Rozhledy matematicko-fyzikální

Zdeněk Drozd; Marie Snětinová; Kateřina Žilavá
Vážení zeměkoule

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 1, 25–31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147680`

Vážení zeměkoule

Zdeněk Drozd, Marie Snětinová, Kateřina Žilavá, MFF UK, Praha

Úvod

Pokud jste navštívili některou z akcí Matematicko-fyzikální fakulty UK a zavítali jste do posluchárny T2 v trojské budově fakulty, asi jste si všimli podivného zařízení na zdi vedle dveří (obr. 1). Do místnosti tam vyčnívá masivní ocelové rameno, na kterém jsou dvě velké olověné koule. Při bližší prohlídce jste si mohli všimnout dalších součástí, které už tak nápadné nejsou. Nejspíš jste usoudili, že jde o model nějakého měřicího zařízení – pravděpodobně to bude něco historického... Dále jste se potom nejspíš věnovali tomu, kvůli čemu jste přišli – zajímavé přednášce, pásmu demonstračních pokusů nebo něčemu dalšímu. Monstru nad dveřmi jste asi další pozornost nevěnovali.

Obr. 1: Cavendishovy váhy v posluchárně T2 (budova MFF UK, V Holešovičkách 2, Praha 8)

Co to tam tedy vlastně je? Jde o unikátní funkční model gravitačních vah – které bývají nazývány vahami Cavendishovými. Henry Cavendish (1731–1810) pomocí takovéhoto zařízení provedl řadu měření, z nichž bylo nakonec možné určit hmotnost Země. Naše zařízení je sice menší než to, které měl k dispozici Henry Cavendish, přesto ale i s ním můžeme Zemi zvážit s poměrně dobrou přesností. Pojďme se ale nejprve seznámit s tím, jak Cavendish ke svému slavnému experimentu došel.

Trocha historie neboli co pokusu předcházelo

Ve druhé polovině 17. století spatřilo světlo světa slavné dílo Isaaca Newtona *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické principy přírodní filosofie). Mimo jiné výsledky Newtonova bádání je zde uveden pozoruhodný výsledek, který dnes označujeme jako Newtonův gravitační zákon. Podle tohoto zákona se dvě tělesa přitahují silou, která je úměrná jejich hmotnostem a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti. Zatímco závislost této síly, kterou dnes nazýváme gravitační síla, na hmotnosti těles byla zřejmá, pokles síly s druhou mocninou vzdálenosti v Newtonově době zcela průkazný nebyl. Zcela přelomovým tvrzením pak bylo, že síla, kterou se přitahují nebeská tělesa, je stejného typu jako ta, která působí mezi tělesy pozemskými. Až do té doby totiž bylo všeobecně uznáváno tvrzení, že děje, které se odehrávají pod sférou Měsíce, se řídí jinými zákony než děje odehrávající se nad touto sférou. Důmyslné experimenty Galilea Galileiho, objevy Johanna Keplera a Newtonovy výsledky tyto starověké představy postupně vyvrátily.

Pojďme se zamyslet nad Newtonovým gravitačním zákonem trochu podrobněji, abychom zjistili, proč jím bylo tolik učenců včetně Henryho Cavendishe tak fascinováno. V době vydání *Principií* bylo možné zapsat tento zákon následovně (samozřejmě za předpokladu důvěry v onu závislost úbytku gravitační síly se čtvercem vzdálenosti):

$$F_{\mathrm{g}} \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \tag{1}$$

F_{g} zde označuje gravitační sílu, m_1, m_2 hmotnosti přitahujících se těles a r je jejich vzdálenost. Vztah jsme zapsali tak, jak jsme zvyklí v naší době, v *Principiích* byste takovýto způsob jeho zápisu hledali marně.

Něco zde, jak tušíte, citelně chybí. Abychom mohli sílu, kterou na sebe dvě tělesa působí, vypočítat, museli bychom kromě hmotností a vzdálenosti těles znát ještě konstantu úměrnosti. Dnes jí říkáme gravitační konstanta a značíme ji G (v Čechách bývá také značena řeckým písmenem kappa, zůstaneme ale u G, které je ve světě obvyklejší). Newtonův gravitační zákon můžeme potom zapsat ve tvaru

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \tag{2}$$

Zákon jsme zapsali pouze ve skalárním tvaru. Jeho vektorový zápis zatím potřebovat nebudeme. Právě gravitační konstanta G je to, co lze změřit našimi gravitačními vahami, ale nepředbíhejme. Pojďme se ve zkratce podívat na to, jakými cestami se k určení její velikosti lidé dostávali.

Roku 1774 podnikli pánové Maskelyne a Burrow expedici k hoře Schiehallion ve Skotsku. Jejich cílem bylo potvrdit závislost $1/r^2$ z Newtonova gravitačního zákona. Proč se kvůli tomu vypravili k této hoře? Hora Schiehallion je jednou z hor Skotské vysočiny a naši badatelé předpokládali, že pokud budou u jejího úpatí velmi přesně měřit směr, kterým míří závěs olovnice, projeví se gravitační přitažlivost mezi horou a olovnicí. Budou-li horu obcházet a měřit směr, kterým olovnice míří, mělo by se ukázat, že se olovnice nepatrně naklání k hoře. Hora Schiehallion má poměrně jednoduchý symetrický tvar. Lze tedy určit její objem a badatelé doufali v to, že budou po úspěšném měření schopni určit její hmotnost, a tedy i průměrnou hustotu. Měření nepatrných odchylek olovnice od svislého směru bylo samozřejmě velmi náročné. Metodu, jak toto měření provádět, navrhl právě Henry Cavendish. Podílel se na organizaci expedice, dohlížel na přípravu přístrojů, následně kontroloval naměřená data, přispíval k jejich analýze apod. Sám se ale expedice nezúčastnil. Byl to totiž plachý samotář a podivín. Měl problémy komunikovat s lidmi a raději vše sledoval z bezpečí svého sídla. Jeho otec, lord Charles Cavendish, byl velmi bohatý a vzdělaný. Od svých šestnácti let byl lord Charles Cavendish členem parlamentu a velmi intenzivně se zajímal o vědu. Roku 1727 se stal členem londýnské Královské společnosti (Royal Society), která mu za vynález maximum-minimálního teploměru udělila roku 1757 Copleyho medaili. Tuto medaili londýnská Královská společnost uděluje už od roku 1731 jako své nejvyšší vědecké ocenění. Lord Cavendish umožnil synu Henrymu získat vzdělání na prestižních školách té doby. Při studiu na univerzitě v Cambridge se Henry Cavendish spřátelil s Johnem Michellem, který měl později velkou zásluhu na sestrojení přístroje, který dnes nazýváme Cavendishovými gravitačními vahami.

Výsledky expedice k hoře Schiehallion byly nadmíru uspokojivé. Podařilo se prokázat, že gravitační síla skutečně klesá s druhou mocninou vzdálenosti a Královská společnost považovala výsledky expedice za finální důkaz platnosti Newtonova gravitačního zákona. Za provedená měření byla Maskelynemu s Burrowem roku 1775 udělena Copleyho medaile.

Výsledků měření zmíněné expedice se roku 1778 ujal Charles Hutton a vypočítal s jejich pomocí průměrnou hustotu hory Schiehallion. Vyšlo mu, že je 4,5krát větší než hustota vody. (V té době bylo běžné udávat výsledky měření ve formě porovnání s jinými známými hodnotami. My bychom spíše napsali $\rho = 4{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$, byla ale jiná doba.) Hutton tento výsledek publikoval a poděkoval za pomoc při matematickém zpracování Cavendishovi. Nevíme ale bohužel, kterého Cavendishe měl na mysli – jestli otce, nebo syna.

Metoda nepatrného vychýlení olovnice k hoře byla sice důmyslná, bylo s ní ale spojeno několik problémů. Kromě toho, že vyžadovala velmi precizního a trpělivého experimentátora, byly její výsledky v některých ohledech diskutabilní. Je zvolená hora dobrým reprezentantem materiálu, ze kterého se skládá Země? Neměla by jiná hora jinou hustotu? A je odchylka olovnice skutečně způsobena gravitační silou? Henry Cavendish společně se svým přítelem Johnem Michellem hledali lepší měřicí metodu. Dnes už nejspíše nezjistíme, kdo byl autorem myšlenky zkonstruovat k tomuto účelu speciální torzní váhy. První zmínka se objevuje v dopise Cavendishe Michellovi z roku 1783. V dopise se Cavendish ptá, jak pokračují přípravy experimentu [1], a z dotazů je zřejmé, že Michell váhy konstruoval. Oba měli zájem na tom, sestrojit nějakou „domácí aparaturu“. Cavendishovi vyhovovala představa, že bude moci experimentovat v ústraní a s nikým přitom moc nekomunikovat, vyhovovalo to jeho plaché a samotářské povaze. Michell, jakožto duchovní, byl příliš zaměstnán, než aby si mohl dovolit odjet na nějakou expedici, nebo experimentovat mimo svůj domov.

Roku 1783 zemřel Cavendish otec a Henry zdědil panství s celým obrovským majetkem. Vyhlédl si dům, do nějž plánoval Michellem zkonstruovanou aparaturu přestěhovat. To se skutečně o dva roky později stalo. Cesta k úspěchu byla ale ještě dlouhá. Roku 1793 John Michell zemřel a Henry Cavendish pokračoval ve vývoji aparatury sám. Nechal v domě vybudovat speciální místnost „odrušenou“ od vlivů okolí, aparaturu kompletně přestavěl a celý podzim roku 1797 a jaro roku 1798 se věnoval měření. Výsledky publikoval 21. 6. 1798 v článku *Experiments to determine the density of the earth* [2]. Jak článek vypadal? Měl úctyhodných 57 stran a pravděpodobně by obstál i u dnešních recenzentů. V úvodu je (poněkud zhuštěná) teorie, která zabírá pouze dvě a půl stránky, zbytek je věnován výsledkům měření a hlavně rozboru chyb měření a způsobu jejich korekce. A jaké tedy byly parametry původních Cavendishových vah? Bylo to úctyhodné zařízení, jehož dominantou byly dvě olověné koule, každá o hmotnosti 158 kg. Přesnost, které Henry Cavendish dosáhl, byla udivující. Hodnota gravitační konstanty určená z jeho měření je $G = 6{,}754 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$ [3]. (Porovnejte s hodnotou uvedenou v dnešních tabulkách.)

S pomocí známé hodnoty gravitační konstanty mohl Cavendish vypočítat hmotnost Země. Stačilo použít Newtonův gravitační zákon, za jednu z hmotností dosadit hledanou hmotnost Země, jako druhou hmotnost vzít hmotnost libovolného závaží a pomocí přesného siloměru změřit, jakou silou je závaží přitahováno k Zemi. Za vzdálenost r se dosadí poloměr Země (ten byl v Cavendishově době známý).

Jak gravitační váhy fungují?

Princip Cavendishových vah je ve své podstatě jednoduchý. Je to podobné, jako když chcete měřit tíhu (resp. hmotnost) tělesa pružinou. V tom případě byste nejprve určili tuhost pružiny k, která udává, jak velká síla by na pružinu musela působit, aby se protáhla o 1 metr (muselo by přitom navíc jít o pružnou deformaci pružiny, to znamená, že pokud by deformační síla přestala působit, pružina by se vrátila do původního tvaru). Pokud jste někdy tuto definici tuhosti pružiny slyšeli, byli jste k ní asi poněkud skeptičtí. Co když budu mít pružinu, která má délku, dejme tomu, 10 cm. Jak ji protáhnu o metr? Je to myšleno poněkud „obrazně“, kdyby bylo možné pružinu o metr protáhnout, byla by síla, která to způsobila, číselně rovna tuhosti pružiny. Důležité je to, že když víte, jaká je tuhost pružiny, můžete si ji zkalibrovat pro měření neznámých sil. Dokážete totiž určit, jaké prodloužení odpovídá zatížení pružiny silou jednoho newtonu, a vyrobit vhodnou měřicí stupnici (takto fungují pružinové siloměry). Pro deformaci pružiny platí vztah

$$F = -k\Delta x, \tag{3}$$

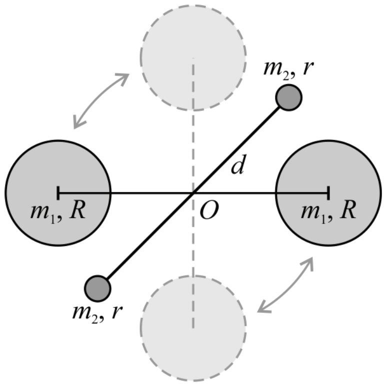
kde F je síla působící na pružinu, k tuhost pružiny a Δx prodloužení pružiny. Je snadné dopočítat neznámou sílu, když změříme prodloužení pružiny, které způsobila.

Tuhost pružiny byste mohli určit pomocí vhodného kalibračního závaží. Šlo by to i jinak? Bylo by možné například změřit periodu kmitů závaží zavěšeného na naší pružině. Pro tuto periodu platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{4}$$

Ze známých hodnot periody kmitů pružiny T a hmotnosti m závaží byste tuhost k již snadno určili.

Cavendishovy gravitační váhy jsou v podstatě také siloměrem. Je to ale siloměr důmyslný a velmi citlivý. Na obr. 2 je znázorněno schéma gravitačních vah při pohledu shora.



Obr. 2: Schéma Cavendishových vah (pohled shora)

Hlavními součástmi vah jsou dvě velké olověné koule, každá o hmotnosti m_1 a poloměru R. Koule jsou umístěny na nosníku, kterým je možné otáčet tak, jak je ve schématu zakresleno šipkami. Mezi koulemi je umístěno torzní kyvadélko tvořené kuličkami o hmotnostech m_2 připevněnými na tyčce délky d. Kyvadélko je ve svém těžišti zavěšeno na tenkém kovovém vlákně (v našem případě je z molybdenu, který má dlouhodobě stabilní mechanické vlastnosti). Torzní kyvadélko tedy může kmitat v prostoru mezi velkými koulemi. Vše je nastaveno tak, aby kyvadélko bylo umístěno symetricky mezi velkými koulemi. V rovnovážné poloze jsou tedy vzdálenosti středů malých kuliček a velkých koulí stejné.

Zařízení si můžeme představit jako torzní siloměr nebo přesněji jako měřič momentů sil. Pokud jej vychýlíme z rovnovážné polohy, zkroutí se vlákno, na kterém visí, a to se ho snaží vrátit zpět. Mezi momentem vychylující síly M a úhlem pootočení α (v radiánech) platí vztah

$$M = -D\alpha, \tag{5}$$

kde D vyjadřuje tzv. *direkční moment vlákna*. Je to analogická veličina k tuhosti pružiny. Direkční moment vyjadřuje, jak velký moment síly by musel působit, aby se vlákno zkroutilo o 1 radián (resp. aby se o tento úhel stočilo kyvadélko). Podobně jako u prve zmíněného případu s pružinou můžeme direkční moment určit pomocí periody kmitů torzního kyvadélka. Přímé měření, tedy vychýlení kyvadla o určitý úhel a změření odpovídajícího momentu síly, by zde bylo obtížné. Direkční moment vlákna by také bylo možné vypočítat z jeho průměru, délky a ze známé hodnoty modulu pružnosti ve smyku molybdenu; bylo by to ale dost nepřesné. Ve výpočtu bychom museli počítat se čtvrtou mocninou poloměru vlákna; chyba v určení poloměru by se tedy výrazně projevila. Vlákno je navíc ve skutečnosti vyrobeno ze slitiny molybdenu a modul pružnosti ve smyku dostatečně přesně neznáme.

Pro periodu kmitů torzního kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}, \tag{6}$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla.

Protože známe parametry kyvadélka (rozměry a hmotnosti kuliček i spojovací tyčky), není problém vypočítat jeho moment setrvačnosti J a následně direkční moment D. Výpočtem direkčního momentu jsme vlastně provedli kalibraci našeho torzního siloměru (nebo chcete-li „momentoměru“).

V dalším kroku přesuneme velké koule „na doraz“ do jedné z krajních poloh, počkáme, až se torzní kyvadélko zastaví, a určíme jeho polohu. Potom přetočíme koule do druhé krajní polohy, torzní kyvadélko se ustálí v trochu jiné poloze, kterou opět zaznamenáme. Malá změna polohy kyvadélka je způsobena gravitačními silami, kterými na něj působí velké koule. Měli bychom tedy být schopni tuto sílu z naměřených hodnot vypočítat. Pokud se to podaří, můžeme z výsledku zjistit, jakou silou na sebe působí dvě tělesa o hmotnosti 1 kg, jsou-li od sebe vzdálena 1 m. A právě tento údaj je to, co hledáme – gravitační konstanta G. Vypadá to sice jednoduše, ale skutečný postup je trochu náročnější. Budeme se mu věnovat v navazujícím článku v příštím čísle.

Literatura

[1] Falconer, I.: Henry Cavendish: the man and the measurement. *Meas. Sci. Technol.*, roč. 10 (1999), s. 470–477.

[2] Cavendish, H.: Experiments to determine the density of the earth. *Phil. Trans. R. Soc.*, roč. 88 (1798), s. 469–526 (Reprint: Thorpe, E. (ed): The Scientific Papers of the Honourable Henry Cavendish, FRS. Cambridge University Press, Cambridge, 1921, s. 249–286).

[3] Brož, J., Roskovec, V.: *Základní fyzikální konstanty.* SPN, Praha, 1988.