickými (mod 1) řešeními rovnice (1) a k-orbitami faktorizace $\hat{T}_1$ příslušného Poincarého operátoru T_1, definovaného vztahem (2), platí, že každá k-orbita $\hat{T}_1$ implikuje existenci k-periodického (mod 1) řešení rovnice (1), a obráceně, že ke každému k-periodickému (mod 1) řešení x rovnice (1) existuje bod $t_0 \in [0, 1]$ a k-orbita $\hat{T}_1$, určená bodem $x(t_0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tato korespondence je za daným účelem dostatečná pro aplikaci vět 5 a 6.

Věty 5 a 6 lze aplikovat na rovnici (1) ve dvou variantách. První varianta se týká rovnice (1), uvažované přímo na prostoru $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (viz [9], [11], [12], [13]).

Věta 7 (J. Andres, K. Pastor, 2019). *Nechť má rovnice* (1) *na prostoru* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 1-*periodické řešení a n-periodické řešení, kde $n = 2^m \cdot q > 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a q je liché přirozené číslo. Pak má* (1) *pro každé přirozené k také k-periodické řešení, tj.* $x(t) \equiv x(t + k)$ (mod 1) *a* $x(t) \not\equiv x(t + j)$ (mod 1) *pro všechna přirozená $j < k$, kde buď* (i) $k > n$, *nebo* (ii) $n \rhd k$ *a* $k \neq 2^{m+1}$, *nebo* $k \notin \{2^{m+2}, 2^{m+1} \cdot 3\}$. *Je-li n maximální vzhledem k Šarkovského uspořádání přirozených čísel (viz věta* 2*), pak má rovnice* (1) *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *také k-periodické řešení, kde buď* (i) $k > n$, *nebo* (ii) $n \rhd k$ *s nanejvýš dvěma výjimkami, které lze určit stejně jako ve větě* 6.

Druhá varianta (viz [9], [11], [12], [13]) využívá korespondenci mezi tzv. derivo-periodickými subharmonickými řešeními rovnice (1) na původním prostoru $\mathbb{R}$ a orbitami příslušného operátoru $\hat{T}_1$ na $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Připomeňme, že rovnice (1) má *k-derivo-periodické řešení* $x(\cdot)$, jestliže platí $x'(t) \equiv x'(t + k)$ a $x'(t) \not\equiv x'(t + j)$ pro všechna přirozená $j < k$ (viz např. [8], [22], kap. 5.3).

Věta 8 (J. Andres, K. Pastor, 2019). *Nechť má rovnice* (1) *na prostoru* $\mathbb{R}$ 1-*derivo-periodické řešení a n-derivo-periodické řešení, kde $n = 2^m \cdot q > 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a q je liché přirozené číslo. Pak má* (1) *pro pro každé přirozené k také k-derivo-periodické řešení, kde buď* (i) $k > n$, *nebo* (ii) $n \rhd k$ *a* $k \neq 2^{m+1}$, *nebo* $k \notin \{2^{m+2}, 2^{m+1} \cdot 3\}$. *Je-li n maximální vzhledem k Šarkovského uspořádání přirozených čísel (viz věta* 2*), pak má rovnice* (1) *pro stejná* $k \in \mathbb{N}$ *jako ve větě* 7 *také k-derivo-periodická řešení.*

Za dodatečného předpokladu o speciálním tvaru derivo-periodického subharmonického řešení lze větu 8 výrazně zesílit následovně (viz [9]).

Věta 9 (J. Andres, J. Fišer, 2017). *Nechť pro nějaké přirozené* $n > 1$ *existuje n-derivo-periodické řešení rovnice* (1) *tvaru* $x(t) = x_0(t) + \alpha(t - t_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, *kde* $x_0(t) \equiv x_0(t + n)$ *a* $x_0(t) \not\equiv x_0(t + m)$ *pro všechna přirozená* $m < n$. *Pak pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *existuje rovněž k-derivo-periodické řešení rovnice* (1).

Splnitelnost předpokladů věty 9 můžeme doložit následujícím příkladem.

Příklad 7. Uvažujme nejprve skalární diferenciální rovnici

$$x' = f(x) + p(t), \tag{3}$$

kde

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x) & \text{pro } x \in [-1, 1], \\ f_0(|x| - \lfloor |x| \rfloor) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \end{cases}$$

symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celočíselnou část daného čísla,

$$f_0(x) := \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{pro } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ \sqrt{||x| - 1|} & \text{pro } |x| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$p(t) := -\frac{1}{8\pi} |\arcsin(\sin \pi t)|.$$

Je zřejmé, že $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité 1-periodické funkce, tj. $f(x) \equiv \equiv f(x+1)$ a $p(t) \equiv p(t+1)$. Např. metodou horních a dolních řešení lze dokázat existenci 1-periodického řešení x_1 a 3-periodického řešení x_3 rovnice (3), což bylo potvrzeno numerickou simulací v článku [9]. Graf Poincarého operátoru příslušného k rovnici (3) byl na intervalu $[-1, 1]$ znázorněn v našem článku [2].

Nyní uvažujme jednoparametrickou třídu rovnic

$$x' = f(x - \alpha t) + p(t) + \alpha, \tag{4}$$

kde funkce f, p jsou definovány stejně jako u rovnice (3) a $\alpha \in \mathbb{Z}$ je celočíselný parametr. Pro každou spojitou funkci $F_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde $F_\alpha(t, x) := f(x - \alpha t) + p(t) + + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, evidentně platí, že $F_\alpha(t, \cdot) \equiv F_\alpha(t, \cdot + 1)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a současně $F_\alpha(\cdot, x) \equiv F_\alpha(\cdot + 1, x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dále se lze snadno přesvědčit, že pro každé pevně zvolené $\alpha \in \mathbb{Z}$ má rovnice (4) 1-periodické (mod 1) řešení tvaru $x_1(t) + \alpha t$ a 3-periodické (mod 1) řešení tvaru $x_3(t) + + \alpha t$, kde x_1 a x_3 jsou zmíněná řešení rovnice (3).

Předpoklady věty 9 jsou tedy pro rovnici (4) opravdu splněny, čímž také platí její tvrzení.

5. Závěrečné poznámky

Pro vážné zájemce o další studium si dovolíme připojit ještě několik závěrečných poznámek.

Pro spojitá zobrazení stupně 1 odvodil Zhao (viz [30]) pomocí tzv. relativní Nielsenovy teorie (viz např. [18], kap. III.18) další cennou větu typu Šarkovského–Liho a Yorka ($m = 3$). Její formulace a pochopení však přesahují rámec našeho zadání.

Pokud alespoň ve dvou bodech $x_1, x_2 \in S^1$, $x_1 \neq x_2$, nastane rovnost $\varphi(x_1) = = \varphi(x_2) = S^1$, pak k-periodické orbity M-zobrazení $\varphi\colon S^1 \multimap S^1$ evidentně existují pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pokud existuje alespoň jeden bod $x_0 \in S^1$ takový, že $\varphi(x_0) = S^1$, pak je tento bod pevný, tj. $x_0 \in \varphi(x_0)$, čímž je splněn jeden z předpokladů vět 5 a 6. Jestliže M-zobrazení φ nemá pevný bod, pak musí být acyklické stupně 1.

Platnost vět 7, 8 a 9 lze rozšířit nejen na carathéodoryovské diferenciální rovnice tvaru (1), ale i na skalární obyčejné shora-carathéodoryovské diferenciální inkluze, tj.

$$x' \in F(t, x), \text{ kde } F(t, x) \equiv F(t+1, x) \equiv F(t, x+1), \tag{5}$$

přičemž $F\colon \mathbb{R}^2 \multimap \mathbb{R}$ je mnohoznačná funkce s konvexními a kompaktními množinami hodnot (tj. kompaktními intervaly nebo body), $F(\cdot, x)\colon \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ je pro každou hodnotu $x \in \mathbb{R}$ měřitelná (tj. $\{t \in [0, 1]\colon F(\cdot, x) \subset U\} \in \mathcal{U}$ pro každé otevřené $U \subset \mathbb{R}$, kde $\mathcal{U}$ je σ-algebra podmnožin $[0, 1]$) a $F(t, \cdot)\colon \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ je pro skoro všechna $t \in \mathbb{R}$ polospojitá shora (tj. pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}$ je množina $\{x \in \mathbb{R}\colon F(t, x) \subset U\}$ otevřená v $\mathbb{R}$). Je-li $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jednoznačná shora-carathéodoryovská funkce v uvedeném smyslu, pak je automaticky carathéodoryovská.

Například poslední větu 9 lze zobecnit následovně (viz [9]).

Věta 10 (J. Andres, J. Fišer, 2017)**.** *Nechť pro nějaké přirozené $n > 1$ existuje carathéodoryovské (tj. absolutně spojité) n-derivo-periodické řešení inkluze* (5) *tvaru $x(t) = x_0(t) + \alpha(t - t_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, kde $x_0(t) \equiv x_0(t+n)$ a $x_0(t) \not\equiv x_0(t+m)$ pro všechna přirozená $m < n$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje rovněž carathéodoryovské (tj. absolutně spojité) k-derivo-periodické řešení $\tilde{x}(\cdot)$ inkluze* (5)*, tj. $\tilde{x}'(t) = \tilde{x}'(t+k)$ pro skoro všechna $t \in \mathbb{R}$ a přitom neexistuje přirozené $j < k$ takové, že $\tilde{x}'(t) = \tilde{x}'(t+j)$ pro skoro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Je otázkou, zda je možné ve větách 9 a 10 vynechat předpoklad o předepsaném tvaru derivo-periodického subharmonického řešení. V kladném případě by se jednalo o zásadní zobecnění vět 7 a 8.

Námi byly také odvozeny tzv. randomizované verze vět 1 a 4 (viz [6]), věty 3 (viz [5]), vět 5, 6, 7, 8 (viz [13]) a vět 9 a 10 (viz [9]). Je zajímavé, že randomizací deterministických výsledků mohou být eliminovány některé absence orbit. Například v randomizované verzi důsledku 2 již nefigurují absentující náhodné 6-orbity.

L i t e r a t u r a

[1] Alsedà, L., Llibre, J., Misiurewicz, M.: *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one.* 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2000.

[2] Andres, J.: *Šarkovského věta a diferenciální rovnice.* PMFA 49 (2004), 151–159.

[3] Andres, J.: *Šarkovského věta a diferenciální rovnice, II.* PMFA 56 (2011), 143–149.

[4] Andres, J.: *On the coexistence of irreducible orbits of coincidences for multivalued admissible maps on the circle via Nielsen theory.* Topology Appl. 221 (2017), 596–609.

[5] Andres, J.: *Randomization of Sharkovsky-type results on the circle.* Stoch. Dyn. 17 (2017), 1–21.

[6] Andres, J.: *Randomized Sharkovsky-type theorems and their application to random impulsive differential equations and inclusions on tori.* Stoch. Dyn. 19 (2019), 1–30.

[7] Andres, J.: *Coexistence of periodic solutions with various periods of impulsive differential equations and inclusions on tori via Poincaré operators.* Topology Appl. 255 (2019), 126–140.

[8] Andres, J., Bednařík, D., Pastor, K.: *On the notion of derivo-periodicity.* J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 405–417.

[9] Andres, J., Fišer, J.: *Sharkovsky-type theorems on S^1 applicable to differential equations.* Internat. J. Bifur. Chaos. 27 (2017), 1–21.

[10] Andres, J., Górniewicz, L.: *Topological fixed point principles for boundary value problems.* Kluwer, Dordrecht, 2003.

[11] Andres, J., Pastor, K.: *Block–Sharkovsky type theorem on the circle applicable to differential equations and inclusions.* Internat. J. Bifur. Chaos 28 (4) (2018), 1850056, 1–11.

[12] Andres, J., Pastor, K.: *A multivalued version of the Block–Sharkovsky theorem applicable to differential equations on the circle.* Internat. J. Bifur. Chaos 28 (11) (2018), 1–15.

[13] Andres, J., Pastor, K.: *Sharp Block–Sharkovsky type theorem for multivalued maps on the circle and its application to differential equations and inclusions.* Internat. J. Bifur. Chaos (2019), v tisku.

[14] Andres, J., Pastor, K., Šnyrychová, P.: *A multivalued version of Sharkovskii's theorem holds with at most two exceptions.* J. Fixed Point Theory Appl. 2 (2007), 153–170.

[15] Bernhardt, C.: *Periodic orbits of continuous mappings of the circle without fixed points.* Ergodic Theory Dynam. Systems 1 (1981), 413–417.

[16] Block, L.: *Periods of periodic points of maps of the circle which have a fixed point.* Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 481–486.

[17] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., Young, L.-S.: *Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps.* In: Z. Nitecki, C. Robinson (eds.): Global Theory of Dynamical Systems, Lect. Notes in Math. 819, Springer, Berlin, 1980, 18–34.

[18] Brown, R. F., Furi, M., Górniewicz, L., Jiang, B. (eds.): *Handbook of topological fixed point theory.* Springer, Berlin, 2005.

[19] Coddington, E. A., Levinson, N.: *Theory of differential equations.* McGraw-Hill, New York, 1955.

[20] Denjoy, A.: *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore.* J. Math. Pures Appl. 11 (1932), 333–376.

[21] Efremova, L. S.: *Periodičeskije orbity i stěpeň nepreryvnogo otobraženija okružnosti.* Dif. Integr. Urav. (Gor'kii) 2 (1978), 109–115.

[22] Farkas, M.: *Periodic motions.* Springer, Berlin, 1994.

[23] Hasselblatt, B., Katok, A.: *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[24] van Kampen, E. R.: *The topological transformations of a simple closed curve into itself.* Amer. J. Math. 57 (1935), 142–152.

[25] Katok, A., Hasselblatt, B.: *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[26] Misiurewicz, M.: *Periodic orbits of maps of degree one of a circle.* Ergodic Theory Dynam. Systems 2 (1982), 221–227.

[27] Poincaré, H.: *Sur les courbes définies par les équations différentielles (iii).* J. Math. Pures Appl. 1 (1885), 167–244.

[28] SIEGBERG, H. W.: *Chaotic mappings on S^1, periods one, two, three imply chaos on S^1.* In: Proc. Conf. Numerical solutions of nonlinear equations (Bremen, 1980), Lect. Notes in Math. 878, Springer, Berlin, 1981, 351–370.

[29] ŠARKOVSKIJ, A. N.: *Sosuščestvovanije ciklov nepreryvnogo otobraženija prjamoj v sebja.* Ukrain. Matem. Žurn. 1 (1964), 61–71.

[30] ZHAO, X.: *Periodic orbits with least period three on the circle.* Fixed Point Theory Appl. (Article ID 194875) (2008), 1–8.