

Petr Stehlík

Matematika za karetní hrou dobble

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 64 (2019), No. 2, 69–90

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/147801>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2019

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Matematika za karetní hrou dobble

Petr Stehlík

Abstrakt. V tomto článku se zabýváme návazností populární karetní hry dobble na kombinatorické struktury. Ukazujeme, že existence dokonalých balíčků karet souvisí s existencí konečných projektivních rovin a systémů ortogonálních latinských čtverců. Dále pomocí obecnější struktury, blokových schémat, diskutujeme možnosti vytváření balíčků karet pro hry s modifikovanými pravidly. Výklad, příklady i přílohy jsou uzpůsobeny tomu, aby si čtenář mohl relativně jednoduše vytvořit vlastní karetní systémy.

1. Úvod

Dobble je jednoduchá karetní hra testující postřeh a vnímavost. Její velká popularita se opírá o jednoduchost pravidel a rychlý a zábavný průběh, nezávisle na věku či vzdělání hráčů. Nejběžnější verze se skládá z 55 karet, z nichž každá obsahuje 8 z 57 použitých obrázků.

V základní variantě (s názvem pekelná věž) si každý hráč před sebe položí jednu kartu, zbylý balíček se umístí mezi hráče na stůl. Každý se následně snaží najít společný obrázek karty na vrcholu balíčku a své karty. Pokud název tohoto symbolu vysloví jako první, bere si hráč kartu z vrcholu balíčku a hra pokračuje s nově odkrytou společnou kartou. Vítězí hráč, který v okamžiku vyčerpání balíčku nashromáždil nejvíce karet. Kromě této varianty hry obsahuje návod další čtyři verze, které se ale vždy opírají o jednoduchý princip, že každé dvě karty mají jeden společný symbol.

Podle stránek vydavatele (www.dobble.cz) myšlenka hry dobble vznikla v roce 1976, kdy si mladý Francouz Jacques Cottereau na základě populárního článku o využití blokových schémat v návrzích statistických experimentů (více např. [12]) vytvořil systém 31 karet s 6 hmyzími obrázky. Komerční úspěch zaznamenala hra až o 32 let později díky jeho vzdálenému příbuznému a novináři Denisi Blanchotovi. Od roku 2009 do současnosti se dobble drží na vrcholu žebříčků prodejnosti společenských her po celém světě. Existuje v mnoha variantách, pro různé počty symbolů (6 nebo 8 na kartě) a různé množiny obrázků (zvířata, hrdinové Star Wars, atd.).

Cílem tohoto článku je rozkrýt vazbu karetního systému na zmíněná blokovaná schémata a další kombinatorické objekty (konečné projektivní roviny, latinské čtverce) a poskytnout čtenáři návod pro vytvoření vlastního karetního systému.

Vazba kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti na tvorbu strategií u karetních a společenských her je dobře známá [13]. Kombinatorika se také přímo užívá pro vytváření hlavolamů, jako je sudoku [8], či celých karetních systémů, jak ukážeme v tomto článku.

Naší snahou je krátký a úzce cílený vhled do rozsáhlého světa kombinatorických schémat. Pokusíme se o objasnění vazby na karetní systémy dobble a poskytnutí návodu na vytvoření karet z vlastních symbolů. Odborníky na kombinatoriku, statistiku,

Doc. RNDr. PETR STEHLÍK, Ph.D., Katedra matematiky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, e-mail: pstehlik@kma.zcu.cz

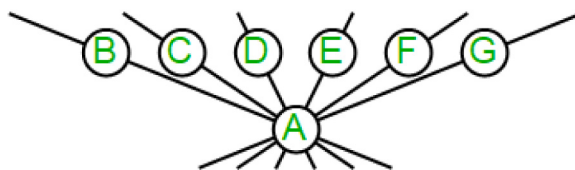
konečné geometrie apod. prosíme o shovívavost a porozumění, protože za tímto účelem mírně pozměníme běžně užívané značení i standardní důkazy a opomineme mnohé důležité vazby zmiňovaných objektů na další koncepty z teorie grafů, algebry, statistiky a geometrie. Pro ty, kteří se naopak s těmito koncepty setkávají poprvé a rádi by se o nich dozvěděli více, doporučujeme literaturu zabývající se blokovými schématy [4], [11], [17]. Inspirací autora k sepsání tohoto článku byl, kromě nesčetných proher s dětmi předškolního věku, populární článek [15].

2. Konečné projektivní roviny a dobble

Pokusme se velmi naivním způsobem vytvořit jednoduchý karetní systém. Uvažujme libovolnou konečnou množinu symbolů S a pokusme se najít množinu $m \in \mathbb{N}$ karet $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\} \subset 2^S$. Základní princip dobble zaručující, že každé dvě karty mají jediný společný symbol, vyjádříme matematicky:

- (A1) každé dvě množiny (karty) $K, L \in \mathcal{K}$ mají společný právě jeden symbol, tj. $|K \cap L| = 1$.

Pokud si pro ilustraci za symboly zvolíme např. sedm prvních písmen abecedy $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, pak axiom (A1) splňuje i konfigurace z obr. 1 s $\mathcal{K} = \{AB, AC, AD, AE, AF, AG\}$.



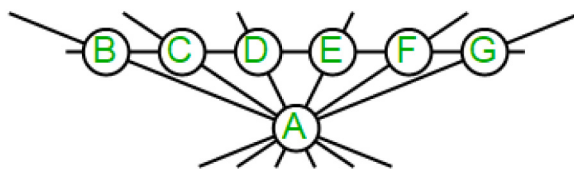
Obr. 1. Konfigurace splňující (A1) s $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ a $\mathcal{K} = \{AB, AC, AD, AE, AF, AG\}$. Karty jsou naznačeny přímkami, které spojují symboly

Hra s těmito kartami by jistě zábavná nebyla, společným symbolem je vždy písmeno A . Systém karet z obr. 1 lze zúplnit přidáním dalších karet například tak, abychom libovolnou dvojici symbolů našli na jediné kartě:

- (A2) pro každé dva symboly $s, t \in S$ existuje právě jedna množina (karta) $K \in \mathcal{K}$, pro kterou $s, t \in K$.

Jednoduchá konfigurace rozšiřující systém z obr. 1, která je zobrazena na obr. 2, sice splňuje (A1)–(A2), ale pořád není optimálně vyvážená. Některé symboly (písmeno A) se vyskytují na více kartách než ostatní a karty nemají stejný počet symbolů (6 karet má 2 symboly a jedna karta má symbolů 6). Abychom zabránili hromadění symbolů na kartách a zaručili jejich vyváženější rozdělení, přidejme následující poslední požadavek:

- (A3) existuje množina čtyř symbolů $M \subset S$, z nichž žádné tři se nevyskytují na stejné kartě, tj. $|M \cap K| \leq 2$ pro všechny karty $K \in \mathcal{K}$.



Obr. 2. Konfigurace splňující (A1)–(A2) s $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ a $\mathcal{K} = \{AB, AC, AD, AE, AF, AG, BCDEFG\}$

Jak uvidíme vzápětí, axiomy (A1)–(A3) nám nejen zaručí symetrii a vyváženost karet, ale jsou velmi úzce svázány s významným kombinatorickým objektem – konečnou projektivní rovinou.

Definice 1. Mějme konečnou množinu symbolů S a množinu některých jejích podmnožin (karet) $\mathcal{K} \subset 2^S$. Uspořádanou dvojici (S, \mathcal{K}) nazýváme *konečnou projektivní rovinou*, splňuje-li axiomy (A1)–(A3).

Zmiňme stručně původ názvu této kombinatorické struktury, který je odvozen od úzké analogie s geometrií.

Poznámka 2. V teorii konečných projektivních rovin se místo symbolů a karet obvykle hovoří o bodech a přímkách [4], [11], [17]. Pro účel této poznámky nazýváme S množinou bodů a \mathcal{K} množinou přímek. Axiom (A1) pak jednoduše požaduje, aby se každé dvě přímky protínaly právě v jednom bodě. Axiom (A2) lze interpretovat tak, že každé dva body leží na právě jedné přímce. Konečně axiom (A3) zaručuje geometricky přirozenou podmínku existence čtyř bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce.

Klasická eukleidovská geometrie nesplňuje axiom (A1), rovnoběžné přímky nemají společný bod. Projektivní geometrie ji rozšiřuje tím, že prostor přímek a bodů zúplní zavedením bodů v nekonečnu, které odpovídají průsečíkům rovnoběžných přímek, a dále jedné přímky, na které leží všechny tyto virtuální body tak, aby byl splněn i axiom (A2).

Konečné projektivní roviny jsou kombinatorické objekty, které lze vnímat jako konečněprvkovou verzi projektivních rovin. Nejdůležitějším rozdílem je konečný počet objektů („bodů–symbolů“ i „přímek–karet“), který zdánlivě strukturu zjednodušuje. Přirozená geometrická představa však může být zavádějící, protože existují jednoduché vlastnosti, které u konečných projektivních rovin nemáme. Tou nejdůležitější je absence přirozeného uspořádání „bodů“ (symbolů) na „přímkách“ (kartách).

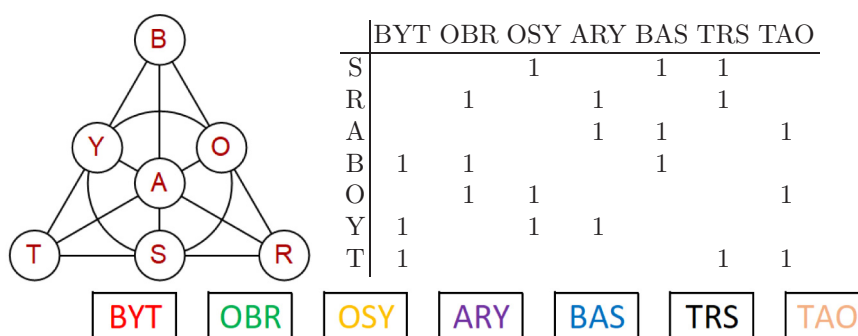
Nejjednodušší konečnou projektivní rovinou¹ je Fanova rovina². Ilustrujme ji rovnou vytvořením jednoduché hry s kartami o třech písmenech.

¹Menší konečná projektivní rovina neexistuje. Jednoduchá vyvážená konfigurace tří symbolů $S = \{A, B, C\}$ a tří karet $\mathcal{K} = \{AB, AC, BC\}$ splňuje axiomy (A1), (A2), ale ne (A3). Existují alternativní definice [7], které považují i takové schéma za konečnou projektivní rovinou.

²Gino Fano (1871–1952) byl italský geometr, student Felixe Kleina v Göttingenu. Lze ho považovat za otce konečných projektivních rovin. Zabýval se i algebraickou geometrií a, současně s Davidem Hilbertem, obecnými otázkami formalizace geometrie.

Příklad 3. Abychom učinili karetní hru zajímavější, nahradme množinu počátečních písmen abecedy množinou sedmi písmen $S = \{S, R, A, B, O, Y, T\}$ a uvažujme sedm karet vytvořených z českých trojpísmenných slov

$$\mathcal{K} = \{BYT, OBR, OSY, ARY, BAS, TRS, TAO\}.$$



Obr. 3. Fanova rovina z příkladu 3 tvořená 7 symboly a 7 kartami vytváří jednoduchou hru tvořenou 7 českými slovy. Vpravo je příslušná incidenční matice, kdy pro přehlednost vynecháváme nuly

Axiomy (A1)–(A3) jsou splněny, neboť každé dvě karty obsahují právě jedno společné písmeno, každá dvě písmena se vyskytují na právě jedné kartě a (A3) je splněno např. zvolením $M = \{S, R, B, Y\}$.

Povšimněme si dále, že počet karet i symbolů je stejný. Navíc každá karta obsahuje právě tři symboly a stejně tak každé písmeno se nachází na právě třech kartách. Nejde o náhodu, podobné vlastnosti má každá konečná projektivní rovina.

Nejprve ukažme, že všechny karty obsahují stejný počet symbolů.

Lemma 4. *Je-li (S, \mathcal{K}) konečná projektivní rovina, pak každé dvě karty $K, L \in \mathcal{K}$ mají stejný počet symbolů $q = |K| = |L|$.*

Důkaz. Naznačme stručně, že musí existovat symbol $s \in S$, který není na kartě K ani L . Vezmeme-li čtyřprvkovou množinu M z (A3), pak buď obsahuje $s \in S \setminus (K \cup L)$ nebo $M = \{t, u, v, w\}$ tak, že $\{t, u\} \subset K$ a $\{v, w\} \subset L$. Následně (A2) zaručuje existenci karet K_1 a K_2 , pro které $\{t, v\} \subset K_1$ a $\{u, w\} \subset K_2$. Z (A1) pak plyne, že existuje právě jeden symbol $s = K_1 \cap K_2$, který díky (A3) nemůže ležet na K ani na L .

Tvrzení poté plyne z faktu, že pro každý symbol $t \in K$ existuje právě jedna karta K_t obsahující s a t , viz (A2). Tato karta K_t musí mít podle (A1) právě jeden společný symbol s L , označme jej $l_t \in L$. Symbolů l_t musí být stejně jako symbolů t , a proto $|K| = |L|$. \square

Díky lemmatu 4 můžeme zavést řád konečné projektivní roviny:

Definice 5. Řádem konečné projektivní roviny je číslo $n = |K| - 1$, kde $K \in \mathcal{K}$ je libovolná karta. Chceme-li zdůraznit řád konečné projektivní roviny, značíme ji $(S, \mathcal{K})_n$.

Fanova rovina z příkladu 3 je projektivní rovina řádu 2. Přirozená otázka, proč není řád projektivní roviny definován přímo jako počet symbolů na kartě $q = |K| = n + 1$, bude zodpovězena vztahem s latinskými čtverci v oddíle 3.

I další pozorování týkající se Fanovy roviny z příkladu 3 jsou obecná. Počet symbolů na kartě je stejný jako počet karet, na kterých se jakýkoli symbol vyskytuje. A dále, celkový počet karet $m = |\mathcal{K}|$ a symbolů $p = |S|$ je vždy stejný.

Věta 6. *Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pak konečná projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$ splňuje:*

1. *každý symbol $s \in S$ je obsažen na právě $q = n + 1$ kartách $K \in \mathcal{K}$,*
2. *$|S| = |\mathcal{K}| = n^2 + n + 1 = q^2 - q + 1$.*

Důkaz. Všimněme si nejdříve, že pro každý symbol $s \in S$ najdeme díky (A3) kartu $K \in \mathcal{K}$ neobsahující s . V množině M z (A3) jsou jistě tři symboly $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ různé od s . Z (A3) plyne, že neleží všechny tři na jedné kartě. Karta $K_{\sigma_1\sigma_2}$ obsahující σ_1, σ_2 a karta $K_{\sigma_1\sigma_3}$ obsahující σ_1, σ_3 mají podle (A1) pouze jeden společný symbol, a to σ_1 . Alespoň jedna z těchto karet následně nemůže obsahovat s a označme ji K .

Dokažme tvrzení (1). Projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$ obsahuje karty s $q = n + 1$ symboly. Protože $|K| = n + 1$, můžeme symboly na K označit s_1, \dots, s_{n+1} a existuje $n + 1$ karet určených dvojicemi s a $s_i \in K$. Symbol s se již na žádné další kartě nevyskytuje, protože by neexistoval společný symbol této karty s K . Proto existuje právě $n + 1$ karet se symbolem s .

Dokažme tvrzení (2). Podobně můžeme uvažovat libovolnou kartu $K \in \mathcal{K}$, která obsahuje $n + 1$ symbolů $K = \{s_1, \dots, s_{n+1}\}$. Z (A3) plyne existence symbolu $s \notin K$. To opět implikuje existenci $n + 1$ různých karet určených dvojicemi s a $s_i \in K$. Každá taková karta obsahuje $n + 1$ symbolů (viz lemma 4), a to vždy s a n různých dalších symbolů, proto

$$|S| = 1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1.$$

□

Poznámka 7. Konečné projektivní roviny jsou struktury s vysokým stupněm symetrie, která nám mj. umožňuje výměnu karet za symboly při zachování (A1)–(A3), této vlastnosti se říká dualita. Pro konečnou projektivní rovinu $(S, \mathcal{K})_n$ vytvoříme duální konečnou projektivní rovinu $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{K}})_n$, kde jako symboly budeme uvažovat množinu původních karet $\tilde{S} = \mathcal{K}$. Každá nová karta $\tilde{K}_s \in \tilde{\mathcal{K}}$ bude tvořena právě všemi kartami \mathcal{K} obsahujícími vždy jeden pevně zvolený symbol $s \in S$. Platí proto, že \tilde{K} a S lze ztotožnit (ve smyslu izomorfismu) a díky uvedeným vlastnostem ve větě 6 je $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{K}})_n$ také konečnou projektivní rovinou.

K počtu symbolů a karet se váže i následující drobná zajímavost.

Poznámka 8. V nejvíce rozšířené prodávané verzi obsahuje dobble 55 karet po 8 symbolech. Dvě karty tedy chybí, není to kompletní a zcela vyvážený karetní systém, protože některé symboly se vyskytují méně často než ostatní. Z pohledu konečných projektivních rovin kvůli dvěma chybějícím kartám není splněna podmínka (A2). Zda je tomu kvůli marketingové vazbě na název hry (55 obsahuje dvě pětky a double znamená francouzsky i anglicky dvojitý), kvůli výrobním důvodům nebo kvůli lepšímu

průběhu některých variant hry (pro 2 i 3 hráče lze spravedlivě rozdělit 54 karet), není zřejmé.

Velký význam pro objasnění vztahu mezi konečnými projektivními rovinami a latinskými čtverci a následně pro konstrukci konečných projektivních rovin (a v našem případě vlastních karetních balíčků dobble) má tzv. incidenční matice \mathcal{I} . Incidenční matice konečné projektivní roviny $(S, \mathcal{K})_n$ je díky větě 6 čtvercová matice řádu $n^2 + n + 1$ (resp. $q^2 - q + 1$). Obsahuje na pozici (i, j) číslo 1, pokud symbol $s_i \in S$ leží na kartě $K_j \in \mathcal{K}$, a číslo 0 v opačném případě. Příklad incidenční matice pro náš nejjednodušší karetní systém českých slov odpovídající Fanově rovině je na obr. 3. Na první pohled je zřejmé, že incidenční matice není určena jednoznačně. Změna pořadí symbolů a karet odpovídá výměně pořadí řádků a sloupců incidenční matice.

V našem výkladu bude hrát speciální roli tzv. *kanonická incidenční matice* \mathcal{I} , u které navíc předpokládáme [14]:

- (I1) symboly s_1, \dots, s_{n+1} leží na kartě K_1 ,
- (I2) symbol s_1 leží na kartách K_1, \dots, K_{n+1} ,
- (I3) symboly $s_{kn+2}, \dots, s_{kn+n+1}$ leží na kartě K_{k+1} pro $k = 1, \dots, n$,
- (I4) symbol s_{k+1} leží na kartách $K_{kn+2}, \dots, K_{kn+n+1}$ pro $k = 1, \dots, n$,
- (I5) podmatice³ $P_{1k} = \mathcal{I}[n+2, \dots, 2n+1 | kn+2, \dots, kn+n+1]$ jsou jednotkové matice řádu n pro $k = 1, \dots, n$,
- (I6) podmatice $P_{k1} = \mathcal{I}[kn+2, \dots, kn+n+1 | n+2, \dots, 2n+1]$ jsou jednotkové matice řádu n pro $k = 2, \dots, n$.

Obecná struktura kanonické incidenční matice je naznačena v tab. 2 a jeden konkrétní příklad, pro Fanovu rovinu českých slov z příkladu 3, je v tab. 1.

Všimněme si, že předpoklady (I1)–(I6) určují matici v tab. 1 až na podmatici $\mathcal{I}[6, 7 | 6, 7]$. Obecně lze kanonickou incidenční matici zapsat ve tvaru zobrazeném v tab. 2. Zásadní roli v ní hrají permutační matice P_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, čtvercové matice řádu n obsahující pouze 0 a 1 s tím, že každý řádek i sloupec obsahuje právě jednu jedničku. Předpoklady (I5)–(I6) zaručují, že platí $P_{1k} = P_{k1} = I_n$ pro $k = 1, \dots, n$, kde I_n označuje jednotkovou matici řádu $n \in \mathbb{N}$. Z toho následně např. plyne, že ostatní permutační matice P_{ij} , $i, j = 2, \dots, n$, již nemohou mít jedničky na diagonálách. Samozřejmou a příjemnou vlastností permutačních matic řádu n je fakt, že je lze popsat pomocí kanonické báze prostoru \mathbb{R}^n

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (1)$$

³Podmatice $A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_l]$ matice A je matice získaná zachováním řádků i_1, \dots, i_k a sloupců j_1, \dots, j_l . Například:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A[1, 2 | 1, 3] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

	BYT	OBR	BAS	OSY	ARY	TAO	TRS
B	1	1	1				
Y	1			1	1		
T	1					1	1
O		1		1		1	
R		1			1		1
S			1	1			1
A			1		1	1	

Tab. 1. Kanonická incidenční matice Fanovy roviny z příkladu 3, srovnej s obr. 3

Proto např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_4 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že otázka existence konečné projektivní roviny řádu n je ekvivalentní s hledáním příslušné kanonické incidenční matice \mathcal{I} z tab. 2, k čemuž stačí najít vhodné permutační matice P_{22}, \dots, P_{nn} . Odpověď na otázku, pro která n to lze, nám objasní fascinující vztah konečných projektivních rovin s latinskými čtverci v následujícím odstavci.

	K_1	K_2	K_3	\dots	K_{n+1}	K_{n+2}	\dots	K_{2n+1}	K_{2n+2}	\dots	K_{3n+1}	\dots	K_{n^2+2}	\dots	K_{n^2+n+1}
s_1	1	1	1	\dots	1										
s_2	1					1	\dots	1							
s_3	1								1	\dots	1				
\vdots	\vdots														
s_{n+1}	1												1	\dots	1
s_{n+2}		1													
\vdots	\vdots														
s_{2n+1}			1				I_n			I_n		\dots		I_n	
s_{2n+2}				1											
\vdots	\vdots			\vdots											
s_{3n+1}					1		I_n			P_{22}		\dots		P_{2n}	
\vdots	\vdots						\vdots								
s_{n^2+2}						1									
\vdots	\vdots					\vdots									
s_{n^2+n+1}						1	I_n			P_{n2}		\dots		P_{nn}	

Tab. 2. Kanonická incidenční matice \mathcal{I} konečné projektivní roviny $(S, \mathcal{K})_n$. Symbolem I_n označujeme jednotkovou matici řádu n a matice P_{jk} představují permutační matice řádu n

3. Latinské čtverce

Mějme n -prvkovou množinu symbolů S . Latinský čtverec⁴ $L_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow S$ je čtvercová matice $n \times n$, pro kterou je každý prvek $s \in S$ obsažen právě v jednom sloupci a jednom řádku. Zvolíme-li například $n = 4$ a množinu prvků $S = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit\}$, pak následující matice je příkladem latinského čtverce řádu 4:

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamond & \heartsuit \\ \spadesuit & \diamond & \heartsuit & \clubsuit \\ \diamond & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit & \diamond \end{pmatrix}.$$

Dva latinské čtverce $L_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow S$, $\tilde{L}_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow T$ jsou ortogonální, pokud pro každou dvojici symbolů $(s, t) \in S \times T$ existuje právě jedna dvojice $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tak, že:

$$(L_n)_{ij} = s \quad \text{a současně} \quad (\tilde{L}_n)_{ij} = t.$$

Následující dva latinské čtverce s množinami symbolů $S = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit\}$ a $T = \{\flat, \sharp, \natural, \flat\}$ jsou ortogonální:

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamond & \heartsuit \\ \spadesuit & \clubsuit & \heartsuit & \diamond \\ \diamond & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \diamond & \spadesuit & \clubsuit \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_4 = \begin{pmatrix} \flat & \sharp & \natural & \flat \\ \sharp & \flat & \flat & \sharp \\ \flat & \sharp & \flat & \sharp \\ \sharp & \flat & \flat & \sharp \end{pmatrix}.$$

Každá dvojice karetního a hudebního symbolu se totiž vyskytuje na právě jedné pozici (i, j) v bimatrici vzniklé spojením L_4 a \tilde{L}_4 :

$$\begin{pmatrix} \clubsuit\flat & \spadesuit\sharp & \diamond\natural & \heartsuit\flat \\ \spadesuit\sharp & \clubsuit\flat & \heartsuit\flat & \diamond\sharp \\ \diamond\flat & \heartsuit\sharp & \clubsuit\flat & \spadesuit\sharp \\ \heartsuit\flat & \diamond\sharp & \spadesuit\flat & \clubsuit\sharp \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom místo karetních a hudebních symbolů použili množiny $S = \{A, B, C, D\}$ a $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, dostali bychom všechny kombinace latinských a řeckých písmen z daných množin, a odtud plyne alternativně používaný název ortogonálních latinských čtverců – *řecko-latinské čtverce*⁵.

⁴Více o latinských čtvercích, včetně mnohých souvislostí s různými oblastmi matematiky, nalezte čtenář v [7], [11], [17].

⁵Převládající označení ortogonální latinské čtverce lze považovat za nešťastné, proto se používají i alternativní názvy jako řecko-latinské či Eulerovy čtverce. Ortogonalita, neboli kolmost, je vlastnost běžně užívaná pro vektory, ale i pro funkce, posloupnosti atd. Její existence je úzce svázána s existencí skalárního součinu ve vektorovém prostoru (eukleidovském či abstraktním prostoru funkcí, posloupností). V případě ortogonálních latinských čtverců nicméně takovýto skalární součin není k dispozici [17].

Příklad 9. Třetím běžně užívaným názvem pro ortogonální latinské čtverce jsou *Eulerovy čtverce*. Podle legendy byl Leonhard Euler⁶ během svého dlouhého působení v Petrohradu požádán Kateřinou Velikou, aby uspořádal 36 důstojníků z 6 pluků a 6 hodnotí (kde každý pluk poskytl po jednom důstojníkovi dané hodnoti) do 6 řad a 6 sloupců tak, aby každá řada a každý sloupec obsahovaly důstojníky všech hodnotí a ze všech pluků.

Ať už je legenda pravdivá nebo není, Euler se problémem zabýval a byl přesvědčen, že řešení neexistuje. Důkaz založený na rozsáhlém systematickém rozboru všech možností však předložil až Gaston Tarry⁷ v roce 1900.

Euler vyslovil dokonce obecnější hypotézu, že neexistují ortogonální latinské čtverce řádu $n = 4k + 2$ pro $k \in \mathbb{N}$. Zde se naopak po téměř 200 letech ukázalo, že tato hypotéza neplatí. Bose a Shrikhande [1] dokázali, že pro $n = 22$ existují ortogonální latinské čtverce a o rok později dokonce [2], že $n = 2, 6$ jsou jediná přirozená čísla, pro která neexistují ortogonální latinské čtverce řádu n .

Podívejme se na Eulerovu hypotézu z jiného úhlu. Označme $N(n)$ maximální počet po dvou ortogonálních latinských čtverců řádu n .⁸ Pak pro $N(n)$ platí následující omezení.

Lemma 10. *Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $1 \leq N(n) \leq n - 1$.*

Důkaz. Alespoň jeden latinský čtverec řádu n lze triviálně zkonstruovat pomocí vektoru $(1, 2, \dots, n)$ a jeho cyklických posunů.

Pro druhou nerovnost uvažujme libovolnou množinu ortogonálních latinských čtverců. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že první řádky všech těchto čtverců obsahují vektor $(1, 2, \dots, n)$. Na pozici $(2, 1)$ tedy nemohou již mít jedničku (aby to byly latinské čtverce) a zároveň žádné dva čtverce na této pozici nemohou mít stejné číslo (aby byly ortogonální). Z toho plyne, že jich může být maximálně $n - 1$. \square

Existence konečné projektivní roviny je úzce svázána s existencí maximálního možného počtu ortogonálních latinských čtverců.

Věta 11. *Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $N(n) = n - 1$ právě tehdy, když existuje konečná projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$.*

Důkaz. Provedeme náznak konstrukčního důkazu pouze pro implikaci zleva doprava, opačná implikace se dokazuje obdobně. Uvažujme opět $S = \{1, \dots, n\}$ a $n - 1$ ortogonálních latinských čtverců L^1, \dots, L^{n-1} řádu n s tím, že jejich prvky označíme $L^k = (l_{ij}^k)$. Bez újmy na obecnosti můžeme opět předpokládat, že první řádky všech

⁶Leonhard Euler (1707–1783) byl jedním z nejvýznamnějších a nejvšestrannějších matematiků všech dob. Kromě nesčetných příspěvků k matematické analýze, kombinatorice i teorii grafů se zabýval i aplikacemi ve fyzice a astronomii [7], [5].

⁷Gaston Tarry (1843–1913) byl francouzským úředníkem v Alžírsku a ve volném čase amatérským matematikem. Jeho rozsáhlý důkaz neexistence řešení Eulerova problému 36 důstojníků ilustruje intenzitu jeho zájmu o kombinatoriku a matematické hlavolamy.

⁸Zatímco např. $N(n) = 2$ znamená, že existují dva ortogonální latinské čtverce řádu n a nenajdeme již trojici po dvou ortogonálních latinských čtverců, vztah $N(n) = 1$ chápeme tak, že neexistuje dvojice vzájemně ortogonálních čtverců. Z příkladu 9 vyplývá $N(6) = 1$.

těchto čtverců obsahují vektor $(1, 2, \dots, n)$. Dokažme nyní, že existuje konečná projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$ tím, že zkonstruujeme její incidenční matici \mathcal{I} .

Pro konstrukci kanonického tvaru incidenční matice (viz tab. 2) je nutné určit permutační matice P_{ij} , $i, j = 2, \dots, n$, které jsou řádu n . Definujme P_{ij} následujícím způsobem pomocí kanonické báze (1) e_1, \dots, e_n prostoru \mathbb{R}^n a prvků ortogonálních latinských čtverců $L^k = (l_{ij}^k)$,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} e_{l_{i1}^{j-1}} \\ e_{l_{i2}^{j-1}} \\ \dots \\ e_{l_{in}^{j-1}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Každá permutační matice je tedy určena jedním řádkem jednoho z ortogonálních čtverců, přičemž první řádky latinských čtverců $(1, 2, \dots, n)$ odpovídají jednotkovým maticím $P_{1j} = I_n$ v druhému řádkovému bloku kanonické incidenční matice v tab. 2 (řádkové bloky jsou odděleny vodorovnými čarami).

Naším cílem je nyní ukázat, že takto zkonstruovaná incidenční matice \mathcal{I} reprezentuje projektivní rovinu splňující axiomy (A1)–(A3).

Soustředme svoji pozornost na axiom (A2) a ukažme, že každé dva symboly leží na právě jedné kartě. Nejprve si všimněme, že první sloupcový blok incidenční matice \mathcal{I} z tab. 2 ukazuje, že symbol s_1 je na právě jedné kartě K_1, \dots, K_{n+1} s libovolným dalším prvkem s_i , $i \neq 1$. Podobně i -tý sloupcový blok naznačuje, že prvek s_i , $i = 2, \dots, n+1$, je na jedné z karet $K_{(i-1)n+2}, \dots, K_{in+1}$ s prvky s_j , $j > n+1$.

Uvažujme nyní zbylé symboly s_i , $i > n+1$. Při značení $i = n(p-1) + q + 1$, $p = 2, \dots, n+1$, $q = 1, \dots, n$, je zřejmé, že každý symbol $s_i \in S$, $i > n+1$, je charakterizován nejen svým pořadím i , ale zároveň řádkovým blokem $p = 2, \dots, n+1$ a pořadím v daném řádkovém bloku $q = 1, \dots, n$. Kanonický tvar incidenční matice a konstrukce (2) zaručují následující vlastnosti:

- symbol s_i , $i = n(p-1) + q + 1$, je na právě jedné kartě s prvky ze stejného řádkového bloku (se stejným p), plyne z konstrukce prvního sloupcového bloku,
- symbol s_i , $i = n(p-1) + q + 1$, je na právě jedné kartě s prvky se stejným pořadím v řádkovém bloku (se stejným q), plyne z konstrukce druhého sloupcového bloku,
- symbol s_i , $i = n(p-1) + q + 1$, je na právě jedné kartě s prvky z ostatních řádkových bloků, které mají zároveň odlišné pořadí v bloku (s různými p i q). Tento fakt plyne přímo z konstrukce (2). Skutečně, pro každé $k, \ell = 1, \dots, n$, $k \neq \ell$, platí
 - pro každé $i = 2, \dots, n$ existuje právě jedno $j = 2, \dots, n$ tak, že (plyne z ortogonality latinských čtverců)

$$P_{ij}[k|1, \dots, n] = e_\ell, \quad \text{a současně} \quad (3)$$

- pro každé $j = 2, \dots, n$ existuje právě jedno $i = 2, \dots, n$, tak, že platí (3) (plyne z faktu, že čtverce jsou latinské).

Následně ortogonalita latinských čtverců zaručuje, že pro všechna $p_1, p_2 = 2, \dots, n+1$, $q_1, q_2 = 1, \dots, n$, $p_1 \neq p_2$ a $q_1 \neq q_2$ existuje právě jedno $j = 2, \dots, n$, pro které

$$P_{p_1-1,j}[q_1|1, \dots, n] = P_{p_2-1,j}[q_2|1, \dots, n],$$

což znamená, že symboly $s_{n(p_1-1)+q_1+1}$ a $s_{n(p_2-1)+q_2+1}$ leží na jediné společné kartě.

Ověření platnosti (A1) je obdobné, v argumentaci stačí jen prohodit řádky za sloupce a opačně. Axiom (A3) lze ověřit např. volbou čtyřprvkové množiny $M = \{s_1, s_2, s_{n+2}, s_{2n+3}\}$. \square

Poznámka 12. Zjištění maximálního počtu vzájemně ortogonálních latinských čtverců $N(n)$ je velmi těžká otázka. Ale pro mocniny prvočísel je známo, že platí $N(p^k) = p^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, a příslušné ortogonální čtverce lze dokonce zkonstruovat pomocí dobře známého algoritmu opírajícího se o konečná tělesa [4]. Tento vztah následně přímo implikuje existenci konečných projektivních rovin pro řády odpovídající mocninám prvočísel. Není známa žádná konečná projektivní rovina řádu n , který není mocninou prvočísla, její existence ale nebyla doposud ani vyloučena. Tab. 3 shrnuje znalosti o $N(n)$ a existenci konečných projektivních rovin. Zajímavostí je fakt, že pro některé hodnoty, např. $n = 9$ nebo $n = 16$, je známo, že existuje dokonce více neizomorfních konečných projektivních rovin [4].

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$N(n)$	1	2	3	4	1	6	7	8	$\in [2, 8]$	10	≥ 5	12	$\in [3, 12]$	≥ 4	15
existence	A	A	A	A	N	A	A	A	N	A	?	A	N	?	A

Tab. 3. Maximální počet ortogonálních latinských čtverců a existence konečných projektivních rovin, na základě [4]. Symboly A, N, ? po řadě odpovídají existenci konečné projektivní roviny, její neexistenci a situaci, kdy není známo, zda konečná projektivní rovina existuje

Z pohledu našeho úzce cíleného výletu do světa konečných projektivních rovin lze přímo tyto výsledky aplikovat na karetní systémy. Dokonale vyvážený dooble lze zkonstruovat pro ty hodnoty n , pro které existuje konečná projektivní rovina řádu n (pro $n = 12$ a $n = 15$ se dosud jedná o otevřený problém).

4. Konstrukce vlastního systému karet

Využijme nyní výsledky z tab. 4 a postup z důkazu věty 11 ke konstrukci vlastního zcela vyváženého systému karet.

řád kon. proj. roviny	n	2	3	4	5	7	8	9	11	13	16
symbolů na kartě	$n+1$	3	4	5	6	8	9	10	12	14	17
počet karet i symbolů	$n^2 + n + 1$	7	13	21	31	57	73	91	133	183	273

Tab. 4. Shrnutí možných zcela vyvážených karetních systémů dooble

Příklad 13. Vygenerujme systém karet se 4 symboly. Uvažujme proto konečné projektivní roviny řádu 3 a následující dva ortogonální latinské čtverce řádu 3:

$$L^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $N(3) = 2$. Věta 11 následně implikuje existenci projektivní roviny řádu 3 s 13 symboly a kartami. Na základě důkazu věty definujeme permutační matice

$$P_{22} = P_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{32} = P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich incidenční matici projektivní roviny

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že každý řádek latinského čtverce určuje právě jednu permutační matici pomocí (2), a tedy každý latinský čtverec určuje permutační matice v jednom sloupcovém bloku. V našem případě L^1 určuje permutační matice v předposledním sloupcovém bloku a L^2 v posledním sloupcovém bloku.

Vezmeme-li si nyní libovolnou množinu 13 symbolů, např. matematických symbolů

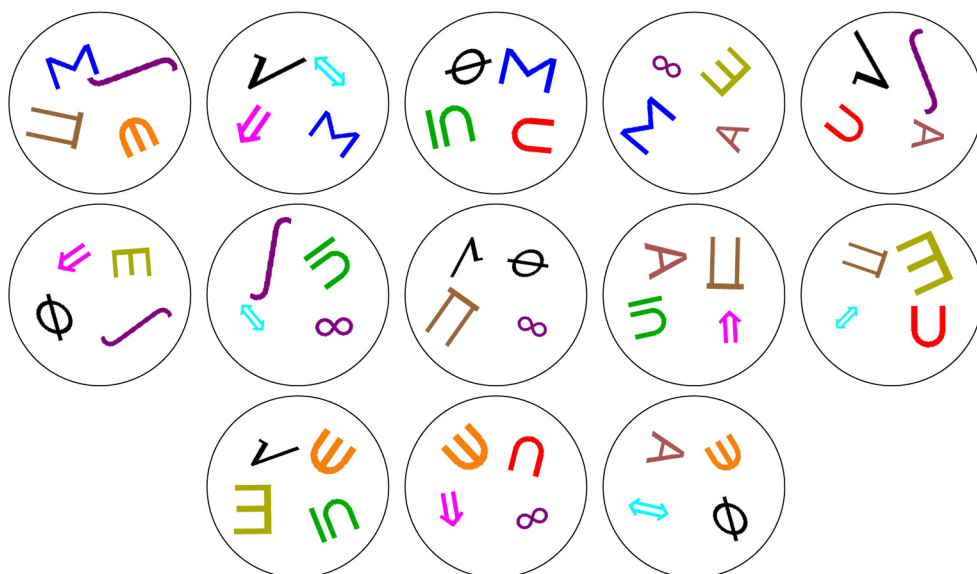
$$S = \{\Sigma, \text{J}, \Pi, \text{E}, \sqrt{}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \text{U}, \emptyset, \subseteq, \forall, \exists, \infty\},$$

dostáváme pomocí incidenční matice \mathcal{I} 13 karet, které jsou na obr. 4.⁹

Obdobným způsobem lze zkonstruovat další systémy karet, viz poznámku 12 a tab. 4. Čtenář, který by chtěl použít vybrané systémy karet, či si sám zkonstruovat svoje vlastní, nalezne v elektronické příloze:

⁹Pro ilustraci důkazu věty 11 doplňme, že např. symbol \exists je dvanáctý v pořadí, tj. $i = 12 = pn + q + 1 = 3n + 2 + 1$, a leží v třetím bloku ($p = 3$) na druhém řádku ($q = 2$). Za čtyřprvkovou množinu, jejíž žádné tři symboly neleží na jedné kartě, lze zvolit např.:

$$M = \{s_1, s_2, s_{n+2}, s_{2n+3}\} = \{\Sigma, \text{J}, \sqrt{}, \emptyset\}.$$



Obr. 4. Karty dobble z matematických symbolů vytvořené v příkladu 13 pomocí vztahu projektivní roviny řádu 3 a ortogonálních latinských čtverců

- systémy $n - 1$ latinských čtverců pro $n = 3, 4, 5, 7, 8, 9$ (konstrukce dalších lze nalézt např. v [4]) v příloze 1,
- kanonické incidenční matice pro konečné projektivní roviny $n = 3, 4, 5, 7, 8, 9$ vytvořené na základě systémů $n - 1$ latinských čtverců v příloze 2,
- systém 31 karet se 31 postavami pokémonů na základě konečné projektivní roviny řádu $n = 5$ (vždy 6 pokémonů na jedné kartě) v příloze 3,
- systém 73 karet se 73 dopravními značkami na základě konečné projektivní roviny řádu $n = 8$ (vždy 9 značek na jedné kartě) v příloze 4,
- systém 91 karet s 91 vlajkami na základě konečné projektivní roviny řádu $n = 9$ (vždy 10 vlajek na jedné kartě) v příloze 5.

5. Blokovaná schémata a karetní systémy

Vztah konečných projektivních rovin a latinských čtverců, který byl popsán v předchozích odstavcích, nám umožnil konstrukci dokonale vyvážených karetních systémů odpovídajících standardním pravidlům karetní hry dobble s počty symbolů shrnutými v tab. 4. Pokusme se nyní vydat jiným směrem a místo zvětšování počtu symbolů vytvořit karetní systémy s obecnějšími pravidly.

Problém 14. Lze vytvořit karetní systémy, kde každé dvě karty mají společné právě dva symboly?

Problém 15. Lze vytvořit karetní systémy, kde každé tři karty mají společný právě jeden symbol?

Kladnou odpověď na obě tyto otázky nám dává kombinatorická struktura zobecnující konečné projektivní roviny, tzv. blokové schéma [4], [11].

Definice 16. Mějme konečnou množinu symbolů S a množinu některých jejích podmnožin (karet) $\mathcal{K} \subset 2^S$. Uspořádanou dvojici (S, \mathcal{K}) nazýváme *blokovým schématem* typu t - (v, k, λ) , pokud

- (a) $|S| = v$,
- (b) každá karta $K \in \mathcal{K}$ má právě k symbolů,
- (c) každá t -tice symbolů z S je obsažena na λ kartách.

Poznámka 17. Zatímco v případě konečných projektivních rovin je terminologie inspirována úzkým vztahem s geometrií (pozn. 2), bloková schémata jsou svázána s návrhem efektivních statistických experimentů [12]. Prvkům množiny S se již obvykle neříká body ale variety (faktory) a kartám $K \in \mathcal{K}$ neodpovídají přímky nýbrž bloky. V případě, že chceme zkoumat vliv v faktorů (vlastností) na zkoumanou veličinu (např. v zemědělství, farmakologii či v průmyslu) ve všech možných kombinacích, dostáváme již pro poměrně malé hodnoty v vysoké počty experimentů, které v praxi nelze uskutečnit. Bloková schémata umožňují efektivně a systematicky redukovat jejich počet.

Příklad 18. Pro ilustraci si představme, že zkoumáme vliv devíti binárních (tj. majících dvě úrovně, např. nízká vs. vysoká, přítomen vs. nepřítomen apod.) faktorů A, B, \dots, I na nějakou veličinu. Může se jednat např. o vliv přítomnosti příměsí A, B, \dots, I na určitou vlastnost výsledné slitiny. Pokud bychom testovali všechny kombinace úrovní 9 faktorů, jednalo by se o $2^9 = 512$ experimentů. Pokud bychom naopak chtěli uvažovat pouze vliv každého faktoru zvlášť, stačilo by nám devět experimentů. Následující blokové schéma typu 2-(9, 3, 1) s dvanácti experimenty ale umožňuje, abychom byli schopni odhadnout nejen vliv každého z faktorů, ale i vliv kombinací (interakcí) faktorů, protože každá dvojice faktorů se vyskytuje v daném návrhu právě jednou:

$$\begin{array}{cccc} ABC & ADG & AEI & AFH \\ DEF & BEH & BFG & BDI \\ GHI & CFI & CDH & CEG \end{array}$$

Důvod, proč jsme jednotlivé trojice faktorů zapsali do sloupců, objasníme později v příkladu 26 a týká se tzv. rozložitelnosti blokových schémat.

Odpověď na základní otázku, zda pro dané parametry t, v, k, λ existuje blokové schéma typu t - (v, k, λ) , je až na speciální třídy blokových schémat netriviální. Následující tvrzení nám pomůže zformulovat přirozené nutné podmínky.

Lemma 19. *Nechť je dáno blokové schéma typu t - (v, k, λ) . Označíme-li $b = |\mathcal{K}|$ celkový počet karet a r počet karet, na kterých se vyskytuje libovolný symbol $s \in S$, pak platí:*

$$b = \lambda \frac{v(v-1) \dots (v-t+1)}{k(k-1) \dots (k-t+1)}, \quad r = \lambda \frac{(v-1) \dots (v-t+1)}{(k-1) \dots (k-t+1)}. \quad (4)$$

Důkaz. Dokažme pouze první vztah, druhý se získá obdobně. Sečteme dvěma různými způsoby počet výskytů N všech t -tic symbolů na všech kartách.

Nejprve si uvědomme, že všech t -tic je $\binom{v}{t}$. Vzhledem k definici 16 (c) se každá t -tice vyskytuje právě na λ kartách, a proto

$$N = \lambda \binom{v}{t}. \quad (5)$$

Díky faktu, že každá karta má k symbolů (viz definici 16 (b)), a obsahuje tedy $\binom{k}{t}$ t -tic, však vidíme, že celkový počet t -tic je i

$$N = b \binom{k}{t}. \quad (6)$$

Srovnáním a úpravou vztahů (5)–(6) dostáváme

$$b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = \lambda \frac{v(v-1) \dots (v-t+1)}{k(k-1) \dots (k-t+1)}.$$

□

Poznámka 20. Vztahy (4) jsou speciálními případy tzv. podmínek celočíselnosti (podmínky integrality), více viz např. [10], [17]. Jedná se o nutné (nikoliv postačující) podmínky existence t -(v, k, λ) blokových schémat. Pokud čísla na pravých stranách vztahů (4) nejsou celá, pak jistě dané blokové schéma neexistuje.

Budeme-li chtít vytvořit karetní systém s pěti symboly ($k = 5$), kde každá dvojice symbolů ($t = 2$) se vyskytuje na dvou kartách ($\lambda = 2$), neboli tvoří 2-($v, 5, 2$) blokové schéma, pak vztahy (4) vedou na

$$b = \frac{v(v-1)}{10}, \quad r = \frac{v-1}{2},$$

a celočíselné kombinace omezí naše hledání pouze na hodnoty $v = 11, 15, 21, 25, 31, \dots$

Poznámka 21. Zřídka se v literatuře [3] používá i označení blokových schémat t -(v, b, r, k, λ) s tím, že daných šest parametrů je svázáno podmínkami (4). Například schéma 2-(9, 3, 1) z příkladu 18 by bylo v tomto názvosloví typu 2-(9, 12, 4, 3, 1), protože $b = 12$ a $r = 4$.

Bloková schémata lze stejně jako konečné projektivní roviny reprezentovat pomocí incidenční matice o rozměrech $v \times b$, tj. matice již nemusí být čtvercová. Například incidenční matice blokového schématu 2-(9, 3, 1) z příkladu 18 má rozměry 9×12 .

Bloková schémata jsou velmi obecná struktura a zahrnují mnoho speciálních případů. Zmíňme stručně některé z nich za účelem lepšího porozumění tomuto pojmu. Zároveň zdůrazněme, že z našeho pohledu karetních systémů jsou mnohé z nich nevhodné, zejména kvůli faktu, že u většiny z nich existují dvě karty $K, L \in \mathcal{K}$, které nemají jediný společný symbol (viz např. libovolné dvě karty z každého sloupce blokového schématu 2-(9, 3, 1) z příkladu 18).

Příklad 22. Jsou-li $v, k \in \mathbb{N}$ takové, že $v = mk$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, pak můžeme rozdělit symboly S na m disjunktních karet K_1, \dots, K_m , tvořících triviální $1-(v, k, 1)$ blokové schéma s $b = m$ a $r = 1$.

Další triviální schéma dostaneme v případě, že zvolíme $k < v$ a za množinu \mathcal{K} vezmeme všech $\binom{v}{k}$ k -prvkových podmnožin S . Zvolíme-li libovolné $t \leq k$, pak se libovolná t -tice symbolů vyskytuje vždy na $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$ kartách a tento systém tedy tvoří $t-(v, k, \binom{v-t}{k-t})$ blokové schéma.

Existuje-li konečná projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak věta 6 ukazuje, že tvoří $2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ blokové schéma, jehož vlastnosti, existenci a konstrukci jsme podrobně probírali v předchozích odstavcích.

Následující speciální případ blokového schématu nám již poskytne návod na konstrukci karetního systému zmíněného v problému 14.

Definice 23. Bloková schémata BIBD (z anglického balanced incomplete block design) jsou schémata typu $2-(v, k, \lambda)$.

Jinými slovy, jedná se o bloková schémata, kde se každá dvojice symbolů vyskytuje na právě λ kartách. Vztahy (4) v tomto případě poskytují

$$b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}, \quad r = \lambda \frac{v-1}{k-1}. \quad (7)$$

Bloková schémata BIBD jsou velmi důležitá pro návrh experimentů, protože zaručují, že každá dvojice faktorů bude obsažena v alespoň jednom experimentu. Zásadním výsledkem pro bloková schémata BIBD je tzv. Fisherova¹⁰ nerovnost

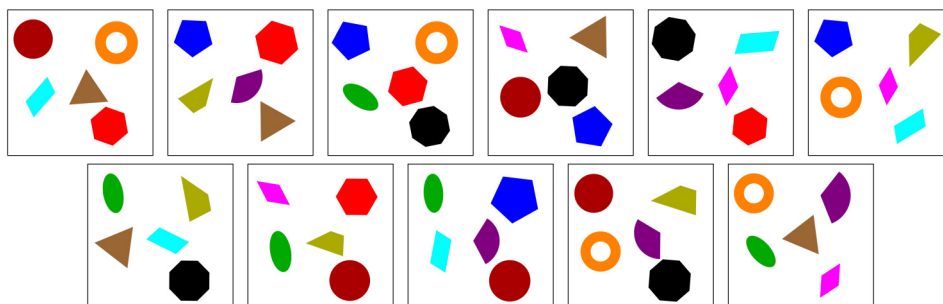
$$b \geq v, \quad (8)$$

která platí pro všechna bloková schémata BIBD s $v > k$. Nerovnost (8) říká, že blokový experiment BIBD zahrnující v faktorů se musí skládat alespoň z b dílčích experimentů. Poznamenejme, že pro obecné blokové schéma Fisherova nerovnost (8) neplatí. Jako příklad lze uvést triviální schémata $1-(v, k, 1)$, z nichž jedno přímo použijeme v příkladu 27.

Z pohledu Fisherovy nerovnosti (8) jsou optimální tzv. symetrická bloková schémata BIBD. Jedná se o schémata typu $2-(v, k, \lambda)$, pro která navíc platí $b = v$. Ze vztahů (7) přímo dostáváme, že automaticky platí i $r = k$ a nutná podmínka existence symetrického blokového schématu BIBD je

$$\lambda(v-1) = k(k-1).$$

¹⁰Ronald Aylmer Fisher (1890–1962) byl anglický statistik. Jeho jméno je úzce spjato s moderními technikami testování statistických hypotéz. Mimo zkoumání blokových schémat významně přispěl např. k rozvoji statistické techniky analýzy rozptylu (ANOVA). Kromě toho se velmi výrazně zabýval aplikacemi matematiky v genetice.



Obr. 5. Systém jedenácti karet s pěti geometrickými symboly na kartě, ve kterém každé dvě karty mají právě dva shodné symboly. Odpovídá symetrickému blokovému schématu BIBD $2\text{-}(11, 5, 2)$

Definice 25. Steinerovy systémy jsou blokovaná schémata typu $t\text{-}(v, k, 1)$.

Jedná se tedy o blokovaná schémata s $\lambda = 1$, ve kterých se každá t -tice vyskytuje na právě jedné kartě. Nejvýznamnějším speciálním případem jsou tzv. Steinerovy systémy trojic, což jsou blokovaná schémata typu $2\text{-}(v, 3, 1)$. Příslušné karty tedy obsahují trojice symbolů, přičemž každá dvojice symbolů se vyskytuje na právě jedné kartě. Fanova rovina $2\text{-}(7, 3, 1)$ z příkladu 3 i blokované schéma $2\text{-}(9, 3, 1)$ z příkladu 18 jsou jednoduché příklady Steinerových systémů trojic. Steinerův systém trojic existuje právě tehdy, když $v = 6i + 1$ nebo $v = 6i + 3$, $i \in \mathbb{N}$ [4].

Příklad 26. Dalším příkladem Steinerova systému trojic je slavné schéma $2\text{-}(15, 3, 1)$, které je úzce spojeno s Kirkmanovým problémem školaček¹². V originále z roku 1847 problém zní [3]: „*Fifteen young ladies of a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk abreast more than once.*“¹³ Jinak řečeno jde o nalezení systému Steinerových trojic $2\text{-}(15, 3, 1)$ s $b = 35$ a $r = 7$. Existuje dokonce 7 neizomorfních řešení tohoto problému, jeden z příkladů je uveden v tab. 6. Ostatní lze najít např. v [4].

PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO	NE
ABE	ACF	ADH	AGK	AJM	ANO	AIL
CLO	BMO	BCG	BHL	BFK	BDI	BJN
DFM	DGN	EJO	CDJ	CIN	CEK	CHM
GIJ	EHI	FLN	EMN	DEL	FHJ	DKO
HKN	JKL	IKM	FIO	GHO	GLM	EFG

Tab. 6. Jedno ze sedmi řešení Kirkmanova problému školaček. Pod písmeny $A\text{-}O$ si může čtenář představit patnáct dívčích jmen, např. Aničku, Báru až Olgu

¹²Thomas Kirkman (1806–1895) byl ministr anglikánské církve a matematik zabývající se kombinatorikou. Existenci Steinerových systémů trojic dokázal [3], [6] v roce 1847, tj. o 6 let dříve než Jakob Steiner. Na jeho počest a v návaznosti na Kirkmanův problém školaček jsou rozložitelné Steinerovy systémy trojic pojmenovány Kirkmanovy trojice.

¹³Volně přeloženo: Patnáct školaček se každý den v týdnu po trojicích prochází. Uspořádej je tak, aby žádné dvě nešly spolu ve trojici více než jednou.

Řešení Kirkmanova problému z tab. 6 i blokové schéma 2-(9, 3, 1) z příkladu 18 jsou příklady Steinerových systémů trojic se speciální vlastností. Jedná se o tzv. rozložitelné Steinerovy systémy trojic nebo Kirkmanovy systémy trojic. Trojice lze totiž uspořádat do $\frac{v}{3}$ skupin, z nichž každá obsahuje všechny symboly a trojice v každé skupině jsou zároveň disjunktní (v případě tab. 6 jde o sloupce odpovídající každému dni, podobně jednotlivé sloupce v příkladu 18). Všimněme si jednoduchého faktu, že Fanova rovina 2-(7, 3, 1) z příkladu 3 a ani další Steinerovy systémy trojic typu 2-(6*i* + 1, 3, 1) rozložitelné nejsou.

Jak souvisí Steinerovy systémy s karetními systémy? Většina blokových schémat z tohoto odstavce je pro obdoby dobblu na první pohled nevhodná. Platí to i pro Kirkmanovo schéma z tab. 6, kde většina párů trojic (např. libovolné dvě trojice z libovolného sloupce) nemá společné písmeno (školačku). Trik, který nám pomůže odpovědět na problém 15, je založen na dualitě, o které jsme se již zmínili v pozn. 7.

Duální systém ke Kirkmanovu schématu 2-(15, 3, 1) s $b = 35$ a $r = 7$ je systém 15 karet s 35 symboly. Každý symbol v tomto duálním systému odpovídá jedné z trojic uvedených v tab. 6,

$$S = \{ABE, ACF, \dots, GLM, EFG\},$$

a každá karta obsahuje všechny trojice, kde se vyskytuje dané písmeno, resp. daná školačka, tj.

$$\mathcal{K} = \{K_A, K_B, \dots, K_N, K_O\},$$

kde např. $K_A = \{ABE, ACF, ADH, AGK, AJM, ANO, AIL\}$ a $K_O = \{CLO, BMO, EJO, FIO, GHO, ANO, DKO\}$. Je zřejmé, že následně každé dvě karty mají společnou právě jednu trojici, a totiž tu, kdy dané školačky šly společně. V případě K_A a K_O jde o trojici ANO. Tento fakt činí toto blokové schéma 1-(35, 7, 3) s $b = 15$ a $r = 3$ i další podobná duální schémata z pohledu našeho článku atraktivními.

Myšlenka dualizace nás zavádí k tzv. Steinerovým systémům čtveřic. Steinerův systém čtveřic je blokové schéma typu 3-(v , 4, 1). Steinerovy systémy čtveřic existují [4] pro jakékoli $v = 6i + 2$ nebo $v = 6i + 4$, $i \in \mathbb{N}$. Duální systém k Steinerovu systému čtveřic pak tvoří systémy umožňující konstrukci blokových schémat, které odpovídají problému 15.

Příklad 27. Nejjednodušším Steinerovým systémem čtveřic je blokové schéma typu 3-(8, 4, 1), systém karet, v nichž se každá trojice symbolů nachází právě na jedné kartě. Platí $b = 14$ a $r = 7$ a incidenční matice tohoto schématu je např. následující obdélníková matice 8×14 :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dualizací získáme systém, v němž každá trojice z 8 karet má společný právě jeden ze 14 symbolů,

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konkrétní karetní systém je zobrazen na obr. 6 a odpovídá blokovému schématu $1-(14, 7, 1)$ s $b = 8$ a $r = 4$.

Podobným způsobem můžeme vytvořit karetní konfigurace s větším počtem karet pomocí Steinerových systémů čtveřic $3-(v, 4, 1)$, kde $v = 6i + 2$ nebo $v = 6i + 4$. Poznamenejme však, že tyto Steinerovy systémy mají podle vztahů (4) $b = \frac{1}{24}v(v-1)(v-2)$ karet a každý symbol se vyskytuje na $r = \frac{1}{6}(v-1)(v-2)$ kartách. Proto duální systémy jsou bloková schémata $1-\left(\frac{1}{24}v(v-1)(v-2), \frac{1}{6}(v-1)(v-2), 1\right)$ a počet nutně použitých symbolů i symbolů na jednotlivých kartách velmi rychle roste (např. pro systém 14 karet, který vznikne dualizací Steinerova systému čtveřic $3-(14, 4, 1)$, je na pouhých 14 karet již třeba 91 symbolů a každá karta bude obsahovat 26 symbolů).



Obr. 6. Karetní systém odpovídající duálnímu schématu k Steinerovu systému čtveřic $3-(8, 4, 1)$ z příkladu 27. Každé tři karty obsahují právě jeden společný symbol zvířete

Čtenář, který by si chtěl vytvořit vlastní variantu hry dobble s pravidly modifikovanými v duchu problémů 14 a 15, či použít přímo jeden ze zmíněných systémů vytvořených v tomto odstavci, nalezne v elektronických přílohách

- incidenční matice všech birovín z tab. 5 na základě [16] v **příloze 6**,
- systém 11 karet s 11 geometrickými útvary odpovídající birovině 2-(11, 5, 2) (vždy 5 tvarů na jedné kartě, viz obr. 5) v **příloze 7**,
- systém 37 karet s piktogramy 37 olympijských sportů, odpovídající birovině 2-(37, 9, 2) (vždy 9 olympijských sportů na jedné kartě) v **příloze 8**,
- incidenční matice duálních blokových schémat k Steinerovým systémům čtveřic 3-(8, 4, 1) a 3-(10, 4, 1) (konstrukce dalších lze nalézt např. v [9]) v **příloze 9**,
- systém 8 karet se 14 zvířátky odpovídající duálnímu systému k Steinerovu systému čtveřic 3-(8, 4, 1) (vždy 7 zvířátek na jedné kartě, viz obr. 6) v **příloze 10**.

Elektronické přílohy

Elektronické přílohy 1–10 zmíněné v článku jsou dostupné na webové stránce <http://home.zcu.cz/~pstehlik/dobble/>

Poděkování. Autor děkuje anonymnímu recenzentovi a Antonínu Slavíkovi za užitečné komentáře a opravu mnohých překlepů a nešikovných formulací. Dále děkuje Tomášovi Kaiserovi za povzbuzení pro dokončení tohoto textu.

L i t e r a t u r a

- [1] BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S.: *On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order $4t + 2$* . Proc. Natl. Acad. Sci. USA 45, 5 (1959), 734–737.
- [2] BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S., PARKER, E. T.: *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture*. Canad. J. Math. 12 (1960), 189–203.
- [3] BROWN, E., MELLINGER, K. E.: *Kirkman's schoolgirls wearing hats and walking through fields of numbers*. Math. Mag. 82, 3–15.
- [4] COLBOURN, C. J., DINITZ, J. H.: *Handbook of combinatorial designs (Discrete mathematics and its applications)*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [5] FELLMANN, E. A.: *Leonhard Euler*. Springer, Basel, 2006.
- [6] GRAHAM, R.: *Combinatorics: ancient & modern*. OUP, Oxford, 2013.
- [7] KATRNOŠKA, F.: *Latinské čtverce a genetický kód*. PMFA 52 (2007), 177–187.
- [8] KATRNOŠKA, F., KŘÍŽEK, M., SOMER, L.: *Magické čtverce a sudoku*. PMFA 53 (2008), 113–124.
- [9] LINDNER, C. C., ROSA, A.: *Steiner quadruple systems – a survey*. Discrete Math. 22 (1978), 147–181.
- [10] MATOUŠEK, J., NEŠETŘIL, J.: *Invitation to discrete mathematics*. OUP, Oxford, 2008.

- [11] MATOUŠEK, J., NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Karolinum, 2010.
- [12] OTAVA, M.: *Základní principy navrhování experimentů*. PMFA 63 (2018), 196–211.
- [13] PACKEL, E.: *The mathematics of games and gambling*. The Mathematical Association of America, 1996.
- [14] PAIGE, L. J., WEXLER, C.: *A canonical form for incidence matrices of finite projective planes and their associated latin squares*. Port. Math. 12 (1953), 105–112.
- [15] POLSTER, B.: *The intersection game*. Math Horizons 22 (2015), 8–11.
- [16] ROYLE, G.: *Combinatorial catalogues* [online]. Dostupné z: <http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/> [cit. 2. 6. 2019].
- [17] VAN LINT, J. H., WILSON, R. M.: *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.