# Naše soutěž

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 93 (2018), No. 4, 53–57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147579

# Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže.* Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. března 2019* na adresu redakce.

**Úloha 75** Jistý jazyk používá pouze dva různé znaky $a$, $b$. V tomto jazyce jsou přípustná jen taková slova, v nichž mohou stát vedle sebe nejvýše dva stejné znaky. Označíme-li $p_n$ počet přípustných slov délky $n$, $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že platí

$$p_{n+3} = 2p_{n+1} + p_n, \quad p_1 = 2,\ p_2 = 4,\ p_3 = 6.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

**Úloha 76** *Loďky*

Na hladině vody jsou dvě loďky v klidu záděmi u sebe. V každé sedí chlapec. Chlapec na první loďce o celkové hmotnosti $m_1$ tlačí pádlem konstantní silou po dobu $\Delta t$ do druhé loďky o celkové hmotnosti $m_2$. Druhá loďka tak dosáhne vzhledem k hladině vody rychlosti o velikosti $v_2$. Určete

a) konečnou velikost vzájemné rychlosti $v$ obou loděk,

b) velikost síly $F$, kterou chlapec působil,

c) změnu vzdálenosti $\Delta d$ mezi loďkami během silového působení chlapce,

d) práci $W$, kterou chlapec během působení síly $F$ vykonal,

e) poměr kinetických energií druhé a první loďky.

Odporové síly zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro $m_1 = 240$ kg, $m_2 = 160$ kg, $v_2 = 0{,}90\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\Delta t = 1{,}5$ s.

(*Josef Jírů*)

## Řešení úloh z čísla 1/2018

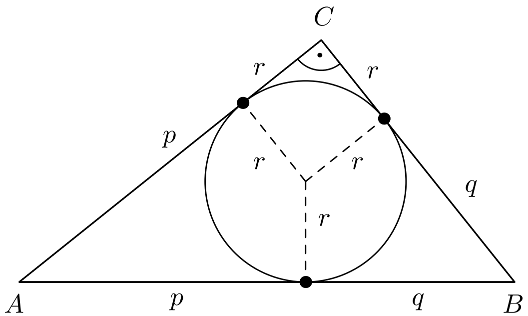
**Úloha 69** Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, které mají stejnou číselnou hodnotu obsahu i obvodu.

(*Jaroslav Zhouf*)

*Řešení:* V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ s přeponou $AB$ je vepsána kružnice s poloměrem $r$. Body dotyku této kružnice vytvoří na stranách trojúhelníku úseky délek $p$, $q$, $r$ podle obr. 1. Obsah trojúhelníku ABC je roven

$$S(ABC) = \frac{(p+r)(q+r)}{2} = \frac{pq+(p+q+r)r}{2} = \frac{pq+S(ABC)}{2},$$

odkud je $S(ABC) = pq$.




Obr. 1

Podle zadání úlohy tedy hledáme taková čísla $p$, $q$, $r$, aby platilo

$$pq = 2(p+q+r).$$

Nechť je např. $a \leq b < c$. Pak je $r < q \leq p$. Také je $pq = 2(p+q+r) < < 6p$, odkud dostaneme $q < 6$.

Jelikož je číslo $c+b-a = 2p$ celé, je číslo $p$ celé (typ I), nebo je to zlomek se jmenovatelem 2 (typ II). Stejně tak z rovností $c+a-b = 2q$ a $a+b-c = 2r$ vyvodíme, že i čísla $q$, $r$ jsou celá nebo jsou to zlomky se jmenovatelem 2.

Jelikož je číslo $a = p+q$ celé, jsou čísla $p$, $q$ stejného typu. Stejně tak jsou stejného typu čísla $q$, $r$ a také čísla $p$, $r$.

Z rovnosti $pq = 2(p+q+r)$ v případě obou typů plyne, že číslo $pq$ je celé, takže musí být celá i čísla $p$ a $q$, takže i číslo $r$ je celé.

Hledané řešení celé úlohy je v této tabulce:

| $q$ | $r$ | $p$ | $a$ | $b$ | $c$ | poznámka |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | neex. | – | – | – | není řešení |
| 3 | 1 | 8 | 4 | 9 | 11 | není pravoúhlý |
| 3 | 2 | 10 | 5 | 12 | 13 | je řešení |
| 4 | 1 | 5 | 5 | 6 | 9 | není pravoúhlý |
| 4 | 2 | 6 | 6 | 8 | 10 | je řešení |
| 4 | 3 | 7 | 7 | 10 | 11 | není pravoúhlý |
| 5 | 1 | 4 | – | – | – | není pravoúhlý |
| 5 | 2 | $\notin \mathbb{N}$ | – | – | – | není řešení |
| 5 | 3 | $\notin \mathbb{N}$ | – | – | – | není řešení |
| 5 | 4 | 6 | 9 | 10 | 11 | není pravoúhlý |

*Závěr*: Existují pouze dva pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, které mají číselně stejný obsah i obvod. Jsou to trojúhelníky s délkami stran 5, 12, 13 a 6, 8, 10.

**Úloha 70** *Pohyb náboje*

Náboj vystřelený z povrchu Země se roztrhl v nejvyšším bodě dráhy na dvě části těchže hmotností. Za 2,0 s po roztržení dopadla část na povrch Země ve vzdálenosti 1 000 m od místa výstřelu, přesně pod místem, kde došlo k výbuchu. V jaké vzdálenosti od místa výstřelu dopadla druhá část náboje?

Odpor prostředí zanedbejte, povrch Země považujte za vodorovnou rovinu. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(*Ivo Volf*)

*Autorské řešení:*

Označme $t$ dobu výstupu náboje do nejvyššího bodu parabolické dráhy. V tomto bodě má rychlost náboje jen vodorovnou složku $v_x$, která se po dobu výstupu neměnila. Označme dále $l$ vodorovnou vzdálenost vrcholu paraboly od místa výstřelu, takže $v_x = \frac{l}{t}$. Ihned po roztržení měla první část náboje rychlost nulovou, druhá část měla vodorovnou rychlost $v_1$. Měl-li náboj hmotnost $m$, dostáváme ze zákona zachování hybnosti

$$mv_x = \frac{m}{2}v_1,$$

odtud

$$v_1 = 2v_x = 2\frac{l}{t}.$$

Při pohybu druhé části náboje jde o vodorovný vrh s počáteční rychlostí $v_1$, která se za pohybu nemění. Pohyb trvá dobu $t$, poněvadž doba výstupu je rovna době pádu, takže druhá část náboje dopadne na Zem ve vodorovné vzdálenosti $l_1$ od vrcholu paraboly, přičemž

$$l_1 = v_1 t = 2l$$

a vzdálenost místa dopadu od místa výstřelu je

$$L = l + l_1 = 3l.$$

Pro danou hodnotu je $L = 3000$ m. Tato vzdálenost tedy na době $t$ nezávisí.

### Stav soutěže po 68 soutěžních úlohách

Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 70,5 b., Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 b., Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 b., Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 b., Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 b., Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 b., Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 b., Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 b., Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 b., Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 b., Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 b., Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 b., Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 b., Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 b., Marian Poljak (GJŠ, Přerov) – 15 b., Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 b., Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 b., Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 b., Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 b., Matouš Bílek (GJŠ, Přerov) – 10 b., Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 b., Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 b., Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 b., Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 b., Libor Drozek (G, Holešov) – 9 b., Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 b., Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 7,5 b., Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 b., Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 b., Benedikt Bareš (G Dobruška) – 5 b., Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 b., Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 b., Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 b., Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 b., Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 b., Jan

Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 b., Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 b., Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 b., Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 b., Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 b., Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 b., Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 b., Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 4,5 b., Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 b., Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 b., Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 b., Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b., Václav Skála (G, Klatovy) – 1 b., Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 b., Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b.

## VÝZVA

Redakční rada časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální informuje své čtenáře, případně další zájemce, že chce změnit formu rubriky NAŠE SOUTĚŽ. Doposud šlo o rubriku soutěžní, do níž se sice postupně zapojilo poměrně hodně řešitelů, ale přece jen bychom jich chtěli zapojit mnohem více.

**Chceme, aby se čtenáři mohli prezentovat svými úlohami, které rádi vložíme do rubriky jako soutěžní úlohy.** Soutěž bude probíhat stejně jako doposud, ale pole autorů úloh tak bude pestřejší. Objeví se jistě nové zajímavé problémy, které by jinak možná „zapadly“.

Tedy o co vás prosíme. **Pošlete nám své originální úlohy, i s řešeními**, úlohy posoudíme **a v případě, že je otiskneme, uvedeme vaše jméno coby autora.**

Čtenáři budou jistě dále posílat svá řešení a tabulka všech řešitelů se bude rozšiřovat.

Děkujeme, že se zapojíte.

Redakční rada Rozhledů