Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Martina Štěpánová

Lepidoptera mathematica aneb rozličná zobecnění věty o motýlovi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 4, 263–281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147584

Lepidoptera mathematica aneb rozličná zobecnění věty o motýlovi

Martina Štěpánová

Abstrakt. Článek je věnován zobecněním tzv. *věty o motýlovi*, půvabného planimetrického tvrzení o tětivách dané kružnice.

1. Úvod

Fascinující barvy křídel, napínavý přerod od vajíčka přes housenku, kuklu až k dospělému jedinci, chuťové pohárky umístěné na chodidlech, diapauza v době nepříznivých vnějších podmínek či schopnost migrujících druhů překonávat vzdálenost v řádu tisíců kilometrů a nalézat stanoviště, kde zimu přečkaly předchozí generace. To jsou jen některé z úchvatných znaků zástupců živočišného řádu *motýli* (*Lepidoptera*).

Na následujících stranách se pokusíme probudit (či prohloubit) zájem o motýly i u matematiků. Text je totiž věnován planimetrickým problémům, které souvisejí s tětivami kružnic a jejichž vizuální ztvárnění připomínají motýly.

V úvodu článku představíme tzv. *větu o motýlovi*, a to včetně jednoho z mnoha existujících důkazů. Poté se budeme věnovat několika rozmanitým způsobům, kterými můžeme uvedený poznatek zobecnit. Nejdůležitější části tvrzení většiny z prezentovaných rozšíření jsme převzali z níže citovaných publikací, někdy jsme však v jejich formulacích doplnili předpoklady, které v původních zdrojích chybí. V těch důkazech, kde je to nutné, diskutujeme zvlášť speciální polohu jisté tětivy, o níž zdrojové publikace mlčí, přestože na ni „obecný“ důkaz není možné aplikovat. Původním výsledkem je *věta o ztrojeném motýlovi*.

Jelikož česká terminologie studované problematiky neexistuje, jsou v textu zavedeny nové názvy vět apod., příslušné anglické termíny jsou uvedeny v poznámkách pod čarou. V celém článku budeme předpokládat, že uvažované geometrické útvary leží v rovině, danými tětivami budeme vždy myslet tětivy navzájem různé a při označení úhlu budeme ze dvou možností brát v úvahu vždy úhel konvexní.

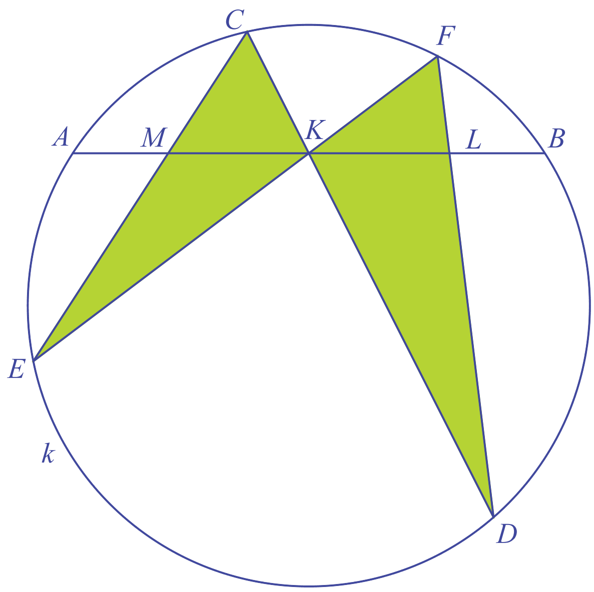
2. Věta o motýlovi

Historie *věty o motýlovi* sahá na počátek 19. století. V roce 1803 předložil znění tvrzení (sice bez důkazu, avšak v obecnější verzi platné pro regulární kuželosečky – viz dále) skotský matematik a astronom William Wallace (1768–1843) v časopisu *The Gentlemen's Mathematical Companion*. Shodou okolností to byl právě Wallace, na koho se o dva roky později v korespondenci obrátil německý astronom, fyzik a hudební skladatel William Herschel (1738–1822) s prosbou o důkaz tvrzení platného pro kružnici.

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `stepanov@karlin.mff.cuni.cz`

Pomoci v podobě Wallaceovy odpovědi obsahující důkaz věty se Herschel dočkal téhož roku.[1]

Od dob prvního Wallaceova důkazu byly postupně představovány nové a nové postupy dokládající tvrzení věty, a tak dnes existuje pestrá škála ověření využívajících poznatky rozmanitých matematických disciplín.[2] Nejčastěji publikovaný důkaz je zřejmě ten, který je uveden např. v [6]. Níže uvádíme takový, který považujeme nejen za kratší, ale především „s větším vtipem“.



Obr. 1. Věta o motýlovi

Věta 1. *Nechť k je kružnice a K je střed její libovolné tětivy AB. Nechť CD, EF jsou tětivy kružnice k, které procházejí bodem K (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB). Označíme-li M, L průsečíky tětivy AB po řadě s tětivami CE, DF, potom je bod K rovněž středem úsečky ML* (obr. 1).

Důkaz. [13] Střed kružnice k označme S a nejprve předpokládejme, že tětiva AB tímto bodem neprochází, tj. AB není průměrem kružnice k (obr. 2).

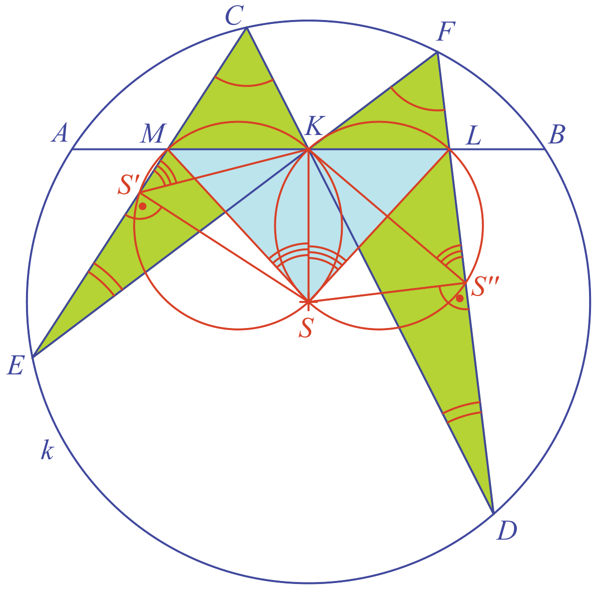
Protože je úhel, který svírají přímky SK a ML, pravý, stačí dokázat, že

$$|\sphericalangle MSK| = |\sphericalangle LSK| \,. \tag{1}$$

Odtud totiž vyplyne, že jsou trojúhelníky MSK a LSK se společnou stranou SK shodné, a tedy $|MK| = |KL|$.

[1] Patřičná partie Herschelova, resp. Wallaceova dopisu je přepsána v [7], s malou nepřesností také v [2]. Podrobněji vysvětlený Wallaceův důkaz je prezentován v [16].

[2] Přes dvacet důkazů je dostupných na webové stránce [3]. Snahy o nalezení dalších důkazů neutichly ani v současné době, což potvrzují např. články [5] a [9] z roku 2016.



Obr. 2. Důkaz věty o motýlovi

Podle věty o obvodových úhlech je

$$|\sphericalangle CEF| = |\sphericalangle CDF| \tag{2}$$

a také

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle EFD|\,. \tag{3}$$

Rovnosti (2), (3) implikují podobnost trojúhelníků CEK a FDK. Protože jsou pravoúhlé průměty S', S'' bodu S na tětivy CE, DF středy uvedených tětiv, jsou podobné i trojúhelníky $CS'K$ a $FS''K$, a tedy

$$|\sphericalangle CS'K| = |\sphericalangle FS''K|\,. \tag{4}$$

Jelikož jsou úhly $MS'S$, SKM, SKL, $LS''S$ pravé, jsou čtyřúhelníky $S'SKM$ a $SS''LK$ tětivové. Oběma lze proto opsat kružnici a s využitím věty o obvodových úhlech je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CS'K| &= |\sphericalangle MS'K| = |\sphericalangle MSK|\,,\\ |\sphericalangle FS''K| &= |\sphericalangle LS''K| = |\sphericalangle LSK|\,. \end{aligned}$$

Ze vztahu (4) plyne shodnost úhlů MSK, LSK a následně i trojúhelníků MSK a LSK. Bod K je tedy středem úsečky ML.

V případě, že tětiva AB prochází bodem S, je $K = S$. Tětivy CE, DF jsou zřejmě rovnoběžné, proto $|\sphericalangle MEK| = |\sphericalangle LFK|$. Jelikož je $|\sphericalangle EKM| = |\sphericalangle FKL|$ a dále $|EK| = |FK|$, jsou trojúhelníky EKM a FKL shodné, z čehož plyne platnost tvrzení. □

Název věty není nutné příliš komentovat.[3] Pohled na *křídla* motýla reprezentovaná trojúhelníky KCE a KDF na obr. 1 je jistě všeříkající, bod K budeme nazývat *tělo* motýla.

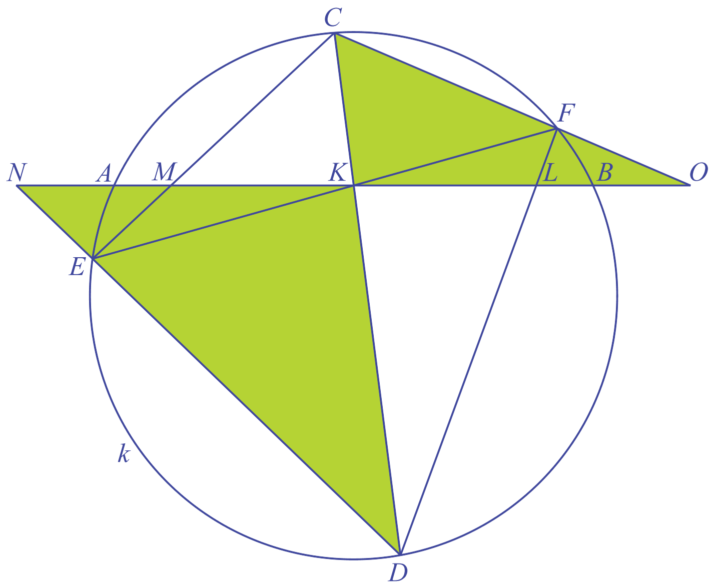
3. Zobecnění věty o motýlovi

Nyní se dostáváme k hlavnímu cíli článku, tj. k představení zobecnění *věty o motýlovi*. Zatímco ta se těší relativně značné pozornosti, a to i matematiků-laiků, její obecnější verze jsou známy méně a jsou spíše jen v hledáčku zástupců odborné matematické komunity.[4]

3.1. Věta o motýlech

Doposud jsme uvažovali pouze dvě spojnice krajních bodů tětiv CD, EF, a to takové, že jejich průsečíky M, L s přímkou AB ležely ve vnitřní oblasti kružnice k. Na otázku, zda rovněž průsečíky zbývajících spojnic mají stejnou vzdálenost od středu K tětivy AB, odpovídá následující *věta o motýlech*.

Věta 2. *Nechť k je kružnice a K je střed její libovolné tětivy AB. Nechť CD, EF jsou tětivy kružnice k, které procházejí bodem K (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB a přímky AB, CF nejsou rovnoběžné). Označíme-li M, L, N, O průsečíky přímky AB po řadě s přímkami CE, DF, DE, CF, potom je bod K rovněž středem úseček ML a ON* (obr. 3).

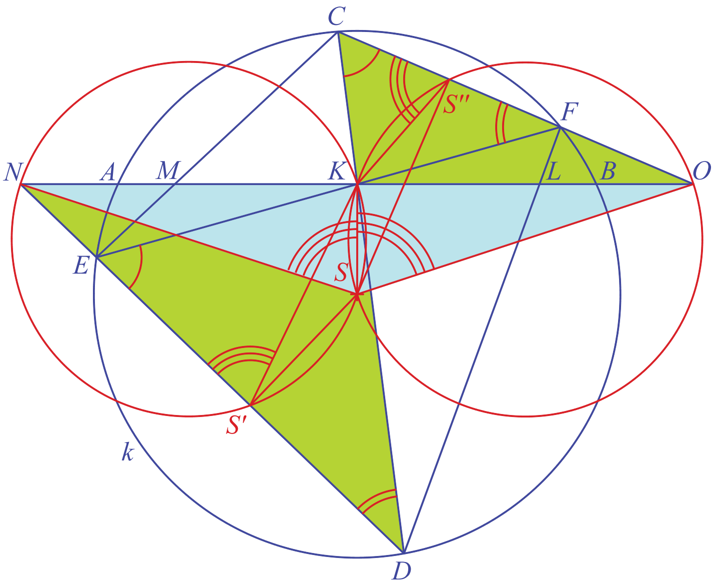


Obr. 3. Věta o motýlech

[3] V anglicky psané odborné literatuře je tvrzení nazýváno *the butterfly theorem*.

[4] Z publikací věnovaných zobecněním *věty o motýlovi*, které nebudou níže citovány u konkrétních výsledků, jmenujme například [8], [11], [14], [15].

Důkaz. Pro body M a L jsme již požadovanou vlastnost ověřili, pro body N a O lze postupovat analogicky. Uvažujme opět nejprve případ, kdy tětiva AB neprochází středem S kružnice k. Tentokrát však sestrojíme pravoúhlé průměty S', S'' středu S kružnice k na tětivy ED, CF (obr. 4).



Obr. 4. Důkaz věty o motýlech

Ze shodnosti dvojice úhlů DEF a DCF a také dvojice úhlů EDC, EFC plyne podobnost trojúhelníků DKE a FKC. Jelikož jsou body S', S'' středy tětiv ED, CF, jsou podobné rovněž trojúhelníky $S'KE$ a $S''KC$. Proto

$$|\sphericalangle ES'K| = |\sphericalangle CS''K|\,. \tag{5}$$

Úhly $NS'S$, NKS a rovněž úhly SKO, $SS''O$ jsou pravé, proto body N, S', S, K leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem NS, resp. body O, S'', K, S leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SO. Čtyřúhelníky $NS'SK$ a $OS''KS$ jsou tedy tětivové, z čehož plyne

$$|\sphericalangle ES'K| = |\sphericalangle NS'K| = |\sphericalangle NSK| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle CS''K| = |\sphericalangle OSK|\,.$$

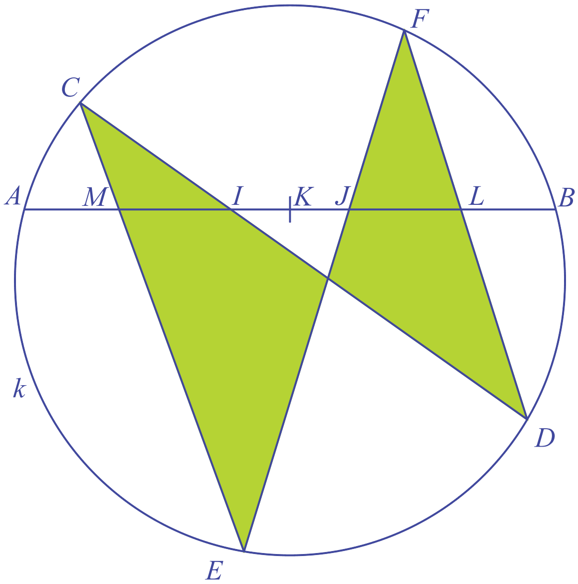
Vzhledem ke vztahu (5) jsou shodné i úhly NSK a OSK. Trojúhelníky NSK a OSK jsou proto shodné, a tudíž je bod K středem úsečky NO.

Jestliže tětiva AB prochází bodem S, potom jsou evidentně přímky CF a ED rovnoběžné. Jelikož je $|\sphericalangle DSN| = |\sphericalangle CSO|$ a $|SC| = |SD|$, jsou trojúhelníky DSN a CSO shodné, což implikuje $|SN| = |SO|$. □

3.2. Klamkinovo zobecnění věty o motýlovi

Dosud jsme předpokládali, že tětivy CD, EF procházejí bodem K, tj. jejich průsečíky s tětivou AB mají od bodu K stejnou, a to nulovou vzdálenost. V dalším textu se budeme zabývat případem, v němž zmíněné průsečíky leží ve stejné, ne však nutně nulové vzdálenosti od bodu K. Poznatek budeme nazývat *Klamkinovo zobecnění věty o motýlovi*, neboť ho poprvé publikoval v [10] americký matematik Murray Seymour Klamkin (1921–2004).

Věta 3. *Nechť AB je tětiva dané kružnice k a nechť K je střed uvedené tětivy. Dále nechť I, J jsou dva různé body tětivy AB mající stejnou vzdálenost od bodu K. Nechť C, D, E, F jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětiva CD prochází bodem I a tětiva EF prochází bodem J (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB). Označíme-li M, L průsečíky tětivy AB po řadě s tětivami CE, FD, potom je bod K středem úsečky ML* (obr. 5).



Obr. 5. Klamkinovo zobecnění věty o motýlovi

Důkaz. [12] Bodem K veďme přímku n kolmou k tětivě AB (obr. 6). V osové souměrnosti, jejíž osou je přímka n, sestrojme obrazy C', D', E', M' bodů C, D, E, M. Body C', D', E' zřejmě leží na kružnici k a bod M' na úsečce AB. K důkazu rovnosti $|MK| = |KL|$ stačí dokázat, že $M' = L$.

Přímky $JL = AB$ a DD' jsou rovnoběžné, proto

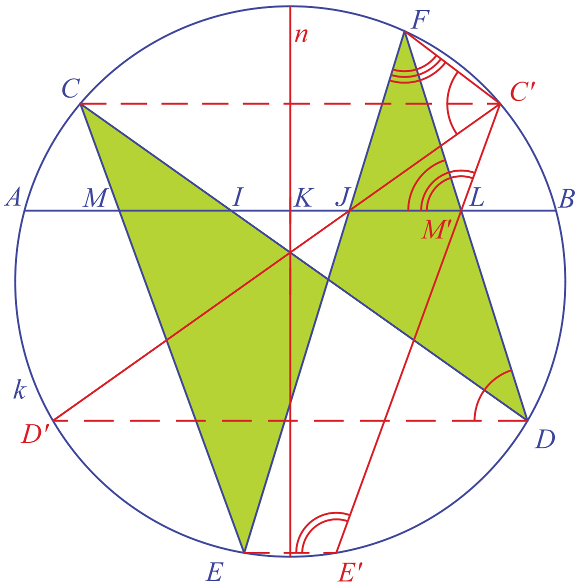
$$|\sphericalangle\, JLF| = |\sphericalangle\, D'DF|\,. \tag{6}$$

Podle věty o obvodových úhlech je

$$|\sphericalangle\, D'DF| = |\sphericalangle\, D'C'F|\,. \tag{7}$$

Protože $|IK| = |KJ|$, leží bod J na úsečce $C'D'$, a tedy

$$|\sphericalangle\, D'C'F| = |\sphericalangle\, JC'F|\,. \tag{8}$$



Obr. 6. Důkaz Klamkinova zobecnění věty o motýlovi

Z (6), (7), (8) plyne

$$|\sphericalangle JLF| = |\sphericalangle JC'F| \,,$$

a proto je čtyřúhelník $JLC'F$ tětivový.

Protože jsou přímky $JM' = AB$ a EE' rovnoběžné, je

$$|\sphericalangle JM'C'| = |\sphericalangle EE'C'| \,. \tag{9}$$

Čtyřúhelník $EE'C'F$ je tětivový, a proto

$$|\sphericalangle EE'C'| + |\sphericalangle C'FE| = 180^\circ. \tag{10}$$

Ze vztahů (9), (10) a triviální rovnosti $|\sphericalangle C'FE| = |\sphericalangle C'FJ|$ plyne

$$|\sphericalangle JM'C'| + |\sphericalangle C'FJ| = 180^\circ,$$

a tedy i čtyřúhelník $JM'C'F$ je tětivový. Vrcholy čtyřúhelníků $JLC'F$ a $JM'C'F$ musí ležet na téže kružnici (opsané trojúhelníku $JC'F$). Protože tato kružnice může mít s úsečkou AB kromě bodu J již jen jeden průsečík, je $M' = L$, a proto je bod K i v tomto případě středem úsečky ML. □

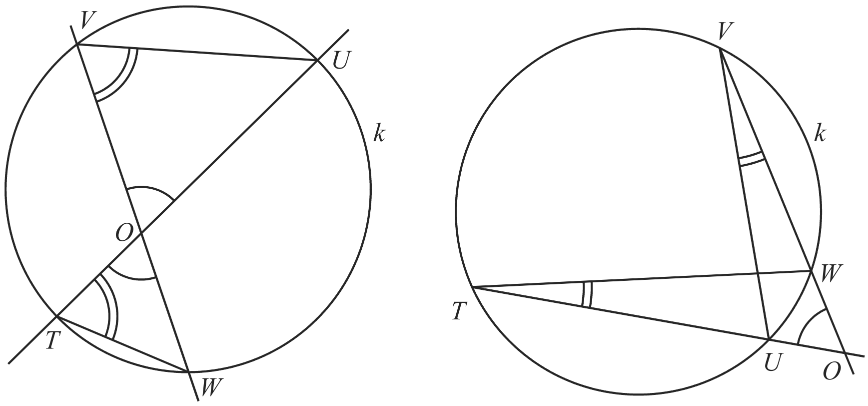
3.3. Věta o zdvojeném motýlovi

V dalším zobecnění rezignujeme na požadavek, aby body M, L ležely na úsečkách, jejichž krajní body leží na téže kružnici (tj. jsou jejími tětivami). Následující poznatek bude uvažovat průsečíky tětivy AB s úsečkami, jejichž krajní body incidují s dvěma soustřednými kružnicemi. Tvrzení jsme nazvali *větou o zdvojeném motýlovi*[5] a v jeho důkazu využijeme následující dvě lemmata.

[5]Na webové stránce [4] se tvrzení nazývá *a better butterfly theorem*.

Lemma 1. *Nechť T, U, V, W jsou navzájem různé body kružnice k. Jestliže se přímky TU a VW protínají v bodě O, potom*

$$|TO| \cdot |UO| = |VO| \cdot |WO| \,.^{6} \tag{11}$$



Obr. 7. Součin délek úseků na sečnách kružnice

Důkaz. Mohou nastat dva případy. Buď bod O leží ve vnitřní (obr. 7 vlevo), nebo ve vnější (obr. 7 vpravo) oblasti kružnice. V obou případech je zřejmě $|\sphericalangle TOW| = |\sphericalangle UOV|$ a s využitím věty o obvodových úhlech je $|\sphericalangle WTU| = |\sphericalangle WVU|$. Trojúhelníky TWO a VUO jsou tedy podobné, z čehož vyplývá

$$\frac{|TO|}{|WO|} = \frac{|VO|}{|UO|},$$

resp. po úpravě

$$|TO| \cdot |UO| = |VO| \cdot |WO| \,.$$

□

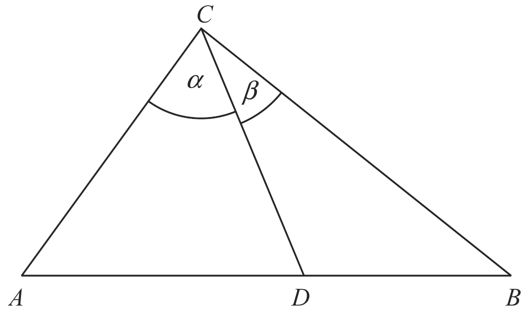
Lemma 2. *Nechť ABC je libovolný trojúhelník a bod D vnitřní bod jeho strany AB. Označíme-li α velikost úhlu ACD a β velikost úhlu DCB* (obr. 8), *potom platí*

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|CD|} = \frac{\sin\alpha}{|CB|} + \frac{\sin\beta}{|CA|}. \tag{12}$$

[6]Konstantní součin délek $|TO| \cdot |UO| = |VO| \cdot |WO|$ je roven tzv. *mocnosti bodu O ke kružnici k* (o středu S a poloměru r), tj. reálnému číslu $m = v^2 - r^2$, kde $v = |OS|$. V anglicky psaných textech je tvrzení o konstantě m (pro daný bod O) pojmenováno *the power of the point theorem.*

V případě, že bod O leží ve vnitřní oblasti kružnice, je v anglicky psaných publikacích poznatek speciálně nazýván *the intersecting chords theorem.*

V případě, že bod O leží ve vnější oblasti kružnice a že připustíme možnost $V = W$ (tj. sečna VW „přejde“ v tečnu), je $m = |TO| \cdot |UO| = |VO|^2$.



Obr. 8. Vztah platný pro libovolný trojúhelník

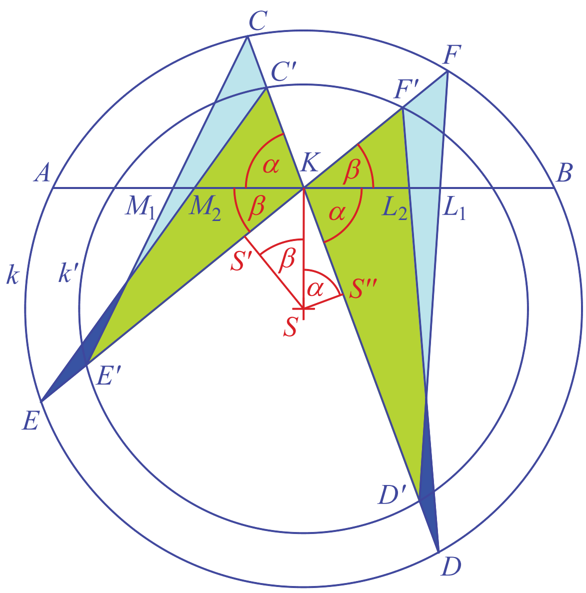
Důkaz. Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ADC a DBC. Protože je obsah trojúhelníku roven polovině součinu délek dvou jeho stran a sinu úhlu, který svírají, je

$$\frac{|CA| \cdot |CB| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2} = \frac{|CA| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{|CD| \cdot |CB| \cdot \sin\beta}{2}.$$

Vynásobením obou stran rovnosti číslem $\dfrac{2}{|CA| \cdot |CB| \cdot |CD|}$ získáme požadovaný vztah (12). □

Nyní přistupme k formulaci slíbené věty.

Věta 4. *Nechť k, k' jsou dvě soustředné kružnice. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že kružnicí s větším poloměrem je kružnice k* (obr. 9). *Nechť AB je tětiva*



Obr. 9. Věta o zdvojeném motýlovi a její důkaz

kružnice k a nechť C, D, E, F jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětivy CD, EF procházejí středem K tětivy AB (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB a vzdálenost bodů S, K je menší než poloměr kružnice k'). Dále nechť C', D', resp. E', F' značí průsečíky přímky CD, resp. EF s kružnicí k' a M_1, M_2, L_1, L_2 jsou průsečíky tětivy AB po řadě s úsečkami CE', $C'E$, $D'F$ a DF'. Potom platí

$$\frac{1}{|KM_1|} + \frac{1}{|KM_2|} = \frac{1}{|KL_1|} + \frac{1}{|KL_2|}. \tag{13}$$

Důkaz. [4] Nejprve zaveďme označení velikosti úhlů (obr. 9):

$$|\sphericalangle M_1KC| = |\sphericalangle L_1KD| = \alpha, \qquad |\sphericalangle M_1KE| = |\sphericalangle L_1KF| = \beta. \tag{14}$$

Požadovaná rovnost (13) je ekvivalentní vztahu

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_1|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_2|} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_1|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_2|}. \tag{15}$$

Jednotlivé zlomky můžeme vyjádřit pomocí lemmatu 2, a to jeho aplikací po řadě na trojúhelníky $E'KC$, EKC', $D'FK$, $DF'K$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_1|} &= \frac{\sin\alpha}{|KE'|} + \frac{\sin\beta}{|KC|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_2|} &= \frac{\sin\alpha}{|KE|} + \frac{\sin\beta}{|KC'|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_1|} &= \frac{\sin\alpha}{|KF|} + \frac{\sin\beta}{|KD'|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_2|} &= \frac{\sin\alpha}{|KF'|} + \frac{\sin\beta}{|KD|}.
\end{aligned}$$

Vztah (15) je tedy platný právě tehdy, pokud

$$\frac{\sin\alpha}{|KE'|} + \frac{\sin\beta}{|KC|} + \frac{\sin\alpha}{|KE|} + \frac{\sin\beta}{|KC'|} = \frac{\sin\alpha}{|KF|} + \frac{\sin\beta}{|KD'|} + \frac{\sin\alpha}{|KF'|} + \frac{\sin\beta}{|KD|}. \tag{16}$$

Jestliže střed S kružnice k leží na tětivě AB, je $|KC| = |KD| = |KE| = |KF|$, $|KC'| = |KD'| = |KE'| = |KF'|$ a rovnost (16), resp. tvrzení věty proto platí.

V případě, že bod S na tětivě AB neleží, rovnost (16) dále upravíme (přičemž předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|KD| > |KC|$, a tedy i $|KE| > |KF|$):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|KC|} - \frac{1}{|KD|}\right)\cdot\sin\beta + \left(\frac{1}{|KC'|} - \frac{1}{|KD'|}\right)\cdot\sin\beta = \\
&= \left(\frac{1}{|KF|} - \frac{1}{|KE|}\right)\cdot\sin\alpha + \left(\frac{1}{|KF'|} - \frac{1}{|KE'|}\right)\cdot\sin\alpha,
\end{aligned} \tag{17}$$

resp.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{|KD| - |KC|}{|KC|\cdot|KD|}\right)\cdot\sin\beta + \left(\frac{|KD'| - |KC'|}{|KC'|\cdot|KD'|}\right)\cdot\sin\beta = \\
&= \left(\frac{|KE| - |KF|}{|KF|\cdot|KE|}\right)\cdot\sin\alpha + \left(\frac{|KE'| - |KF'|}{|KF'|\cdot|KE'|}\right)\cdot\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{18}$$

Podle lemmatu 1 je

$$|KE| \cdot |KF| = |KC| \cdot |KD| \quad \text{a} \quad |KE'| \cdot |KF'| = |KC'| \cdot |KD'| \,. \tag{19}$$

Označme S', S'' pravoúhlé průměty středu S kružnice k na tětivy EF, CD. Zřejmě $\alpha = |\sphericalangle KSS''|$, $\beta = |\sphericalangle S'SK|$,

$$\sin\alpha = \frac{|KS''|}{|KS|}, \qquad \sin\beta = \frac{|KS'|}{|KS|}. \tag{20}$$

Protože je bod S' středem úseček EF, $E'F'$ a bod S'' středem úseček CD, $C'D'$, dostáváme s využitím vztahů (20)

$$\begin{aligned} |KD| - |KC| &= |KD'| - |KC'| = 2 \cdot |KS''| = 2 \cdot |KS| \cdot \sin\alpha, \\ |KE| - |KF| &= |KE'| - |KF'| = 2 \cdot |KS'| = 2 \cdot |KS| \cdot \sin\beta. \end{aligned}$$

Po dosazení právě odvozených vztahů a rovností (19) do vztahu (18) a následných úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cdot |KS| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{|KC| \cdot |KD|} + \frac{2 \cdot |KS| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{|KC'| \cdot |KD'|} = \\ &= \frac{2 \cdot |KS| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{|KC| \cdot |KD|} + \frac{2 \cdot |KS| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{|KC'| \cdot |KD'|}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost (a tedy i vztah (17), který využijeme později) jistě platí, a tím je tvrzení dokázáno. □

3.4. Věta o ztrojeném motýlovi

Pro ty, kterým v mysli přirozeně vytanula otázka, zda obdobná věta platí i pro tři kružnice, představujeme následující tvrzení:

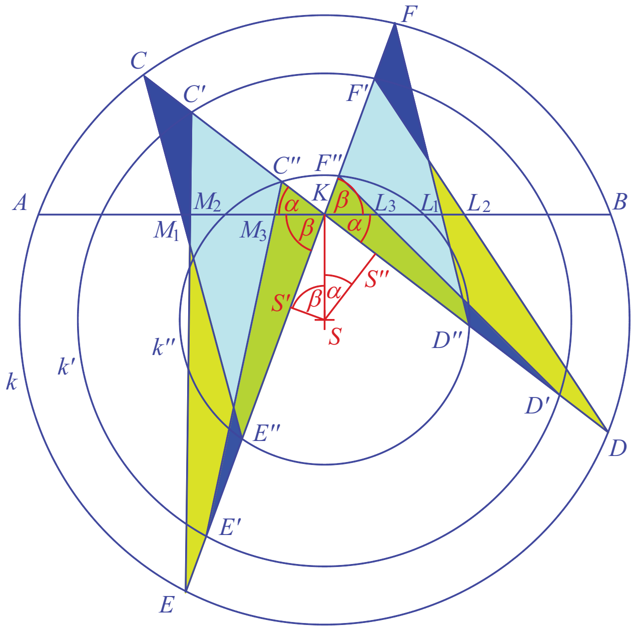
Věta 5. *Nechť k, k', k'' jsou tři soustředné kružnice. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že kružnicí s největším poloměrem je kružnice k a kružnicí s nejmenším poloměrem je kružnice k''* (obr. 10). *Nechť AB je tětiva kružnice k a nechť C, D, E, F jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětivy CD, EF procházejí středem K tětivy AB (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB a vzdálenost bodů S, K je menší než poloměr kružnice k''). Nechť C', D', resp. E', F' značí průsečíky přímky CD, resp. EF s kružnicí k', dále C'', D'', resp. E'', F'' značí průsečíky přímky CD, resp. EF s kružnicí k''. Jsou-li M_1, M_2, M_3, L_1, L_2, L_3 průsečíky tětivy AB po řadě s úsečkami CE'', $C'E$, $C''E'$, FD'', $F'D$ a $F''D'$, potom platí*

$$\frac{1}{|KM_1|} + \frac{1}{|KM_2|} + \frac{1}{|KM_3|} = \frac{1}{|KL_1|} + \frac{1}{|KL_2|} + \frac{1}{|KL_3|}. \tag{21}$$

Důkaz. Postupujme obdobně jako u *věty o zdvojeném motýlovi*, tj. dokažme rovnost

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_1|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_2|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_3|} = \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_1|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_2|} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_3|}, \end{aligned} \tag{22}$$

kde α, β jsou opět zavedeny podle (14), viz též obr. 10.



Obr. 10. Věta o ztrojeném motýlovi a její důkaz

K vyjádření jednotlivých zlomků vyskytujících se ve vztahu (22) využijeme lemmatu 2 pro trojúhelníky $E''KC$, EKC', $E'KC''$, $D''FK$, $DF'K$, $D'F''K$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_1|} &= \frac{\sin\alpha}{|KE''|} + \frac{\sin\beta}{|KC|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_2|} &= \frac{\sin\alpha}{|KE|} + \frac{\sin\beta}{|KC'|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KM_3|} &= \frac{\sin\alpha}{|KE'|} + \frac{\sin\beta}{|KC''|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_1|} &= \frac{\sin\alpha}{|KF|} + \frac{\sin\beta}{|KD''|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_2|} &= \frac{\sin\alpha}{|KF'|} + \frac{\sin\beta}{|KD|},\\
\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|KL_3|} &= \frac{\sin\alpha}{|KF''|} + \frac{\sin\beta}{|KD'|}.
\end{aligned}$$

Chceme tedy dokázat, že

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{|KE''|} + \frac{\sin\beta}{|KC|} + \frac{\sin\alpha}{|KE|} + \frac{\sin\beta}{|KC'|} + \frac{\sin\alpha}{|KE'|} + \frac{\sin\beta}{|KC''|} =\\
&= \frac{\sin\alpha}{|KF|} + \frac{\sin\beta}{|KD''|} + \frac{\sin\alpha}{|KF'|} + \frac{\sin\beta}{|KD|} + \frac{\sin\alpha}{|KF''|} + \frac{\sin\beta}{|KD'|}.
\end{aligned}$$

V případě, že střed S kružnice k leží na tětivě AB, vztah zřejmě platí.

Jestliže bod S na tětivě AB neleží, uvedený vztah dále upravíme, přičemž přirozeně převezmeme výše zavedené značení S', S'' (obr. 10) a předpoklad $|KD| > |KC|$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|KC|}-\frac{1}{|KD|}\right)\cdot\sin\beta+\left(\frac{1}{|KC'|}-\frac{1}{|KD'|}\right)\cdot\sin\beta+\\+\left(\frac{1}{|KC''|}-\frac{1}{|KD''|}\right)\cdot\sin\beta=\left(\frac{1}{|KF|}-\frac{1}{|KE|}\right)\cdot\sin\alpha+\\+\left(\frac{1}{|KF'|}-\frac{1}{|KE'|}\right)\cdot\sin\alpha+\left(\frac{1}{|KF''|}-\frac{1}{|KE''|}\right)\cdot\sin\alpha.\end{aligned}\tag{23}$$

Vzhledem k platnosti rovnosti (17) stačí dokázat, že

$$\left(\frac{1}{|KC''|}-\frac{1}{|KD''|}\right)\cdot\sin\beta=\left(\frac{1}{|KF''|}-\frac{1}{|KE''|}\right)\cdot\sin\alpha,$$

neboli

$$\frac{|KD''|-|KC''|}{|KC''|\cdot|KD''|}\cdot\sin\beta=\frac{|KE''|-|KF''|}{|KF''|\cdot|KE''|}\cdot\sin\alpha.$$

Protože

$$|KD''|-|KC''|=2\cdot|KS''|\,,\qquad |KE''|-|KF''|=2\cdot|KS'|\,,$$

dostáváme s využitím lemmatu 1 a vztahů (20) rovnost

$$\frac{2\cdot|KS|\cdot\sin\alpha}{|KC''|\cdot|KD''|}\cdot\sin\beta=\frac{2\cdot|KS|\cdot\sin\beta}{|KC''|\cdot|KD''|}\cdot\sin\alpha,$$

jejíž levá strana je rovna straně pravé, čímž je důkaz hotov. □

3.5. Věta o motýlovi s asymetricky umístěným tělem

Doposud jsme předpokládali, že bod K je středem tětivy AB, nyní budeme požadovat, aby byl pouze jejím vnitřní bodem. K představení této modifikace nás přitom inspirovala diskuze na webové stránce [17].

Věta 6. *Nechť k je kružnice, AB její tětiva a K libovolný bod uvedené tětivy různý od bodů A, B. Nechť CD, EF jsou tětivy kružnice k, které procházejí bodem K (body C, F přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB). Označíme-li M, L průsečíky tětivy AB po řadě s tětivami CE, DF* (obr. 11), *potom platí*

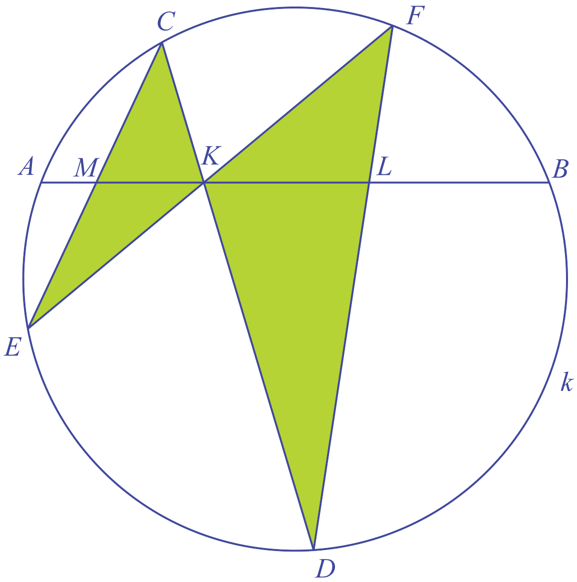
$$\frac{1}{|KA|}+\frac{1}{|KL|}=\frac{1}{|KB|}+\frac{1}{|KM|}.$$

Důkaz.[7] Sestrojme kružnici l opsanou trojúhelníku EKC a její průsečík s přímkou AB různý od bodu K označme G (obr. 12). Protože

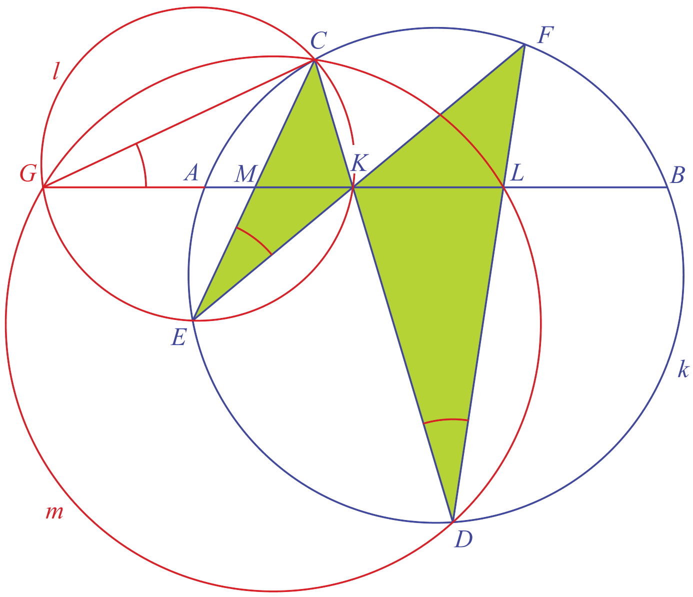
$$|\sphericalangle CDL|=|\sphericalangle CDF|=|\sphericalangle CEF|=|\sphericalangle CEK|=|\sphericalangle CGK|=|\sphericalangle CGL|\,,$$

leží body C, G, D a L na jedné kružnici, kterou označme m.

[7] Hlavní linie důkazu je převzata z [17], kde je však, podle našeho názoru, ověření prezentováno zbytečně komplikovaně.



Obr. 11. Věta o motýlovi s asymetricky umístěným tělem



Obr. 12. Důkaz věty o motýlovi s asymetricky umístěným tělem

Podle lemmatu 1 pro kružnice m a k je

$$|LK| \cdot |GK| = |CK| \cdot |DK| = |AK| \cdot |BK| \ ,$$

a tedy platí i rovnost

$$|LK| \cdot |GK| - |LK| \cdot |AK| = |AK| \cdot |BK| - |LK| \cdot |AK| \ ,$$

kterou dále upravíme:

$$\begin{aligned} |LK| \cdot (|GK| - |AK|) &= |AK| \cdot (|BK| - |LK|) \ , \\ |LK| \cdot |GA| &= |AK| \cdot |BL| \ , \end{aligned}$$

čímž dostaneme

$$|GA| = \frac{|AK| \cdot |BL|}{|LK|}. \tag{24}$$

S využitím lemmatu 1 pro kružnice k a l je

$$|AM| \cdot |BM| = |CM| \cdot |EM| = |GM| \cdot |KM| \ ,$$

a proto

$$\begin{aligned} \frac{|AM| \cdot |KB|}{|KM|} &= \frac{|GM|}{|BM|} \cdot |KB| = \frac{|GM|}{|BM|} \cdot (|BM| - |KM|) = \\ &= |GM| - \frac{|GM|}{|BM|} \cdot |KM| = |GM| - |AM| = |GA| \ . \end{aligned}$$

Vzhledem k (24) je tudíž[8]

$$\frac{|AM| \cdot |KB|}{|KM|} = \frac{|BL| \cdot |KA|}{|KL|}$$

a po triviálních úpravách

$$\begin{aligned} |AM| \cdot |KB| \cdot |KL| &= |BL| \cdot |KA| \cdot |KM| \ , \\ (|KA| - |KM|) \cdot |KB| \cdot |KL| &= (|KB| - |KL|) \cdot |KA| \cdot |KM| \ , \\ \frac{1}{|KM|} - \frac{1}{|KA|} &= \frac{1}{|KL|} - \frac{1}{|KB|}, \\ \frac{1}{|KA|} + \frac{1}{|KL|} &= \frac{1}{|KB|} + \frac{1}{|KM|}. \end{aligned}$$

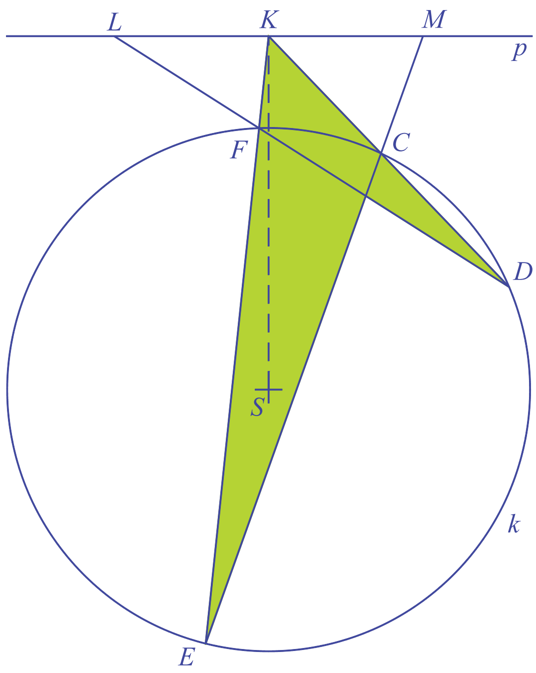
□

[8] Uvedená rovnost vyjadřuje tzv. *Harukiho lemma* (více viz např. [1]).

3.6. Věta o motýlovi s tělem na obecné přímce

Ve všech předcházejících případech jsme hledali body M, L (případně N, O) na přímce AB, která byla vůči dané kružnici, resp. daným kružnicím sečnou. Upustíme-li od tohoto požadavku, získáme další modifikaci věty 1 (viz např. [18]). V následujícím tvrzení budeme studovat situaci, kdy body M, L leží na sečně kružnice k či na přímce, která leží v její vnější oblasti. Po důkazu tvrzení krátce okomentujeme i případ tečny.

Věta 7. *Nechť je dána kružnice k o středu S a dále přímka p, která je buď její sečnou, nebo nemá s kružnicí k žádný společný bod* (obr. 13). *Nechť K je pata kolmice vedené bodem S na přímku p a dále nechť C, D, E, F jsou navzájem různé body kružnice k takové, že přímky CD, EF procházejí bodem K a přímka CE není rovnoběžná s přímkou p. Označíme-li M, L průsečíky po řadě přímek CE, DF s přímkou p, potom je bod K středem úsečky ML.*



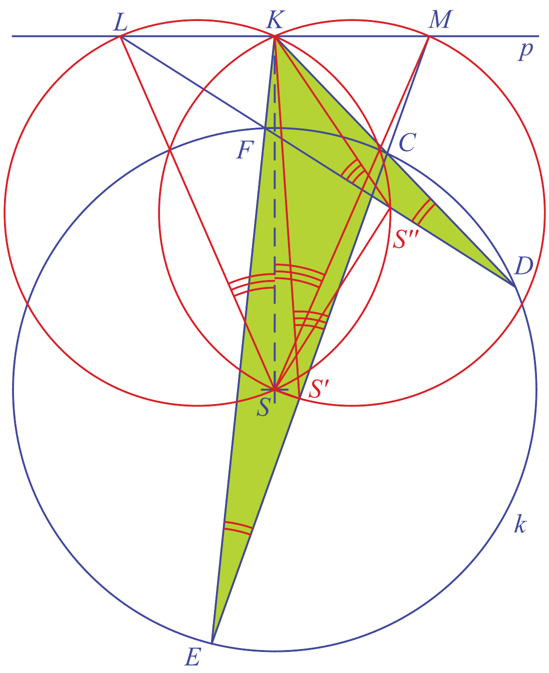
Obr. 13. Věta o motýlovi s tělem na obecné přímce

Důkaz. V případě sečny jsme již důkaz provedli, v druhém případě můžeme opět postupovat obdobně jako v důkazu *věty o motýlovi.* Protože je zřejmě (obr. 14)

$$|\sphericalangle KEC| = |\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle FDC| = |\sphericalangle FDK|\,,$$

jsou trojúhelníky KEC a KDF podobné. Jsou-li S', S'' pravoúhlé průměty bodu S na tětivy CE, DF, tj. body S', S'' jsou středy úseček CE, DF, jsou podobné i trojúhelníky $KS'C$ a $KS''F$. Proto

$$|\sphericalangle KS'M| = |\sphericalangle KS'C| = |\sphericalangle KS''F| = |\sphericalangle KS''L|\,. \tag{25}$$



Obr. 14. Důkaz věty o motýlovi s tělem na obecné přímce

Protože jsou úhly $SS'M$ a SKM pravé, leží body S, S', M, K na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SM. Jelikož jsou rovněž úhly $SS''L$ a SKL pravé, leží body S, S'', K, L na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SL. Proto

$$|\sphericalangle KSM| = |\sphericalangle KS'M| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle KSL| = |\sphericalangle KS''L|\,.$$

Odtud a z (25) plyne shodnost úhlů KSM a KSL, z níž dále vyplývá shodnost trojúhelníků KSM a KSL, a tedy i shodnost stran KM a KL. Bod K je proto středem úsečky ML. □

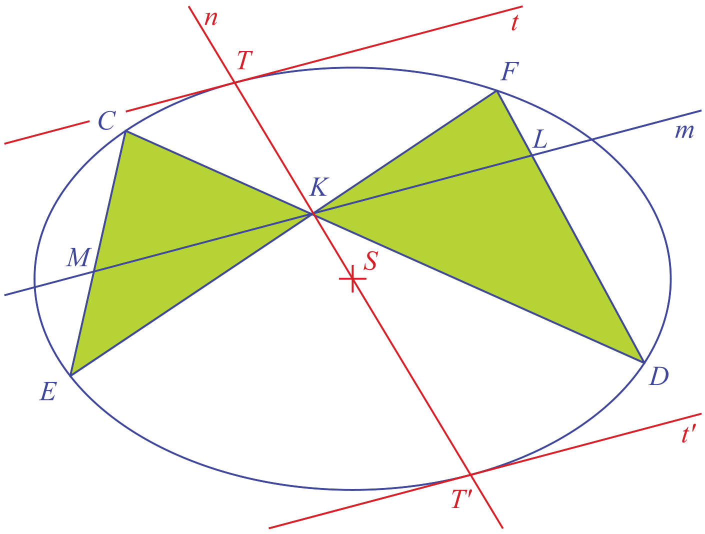
V případě, že by přímka p byla tečnou kružnice k, nebylo by možné, aby body C, D, E, F byly navzájem různé. Právě jeden bod z dvojice bodů C, D, resp. právě jeden bod z dvojice bodů E, F by splynul s bodem K. Bylo by proto i $K = M = L$, tj. bod K by byl středem „úsečky“ ML nulové délky.

3.7. Věta o motýlovi pro regulární kuželosečky

Větu o motýlovi lze pozměnit také tak, že místo kružnice budeme uvažovat jakoukoliv regulární kuželosečku a k určení polohy bodu K využijeme průměr kuželosečky. *Průměrem elipsy*, resp. *hyperboly* přitom budeme nazývat libovolnou přímku procházející jejím středem a *průměrem paraboly* libovolnou přímku rovnoběžnou s její osou. Nechť m je libovolná přímka a T, T' jsou body dotyku tečen elipsy, resp. hyperboly s ní rovnoběžných, potom průměr $n = TT'$ příslušné kuželosečky nazveme *sdružený s přímkou* m. Jestliže průměr n paraboly prochází bodem dotyku T její tečny rovnoběžné s danou přímkou m, potom průměr n nazveme *sdružený s přímkou* m.

Věta 8. *Nechť je dána regulární kuželosečka $\mathcal{K}$ a přímka m, která není její tečnou. Nechť n je průměr kuželosečky $\mathcal{K}$ sdružený s přímkou m, K je průsečík přímek m, n a C, D, E, F jsou navzájem různé body kuželosečky $\mathcal{K}$ takové, že přímky CD, EF procházejí bodem K. Jsou-li M, L průsečíky přímek CE, DF s přímkou m, potom je bod K středem úsečky ML.*

Jelikož bychom stěží hledali elementární důkaz poslední věty, který by se nevymykal v článku dosud uvedeným, nebudeme zde poslední větu dokazovat.[9] Připojme však obr. 15, na němž je kuželosečkou $\mathcal{K}$ elipsa. Ilustrace příslušející parabole a hyperbole jsou dostupné v [16], kde je možné zhlédnout také ilustrace pro „klamkinovskou" verzi zobecnění věty 1 pro regulární kuželosečky.



Obr. 15. Věta o motýlovi pro elipsu

4. Závěr

Poslední dosud napsanou větou jsme otevřeli otázku, zda lze výše uvedená zobecnění kombinovat, tj. zda platí zobecnění určitého zobecnění. Již jsme prozradili, že lze zobecnění popsané ve větě 8 (regulární kuželosečky) rozšířit způsobem představeným ve větě 3 (Klamkin). I toto „zobecnění zobecnění" je možné dále rozšířit například podle věty 2 (dva motýli). Přemýšlení nad otázkou, jaké všechny platné kombinace tvrzení existují, ponecháváme na čtenáři. Dalším směrem v objevování „lepidoptericko-matematických" zajímavostí je samozřejmě studium těch zobecnění, která v článku uvedena nebyla.

[9] Zájemce o ověření věty odkazujeme na článek [19].

L i t e r a t u r a

[1] Bezverkhnyev, Y.: *Haruki's lemma and a related locus problem.* Forum Geom. *8* (2008), 63–72.

[2] Bogomolny, A.: *Interactive mathematics miscellany and puzzles: William Wallace proof of the butterfly theorem* [online]. Dostupné z: `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/WilliamWallaceButterfly.shtml`

[3] Bogomolny, A.: *Interactive mathematics miscellany and puzzles: The butterfly theorem* [online]. Dostupné z: `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml`

[4] Bogomolny, A.: *Interactive mathematics miscellany and puzzles: A better butterfly theorem* [online]. Dostupné z: `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/BetterButterfly.shtml`

[5] Celli, M.: *A proof of the butterfly theorem using the similarity factor of the two wings.* Forum Geom. *16* (2016), 337–338.

[6] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: *Geometry revisited.* Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[7] Craik, A. D. D., O'Connor, J. J.: *Some unknown documents associated with William Wallace (1768–1843).* BSHM Bull. *26* (2011), 17–28.

[8] Čerin, Z.: *A generalization of the butterfly theorem from circles to conics.* Math. Commun. *6* (2001), 161–164.

[9] Donaldo, C.: *A proof of the butterfly theorem using Ceva's theorem.* Forum Geom. *16* (2016), 185–186.

[10] Klamkin, M. S.: *An extension of the butterfly problem.* Math. Mag. *38* (1965), 206–208.

[11] Kung, S.: *A butterfly theorem for quadrilaterals.* Math. Mag. *78* (2005), 314–316.

[12] Prasolov, V. V.: *Problems in planimetry.* Nauka, Moscow, 1986.

[13] Shklyarsky, O., Chentsov, N. N., Yaglom, I. M.: *Selected problems and theorems of elementary mathematics.* Moscow, 1952.

[14] Sledge, J.: *A generalization of the butterfly theorem.* J. Undergraduate Math. *5* (1973), 3–4.

[15] Sliepčević, A.: *A new generalization of the butterfly theorem.* J. Geom. Graph. *6* (2002), 61–68.

[16] Štěpánová, M.: *Věta o motýlech.* In: Cesty k matematice III, J. Hromadová, A. Slavík (eds.), MatfyzPress, Praha, 2018, 103–124.

[17] Tran Thúc Minh Trí: *Mathematics stack exchange: Generalized butterfly theorem* [online]. Dostupné z: `https://math.stackexchange.com/questions/2640237/generalized-butterfly-theorem`

[18] Volenec, V.: *A generalization of the butterfly theorem.* Math. Commun. *5* (2000), 157–160.

[19] Volenec, V.: *The butterfly theorem for conics.* Math. Commun. *7* (2002), 35–38.