Rozhledy matematicko-fyzikální

60. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 3, 16–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147464

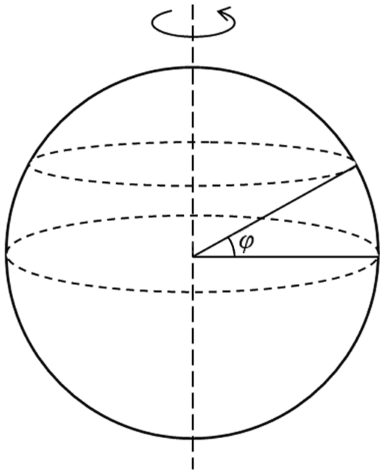
60. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Tíhová síla na povrchu planety

Pevná planeta má tvar koule s radiálním gravitačním polem. Na těleso umístěné na povrchu planety působí gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$. Planeta rotuje kolem své osy tak, že velikost setrvačné odstředivé síly F_{s0} působící na těleso umístěné na rovníku a velikost gravitační síly F_g působící na totéž těleso splňuje vztah $F_{s0} = kF_g$, kde $k \in \langle 0; 1\rangle$. Označme $\varphi \in \langle 0; 90°\rangle$ „zeměpisnou šířku“ polohy tělesa, tj. úhel mezi spojnicí tělesa se středem planety a rovinou rovníku. Výslednice gravitační síly F_g a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_s$ působící na těleso v libovolném místě povrchu planety je tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$.



Obr. 1

a) Vyjádřete velikost tíhové síly F_G působící na dané těleso na povrchu v závislosti na úhlu φ a určete její minimální velikost $F_{G\,\mathrm{min}}$ a maximální velikost $F_{G\,\mathrm{max}}$.

b) Vyjádřete závislost velikosti úhlu α mezi tíhovou a gravitační silou působící na dané těleso na povrchu na úhlu φ.

c) Určete úhel φ_1, kde je velikost úhlu α maximální, a určete tuto maximální velikost $\alpha_{\max}$.

Úlohy a), b) a c) řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $k = \frac{1}{3}$.

d) Použijte uvedený model pro planetu Jupiter a zjistěte hodnotu k, minimální velikost $g_{\min}$ a maximální velikost $g_{\max}$ tíhového zrychlení na povrchu, velikost maximálního úhlu $\alpha_{\max}$ mezi tíhovou a gravitační silou a „zeměpisnou“ šířku φ_1, kde tato situace nastane.

Jupiter považujte za kouli o poloměru $R = 69\,900$ km. Hmotnost Jupitera je $M = 1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg. Siderická doba rotace Jupitera kolem své osy je $T = 35\,700$ s. Gravitační konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$.

2. Sud s asfaltem

Otevřený sud má tvar válce a je vyroben z železného plechu. Výška sudu H je 1,5krát větší než jeho průměr. Je-li sud zcela naplněn asfaltem, je hmotnost asfaltu 16krát větší než hmotnost prázdného sudu. Hustota železa je ρ_0, hustota asfaltu ρ.

a) Určete tloušťku d železného plechu, z něhož je sud vyroben.

b) Sud máme postavený na dně. Zvolme svislou osu y s počátkem na dně sudu a označme h proměnnou výšku vodorovné hladiny asfaltu v sudu. Při jaké výšce h_0 hladiny asfaltu v sudu je těžiště sudu s asfaltem nejníže? Určete též tuto minimální výšku těžiště $y_{\min}$.

Řešte obecně, pak pro hodnoty $\rho = 1\,300\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\rho_0 = 7\,900\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tloušťka plechu je zanedbatelná vzhledem k rozměrům sudu.

3. Tekutý dusík

Na jedné mezinárodní fyzikální olympiádě byla soutěžícím předložena experimentální úloha, v níž měřili měrné skupenské teplo varu kapalného dusíku. K dispozici měli tekutý dusík (při teplotě varu) v polystyrénové nádobě uzavřené víčkem s větracím otvorem, stopky, váhy a hliníkový váleček.

V naší úloze vyjdeme z výsledků obdobného měření. Teplota varu dusíku je $T_\mathrm{v} = 77{,}4$ K. Hliníkové těleso má hmotnost $m_0 = 14{,}1$ g a teplotu okolního vzduchu $T_1 = 294$ K. Na digitální váhy postavíme polystyrénovou nádobu s dusíkem, který se při varu vypařuje, čímž jeho hmotnost klesá. Po jisté době těleso do nádoby s dusíkem opatrně ponoříme. Následuje prudký var do okamžiku, než teplota tělesa klesne na teplotu varu dusíku. Poté pokračuje odpařování dusíku jako před vnořením tělesa. Okamžitou hmotnost nádoby s dusíkem sledujeme na displeji digitálních vah.

Na počátku pokusu spustíme vynulované stopky a necháme běžet po celou dobu měření. Vždy po změně hmotnosti o 1,0 g čas zaznamenáme. Takto naměříme šest časů před vnořením tělesa a dalších šest časů od libovolného okamžiku po dosažení tepelné rovnováhy mezi tělesem a dusíkem.

Zjištěnou časovou závislost hmotnosti nádoby s dusíkem (v druhé fázi již po odečtení hmotnosti hliníkového tělesa) udává tabulka:

$\frac{m}{\mathrm{g}}$	203,0	202,0	201,0	200,0	199,0	198,0	181,9	180,9	179,9	178,9	177,9	176,9
$\frac{\tau}{\mathrm{s}}$	0	28	56	83	112	140	271	300	330	360	390	419

Měrná tepelná kapacita hliníku je při použitém teplotním rozdílu významně závislá na teplotě, s rostoucí teplotou roste. Tuto závislost budeme aproximovat polynomem 4. stupně

$$c = AT^4 + BT^3 + CT^2 + DT + E,$$

kde

$A = -4{,}337 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-5}}$, $\quad B = 3{,}693 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-4}}$,
$C = -0{,}119\,9\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-3}}$, $\quad D = 19{,}38\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-2}}$,
$E = -585{,}1\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Teplo odevzdané hliníkovým tělesem při ochlazení z teploty T_1 na teplotu T_v pak je

$$Q = -m_0 \int_{T_1}^{T_v} c\,\mathrm{d}T = m_0 \int_{T_v}^{T_1} c\,\mathrm{d}T.$$

a) Určete z polynomu lineární interpolací přibližné teplo Q', které váleček dusíku odevzdal. Lineární interpolace znamená použít aritmetický průměr měrných tepelných kapacit pro krajní teploty.
b) Určete integrací polynomu teplo Q, které těleso dusíku odevzdalo.
c) Sestrojte bodový graf závislosti hmotnosti nádoby s dusíkem na čase. Každou skupinu šesti vynesených bodů proložte přímkou. Z grafu odečtěte změnu hmotnosti Δm dusíku během ochlazení tělesa a určete měrné skupenské teplo varu l_v dusíku.

Úlohu je vhodné řešit pomocí vhodného tabulkového kalkulátoru, např. Excelu.

4. Spektrometr

Součástí spektrometru je hranol s lámavým úhlem $\varphi = 60°$. Na jeho boční stěnu dopadá pod úhlem $\alpha = 30°$ paprsek bílého světla. Index lomu pro světlo fialové o vlnové délce $\lambda_V = 400$ nm je $n_V = 1{,}46$, pro světlo červené o vlnové délce $\lambda_R = 700$ nm je to $n_R = 1{,}42$. Určete:

a) rozdíl deviací (odchylek od původního směru) $\delta_V - \delta_R$ fialového a červeného světla,

b) mřížkovou konstantu b mřížky, kterou můžeme hranol nahradit a na kterou světlo dopadá kolmo, kde by rozdíl odchylek mezi červeným a fialovým světlem ve spektru 1. řádu $\alpha_R - \alpha_V$ byl stejný jako rozdíl deviací $\delta_V - \delta_R$ optického hranolu.

Úlohu je vhodné řešit pomocí vhodného tabulkového kalkulátoru, např. Excelu.

5. Zvětšení úsečky

Na optické ose tenké spojné čočky s ohniskovou vzdáleností f leží malá tyčinka, jejíž rozměr je v porovnání s ohniskovou vzdáleností zanedbatelný. Vzdálenější konec tyčinky leží ve vzdálenosti $a_1 = 20$ cm od čočky. Obraz tyčinky za čočkou je 9krát větší než tyčinka ($k = 9$).

a) Jaká je ohnisková vzdálenost čočky?

b) Jak se změní velikost obrazu tyčinky, posuneme-li tyčinku o vzdálenost $\Delta a = 5$ cm směrem od čočky?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Při řešení můžete použít přibližný vztah

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{pro } |x| \ll 1.$$

6. Rozpad supertěžkých jader

Při studiu supertěžkých prvků se pro každé vyprodukované jádro měří doba od jeho vzniku do rozpadu (doba života konkrétního jádra). Tato veličina se pro jednotlivá jádra liší, a tak lze pro daný izotop určit pouze střední dobu života τ a také poločas rozpadu $T_{1/2}$ (čas, za který se rozpadne polovina jader). Doba života konkrétního jádra je náhodná veličina, kterou budeme simulovat házením hrací kostkou.

Nejprve se seznámíme s rozdělením pravděpodobnosti náhodné veličiny a střední hodnotou náhodné veličiny.

První experiment. Hod hrací kostkou. Náhodnou veličinou je číslo X, které je po zastavení kostky nahoře. Tato náhodná veličina je diskrétní povahy a nabývá jen konečného počtu šesti hodnot. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je funkce, která v daném experimentu každé hodnotě náhodné veličiny přiřazuje pravděpodobnost, s jakou tato hodnota nastává. Pokud je kostka pravidelná a házíme „poctivě“, bude mít padnutí každého čísla stejnou pravděpodobnost, a to 1/6. Takové rozdělení se nazývá *rovnoměrné*. Střední hodnota μ náhodné veličiny X se určí

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Hodnota veličiny se násobí příslušnou pravděpodobností a tyto součiny vypočítané pro všechny možné hodnoty se sčítají. Tak se počítá střední hodnota náhodné veličiny pro každé diskrétní rozdělení, nejen rovnoměrné. Střední hodnota náhodné veličiny X představuje číslo, ke kterému by se blížil aritmetický průměr hodnot této náhodné veličiny při velkém počtu realizace experimentu.

Druhý experiment. Házíme jednou kostkou tak dlouho, až padne šestka (jako by se padnutím šestky kostka rozpadla a nešlo v hodech pokračovat). Náhodná veličina X je počet hodů potřebných na padnutí šestky (nazývejme ji doba života kostky). Počet hodů potřebných k dosažení šestky může být překvapivě vysoký, teoreticky nekonečný. Náhodná veličina X je diskrétní, ale může nabývat hodnot všech přirozených čísel. Intuitivně cítíme, že nejde o rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti. Vysoké hodnoty náhodné veličiny X mají jistě menší pravděpodobnost než nízké hodnoty. O jaké rozdělení pravděpodobnosti jde, určíme z úvahy, že kostka nemá paměť.

Pravděpodobnost, že v konkrétním hodu padne šestka, je $p_{\text{teor}} = \frac{1}{6}$ (že nepadne šestka, je $1 - p_{\text{teor}} = \frac{5}{6}$) a je stále stejná. Tedy v prvním hodu, ve druhém hodu a v každém dalším také. Hody jsou na sobě nezávislé pokusy, a pro nezávislé pokusy platí násobení pravděpodobností (viz literatura uvedená v závěru úlohy, kapitola Nezávislé pokusy).

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka v 1. hodu ($X = 1$), je

$$p_1 = \frac{1}{6} = 0{,}166\,7.$$

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka ve 2. hodu ($X = 2$), je

$$p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}138\,9.$$

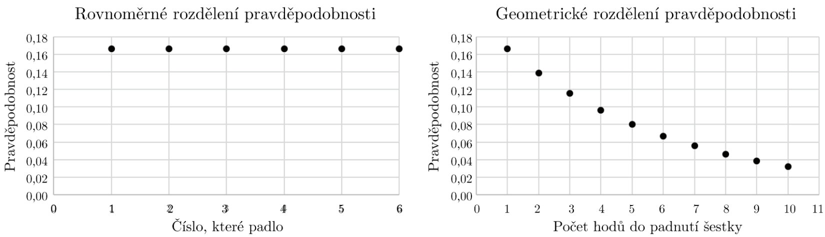
Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka ve 3. hodu ($X = 3$), je

$$p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}115\,7.$$

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka v hodu t ($X = t$), je

$$p_t = \left(\frac{5}{6}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Toto rozdělení se nazývá *geometrické*. Je vidět, že s rostoucí hodnotou t pravděpodobnost klesá. Geometrické rozdělení v grafu můžeme vidět jako body na klesající exponenciální funkci.



Obr. 2

Odvodit střední hodnotu μ geometrického rozdělení není již tak jednoduché, protože veličina X nabývá hodnot od jedničky do nekonečna. Z odvození (které pro složitost neuvádíme) vychází jednoduchý výsledek

$$\mu = \frac{1}{p}, \tag{1}$$

kde p je pravděpodobnost, že v konkrétním pokusu nastane sledovaný jev (zde padnutí šestky). Pro $p_{\mathrm{teor}} = \frac{1}{6}$ vypočítáme střední dobu života kostky $\mu = 6$.

Situace s čekáním na šestku již připomíná zákon radioaktivního rozpadu

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet nestabilních jader v čase $t = 0$, N je počet dosud nerozpadlých jader v čase t a λ je přeměnová (rozpadová) konstanta.

Po úpravě

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

lze zlomek chápat jako pravděpodobnost nerozpadnutí jádra v časovém intervalu $(0; t)$. Se zvětšujícím se časem pravděpodobnost, že nedojde k rozpadu, exponenciálně klesá podobně jako při házení kostkou. Čas se však při sledování jader mění spojitě, zatímco počet hodů je diskrétní.

Ze zákona radioaktivního rozpadu lze odvodit vztah pro střední dobu života τ jádra

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \tag{2}$$

který se podobá našemu vztahu (1) pro experiment s kostkou. Jak již bylo zmíněno výše, střední doba života τ představuje hodnotu, ke které by se blížil aritmetický průměr dob života získaný měřením rozpadu velkého počtu nestabilních jader.

Poznámka: Rozdělení dob života konkrétních jader je spojité a doba života může nabývat libovolné hodnoty. Řídí se proto exponenciálním, nikoli geometrickým rozdělením pravděpodobnosti.

U supertěžkých prvků se daří vyprodukovat jen několik málo jader a změřit u nich dobu života. Průměrná doba života je pak nejlepším odhadem τ a z něj se podle vztahu (3) určí odhad poločasu rozpadu jádra

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2. \tag{3}$$

Praktické úkoly: V následujících úkolech budeme rozpad nestabilních jader simulovat házením běžnou (zpočátku) dřevěnou hrací kostkou. Při zpracování dat určíme střední dobu μ života kostky a pravděpodobnost p padnutí šestky. Místo sedmi hracích kostek představujících 7 atomů stačí jedna hrací kostka, se kterou začneme házet a budeme čekat na padnutí šestky. Po padnutí šestky se ale kostka reálně nerozpadne, proto můžeme pokračovat v házení a čekat na druhé padnutí šestky atd. až do sedmého padnutí.

a) Podle experimentu 2 naházejte hrací kostkou první sérii 7 hodnot veličiny X. Tomu odpovídá rozpad řekněme sedmi vyprodukovaných jader oganessonu. Ze získaných hodnot náhodné veličiny X

vypočtěte odhad střední doby života kostky μ a odhad pravděpodobnosti padnutí šestky p.

b) Proveďte ještě tři takové série a z každých sedmi hodnot veličiny X určete opět odhad μ a p. Výsledky všech čtyř sérií uspořádejte přehledně do tabulky.

c) Porovnejte výsledky mezi jednotlivými sériemi. Porovnejte, o kolik procent se čtyři vypočtené pravděpodobnosti odlišují od teoretické pravděpodobnosti $p_{\mathrm{teor}} = \frac{1}{6}$.

d) Spojte čtyři série do jedné (28 hodnot veličiny X) a znovu určete pravděpodobnost p padnutí šestky. O kolik procent se nyní liší pravděpodobnost od teoretické hodnoty p_{teor}?

e) Nyní upravte hrací kostku a udělejte z ní kostku falešnou. Do středu stěny s jedničkou (jedna tečka) vyvrtejte otvor a zalepte malou matku tak, aby nevyčnívala. Do kostky o hraně 15 mm je vhodná matka se závitem 4 mm. S falešnou kostkou zopakujte úkoly a), b) a d) (kromě porovnání s teoretickou hodnotou pravděpodobnosti, kterou nyní neznáme). Výsledky všech čtyř sérií uspořádejte přehledně do tabulky. Porovnejte pravděpodobnosti p mezi jednotlivými sériemi a také výsledky ze spojených sérií řádné a falešné kostky.

f) Jaké závěry můžeme z úkolů a) až e) učinit?

Literatura: E. Calda, V. Dupač, Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.

7. Cyklotron

V Laboratoři jaderných reakcí SÚJV v Dubně pracuje izochronní cyklotron těžkých iontů U400M. Umožňuje urychlovat např. ionty argonu ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}^{11+}$ na kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = 1\,520$ MeV. Relativní atomová hmotnost iontů je 39,962 383 12, svazek se vyvádí na poloměru $r_{\max} = 1{,}750$ m, urychlující napětí mezi duanty je 150 kV. Klidová energie elektronu je 0,511 MeV, klidová energie odpovídající atomové hmotnostní jednotce je 931,494 MeV, rychlost světla $3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Vypočtěte klidovou energii E_0 používaných iontů argonu. Jaký je poměr E_0 a kinetické energie E_{k}?

Z výsledku a) plyne, že neuděláme příliš velkou chybu, když v dalších úlohách nebudeme uvažovat speciální teorii relativity. Výpočty se značně zjednoduší, když magnetické pole v komoře budeme považovat za homogenní. Řešení v úlohách b), c), d) proveďte nejprve obecně s využitím veličin E_0 a E_k, až pak určete číselné výsledky.

b) Vypočtěte frekvenci obíhání iontů.

c) Vypočtěte magnetickou indukci pole, které zakřivuje trajektorii iontů.

d) Předpokládejme ideálně, že iont vstupuje do mezery mezi duanty v okamžiku, kdy napětí je v amplitudě. Kolikrát v tomto případě proletí iont mezeru mezi duanty, než je urychlen na požadovanou energii?

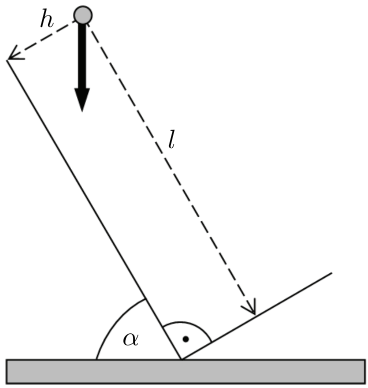
   Poznámka: Reálně je počet průletů vždy vyšší.

e) Jak dlouho trvá pro situaci popsanou v d) urychlení iontu na konečnou energii?

KATEGORIE B

1. Odraz kuličky

Nad dvěma kovovými rovinami, které jsou navzájem kolmé a levá z nich svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 60°$, je umístěna malá kovová kulička tak, že její vzdálenost od levé roviny je $h = 0{,}20$ m a od pravé roviny je vzdálena o $l = 1{,}00$ m (obr. 1). Kuličku pustíme tak, že se pohybuje volným pádem.



Obr. 1

Určete:

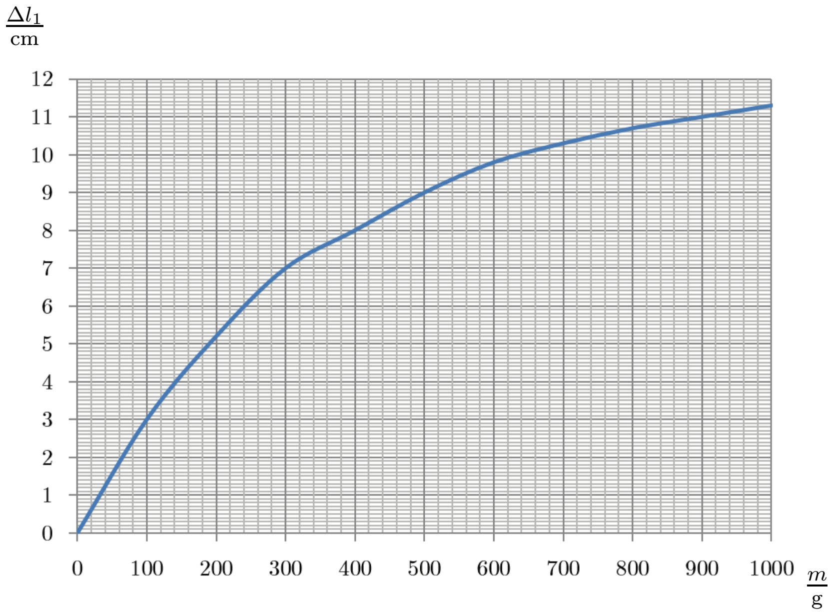
a) velikost rychlosti v_0, jakou kulička dopadne na levou rovinu, a dobu jejího letu t_0, než dopadne na levou rovinu,

b) za jakou celkovou dobu T a v jaké vzdálenosti d od hrany spojující obě roviny kulička poprvé dopadne na pravou rovinu.

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Odraz kuličky od kovové roviny je dokonale pružný, odpor vzduchu proti pohybu kuličky můžeme zanedbat.

2. Guma a pružina

Na jeden konec silnější gumy zavěšujeme postupně závažíčka a měříme její prodloužení. Výsledek měření je zaznamenán v grafu.



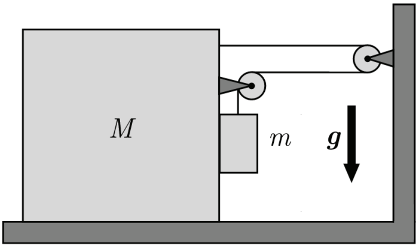
Obr. 2

a) Gumu připojíme na konec stejně dlouhé pružiny o tuhosti $k = 50\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. Nakreslete graf závislosti prodloužení systému pružina–guma na hmotnosti zavěšeného závaží.

b) Gumu připevníme vedle stejně dlouhé pružiny a na pevnou spojnici zavěšujeme závaží tak, aby spojnice zůstávala vodorovná. Nakreslete graf závislosti prodloužení systému pružina–guma na hmotnosti zavěšeného závaží. Hmotnost pružiny a gumy samotné můžeme zanedbat.

3. Dvě tělesa a dvě kladky

V systému (obr. 3) se těleso o hmotnosti M může bez tření pohybovat po vodorovné podložce. Součinitel tření mezi tělesy o hmotnostech M a m je f. Nit je lehká a pevná, hmotnost kladek je zanedbatelná. Tíhové zrychlení je g.



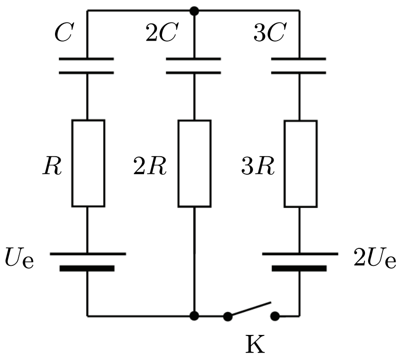
Obr. 3

a) Sestavte úplnou soustavu rovnic popisující pohyb obou těles.

b) Určete velikost síly, kterou je napínána nit, a velikost a směr zrychlení menšího tělesa.

4. Tři kondenzátory

Tři nenabité kondenzátory o kapacitách C, $2C$ a $3C$ zapojíme s rezistory o odporech R, $2R$ a $3R$ podle schématu k ideálním zdrojům s elektromotorickým napětím U_e a $2U_\mathrm{e}$. Klíč K je rozepnut.



Obr. 4

Určete:

a) napětí na kondenzátoru s kapacitou C po ustavení rovnováhy před sepnutím klíče K,

b) proud, který bude procházet odporem $2R$ v okamžiku těsně po zapnutí klíče K,

c) napětí na kondenzátoru s kapacitou C po ustavení rovnováhy v obvodu se zapnutým klíčem K.

5. Částice v elektrickém poli

Proton vlétne mezi rovnoběžné desky kondenzátoru, které mají délku $l = 5{,}0$ cm rychlostí $v = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 30°$ vzhledem k povrchu desek. Intenzita homogenního elektrického pole mezi deskami kondenzátoru má velikost $E = 600\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Náboj protonu má velikost $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, hmotnost protonu je $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Určete:

a) dobu letu t protonu v elektrickém poli,

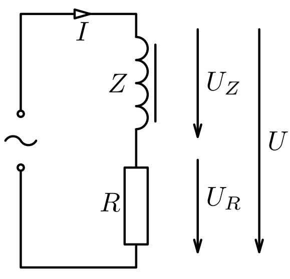
b) velikost a směr rychlosti protonu při jeho výstupu z elektrického pole,

c) vzdálenost d, o kterou se proton posunul vzhledem k deskám kondenzátoru.

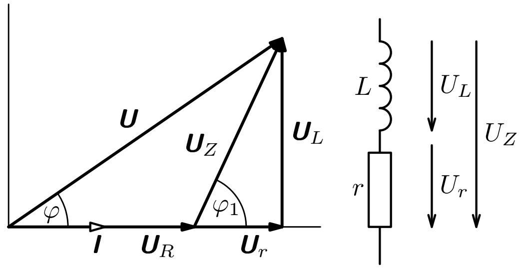
Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.

6. Praktická úloha: Měření v obvodu s tlumivkou

Některé spotřebiče jsou ke zdroji střídavého napětí připojeny sériově s tlumivkou – cívkou, která omezuje procházející proud (obr. 5). Vlastnosti takového obvodu můžeme popsat pomocí fázorového diagramu (obr. 6). Přitom předpokládáme, že skutečná cívka o impedanci Z se chová jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti L a rezistoru o rezistanci r. Celkové napětí předbíhá před proudem fázově o φ, napětí na cívce o φ_1.



Obr. 5



Obr. 6

Celkové napětí obvodu vyjádříme pomocí kosinové věty:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_Z^2 + 2U_R U_Z \cos\varphi_1} = I\sqrt{R^2 + Z^2 + 2RZ\cos\varphi_1}$$

Z toho

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z^2 + 2RZ\cos\varphi_1}}.$$

Pro výkon spotřebiče platí

$$P = RI^2 = \frac{RU^2}{R^2 + Z^2 + 2RZ\cos\varphi_1} =$$
$$= \frac{RU^2}{R^2 + Z^2 - 2RZ + 2RZ(1 + \cos\varphi_1)} =$$
$$= \frac{U^2}{\frac{1}{R}(R - Z)^2 + 2Z(1 + \cos\varphi_1)}.$$

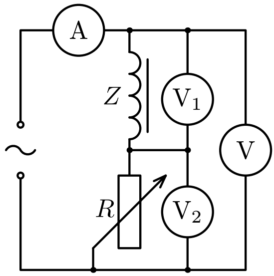
Budeme-li do obvodu s toutéž cívkou zapojovat různé spotřebiče, dosáhneme maximálního výkonu

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2Z(1 + \cos\varphi_1)}$$

při rezistanci $R = Z$.

Úkoly:

a) Sestavte obvod podle obr. 7. Použijte robustnější síťový transformátor s vstupním napětím 24 V, cívku z rozkladného transformátoru o 600 závitech s rovným jádrem, reostat o odporu 100 Ω, ampérmetr a tři stejné voltmetry (v nouzi vystačíme s jedním voltmetrem).



Obr. 7

b) Postupně po malých krocích zmenšujte odpor reostatu a údaje měřicích přístrojů zapisujte do tabulky. Z naměřených hodnot pokaždé vypočítejte odpor spotřebiče (reostatu) a jeho výkon.

I/A	U/V	U_R/V	U_Z/V	R/Ω	P/W

c) Sestrojte graf závislosti výkonu reostatu na jeho odporu a ověřte, že je maximální, když $R = Z$ (tj. když $U_R = U_Z$).

d) Pro případ, že $R = Z$, určete také celkový činný výkon $P_{\text{celk}} = UI\cos\varphi$ v obvodu a účinnost $\eta = P_{\max}/P_{\text{celk}}$ celého obvodu.

e) Z hodnot naměřených při maximálním výkonu spotřebiče určete indukčnost L ideální cívky a rezistanci r rezistoru, jejichž sériovým spojením bychom mohli danou skutečnou cívku nahradit.

7. Chybějící rezistory

Hrany krychle ABCDEFGH jsou obsazeny stejnými rezistory o velikosti R (obr. 8).

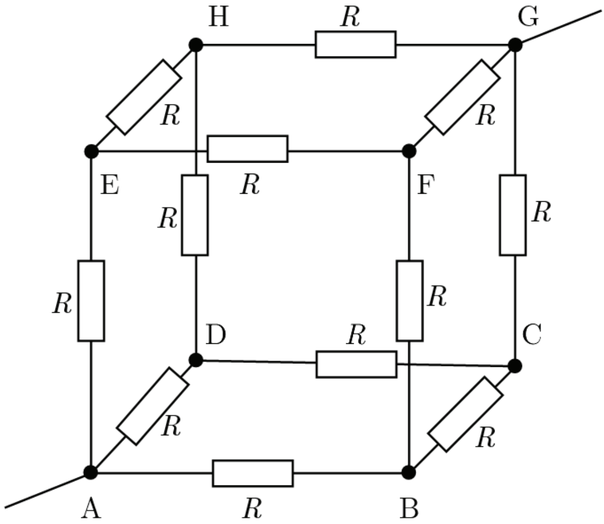
a) Jaký bude celkový odpor mezi body A a G, jestliže nahradíme rezistory mezi body A a E a mezi body C a G příčkou se zanedbatelným odporem?

b) Jaký proud bude procházet přívodními vodiči, víme-li, že většinou rezistorů protéká proud $I = 2$ A?

c) Jaký bude celkový odpor mezi body A a G, jestliže tentokrát příčkou se zanedbatelným odporem nahradíme tři rezistory, mezi body A a E, mezi body C a D a mezi body F a G?

d) Jaký proud bude procházet přívodními vodiči, víme-li, že většinou rezistorů protéká proud $I = 2$ A?

e) Jaký proud bude v obou případech procházet vodičem, který spojuje body A a E?



Obr. 8

KATEGORIE C

1. Tři turisté a jedno kolo

Karel, Luboš a Michal si naplánovali výlet z místa A do místa B, která jsou od sebe vzdálena $s = 22$ km. Pěšky jde každý z nich rychlostí $v_0 = 5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, na kole každý jede rychlostí $4v_0$. Když na jednom kole pojedou dva, pak jedou rychlostí $3v_0$.

a) Jak dlouho bude výlet trvat, když Karel nejprve převeze Luboše a pak se vrátí pro Michala, který mezitím šel pěšky?

b) Navrhněte způsob přepravy tak, aby doba výletu byla co nejkratší, a určete tuto dobu.

2. Tři válce

Těleso je složeno ze tří souosých válců ze stejného materiálu, různého průřezu a různé výšky. Těleso je zavěšeno na siloměru a ve směru osy postupně ponořováno do kapaliny. Závislost velikosti síly $\boldsymbol{F}$, kterou ukazuje siloměr, na hloubce ponoru tělesa, je zaznamenána v tabulce. Příčný průřez nejužšího válce je $S = 10\ \text{cm}^2$. Sestrojte graf závislosti vztlakové síly na hloubce ponoru a pomocí tabulky nebo grafu určete výšky a průřezy jednotlivých válců, hustotu kapaliny a hustotu materiálu, ze kterého jsou válce zhotoveny.

$\frac{h}{\text{cm}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{F}{\text{N}}$	61,6	61,3	61,0	60,7	60,4	60,1	59,8	59,5	59,2	58,9	58,6	58,0	57,4	56,8
$\frac{h}{\text{cm}}$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
$\frac{F}{\text{N}}$	56,2	55,6	55,0	54,4	54,3	54,2	54,1	54,0	53,9	53,8	53,7	53,7	53,7	

3. Sledování družic

V centru kosmického výzkumu jsou sledovány družice obíhající kolem Země a je zaznamenávána jejich poloha. U jedné z družic, obíhajících po kruhové dráze, bylo zjištěno, že se družice nacházela přesně nad rovníkem na 20° východní délky a na 160° východní délky. Nad severní i nad jižní polokoulí se družice dostává nejvýše nad 40° severní šířky a jižní šířky.

a) S jakou periodou T družice obíhá kolem středu Země?

b) V jaké vzdálenosti r a jakou rychlostí v družice obíhá kolem středu Země?

c) Kolem Země obíhá ve stejné rovině po stejně skloněné kruhové dráze jiná družice. Jaká je úhlová vzdálenost míst jejího přeletu nad rovníkem, jestliže se družice pohybuje úhlovou rychlostí o poloviční velikosti v porovnání s první družicí? V jaké vzdálenosti r_1 a jakou rychlostí v_1 obíhá druhá družice kolem středu Země?

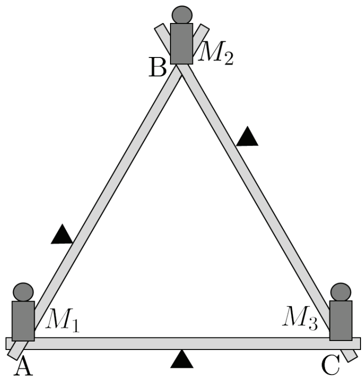
Oběžná doba Země kolem osy je $T_Z = 24$ h, poloměr Země je $R_Z = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, hmotnost Země je $M_Z = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, gravitační konstanta je $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

4. Tři páky se závažím

Tři páky zanedbatelné hmotnosti leží jedna na druhé tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník ABC. Dvě páky spočívají na podpěrách umístěných v jedné třetině jejich délky, třetí páka na podpěře umístěné v polovině její délky (obr. 1). V bodech A a B jsou umístěna závaží o hmotnosti $M_1 = M_2 = 8$ kg. V bodě C je umístěno závaží o neznámé hmotnosti M_3 tak, že celý systém je v rovnováze.

a) Určete, jaká může být hmotnost závaží M_3.

b) Určete velikosti sil F_{AB}, F_{BC} a F_{AC}, které působí na podpěry, pokud by byly hmotnosti M všech tří závaží stejné.



Obr. 1

5. Kalorimetry a součástky

Tepelně izolovaná nádoba – kalorimetr – je až po okraj plná vody o teplotě $t_1 = 19{,}0$ °C. Když do kalorimetru vhodíme jednu kovovou součástku o hustotě $\rho = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a teplotě $t = 99{,}0$ °C, část vody přeteče a teplota vody po ustavení rovnováhy stoupne na $t_2 = 32{,}2$ °C. Když pokus opakujeme se stejným množstvím stejně teplé vody, ale do kalorimetru vhodíme dvě stejné a stejně zahřáté součástky, bude výsledná teplota v kalorimetru $t_3 = 48{,}8$ °C.

a) Jaká je měrná tepelná kapacita c materiálu, z něhož jsou zhotoveny součástky?

b) Jaký je poměr hmotnosti vody v kalorimetru před vhozením součástky a hmotnosti kovové součástky?

c) Jaká by byla výsledná teplota t_4, kdybychom do kalorimetru místo dvou vhodili tři stejné a stejně zahřáté součástky?

Úlohy a) a b) řešte nejprve obecně, část c) řešte pouze číselně s použitím výsledku části a).

Měrná tepelná kapacita vody je $c_v = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, hustota vody je $\rho_v = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Ztráty tepla do okolí a tepelná kapacita samotného kalorimetru jsou zanedbatelné.

6. Praktická úloha: Měření povrchového napětí

Úkol: Porovnejte povrchové napětí destilované vody a vodného roztoku saponátu

a) metodou kapilární elevace,

b) odtrhovací metodou,

c) kapkovou metodou.

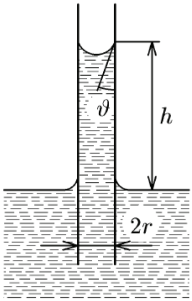
Měření proveďte při teplotě laboratoře. Povrchové napětí saponátového roztoku změřte při různých koncentracích (1 : 10 000, 1 : 1 000, 1 : 100) a výsledky porovnejte. Naměřené povrchové napětí čisté vody porovnejte s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Pomůcky: Dvě skleněné kádinky, saponátový prostředek na nádobí (např. Jar), destilovaná voda, kapilára, mikrometr, jehla, milimetrové měřítko, laboratorní váhy, stojan, skleněná trubička s nádobkou a kohoutem, závěsný kroužek (nebo kovový rámeček s nataženým drátkem), stoleček nad misku vah.

Provedení úlohy:

a) *Metoda kapilární elevace* je založena na porovnání tíhy G sloupce kapaliny vystouplé v kapiláře a síly F vyvolané povrchovým napětím, která tento sloupec udržuje v určité výšce nad okolní hladinou (obr. 2): $G = \pi r^2 h \varrho g$, $F = 2\pi r \sigma \cos\vartheta$. Jelikož úhel smáčení $\vartheta < 10°$, můžeme psát $\cos\vartheta \doteq 1$, $F \doteq 2\pi r\sigma$. Z rovnosti $F = G$ plyne

$$\sigma = \frac{h\varrho g r}{2}.$$



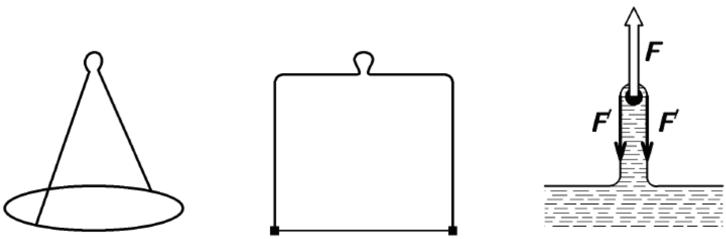
Obr. 2

Do kádinky naplněné zkoumanou kapalinou ponoříme svisle kapiláru, poněkud ji posuneme nahoru a změříme kapilární elevaci h. Průměr kapiláry $2r$ zjistíme pomocí jehly, kterou zasuneme do kapiláry a v místě označeném při okraji kapiláry změříme mikrometrem.

b) *Odtrhovací metoda* je založena na zjištění síly potřebné k odtržení povrchové blány ulpívající na kroužku (či rovném drátku) délky l vytahovaného z kapaliny, která jej smáčí (obr. 3). Kapalinová blána má dva povrchy a působí tedy silou

$$F = 2\sigma l,$$

kterou můžeme určit pomocí laboratorních vah.

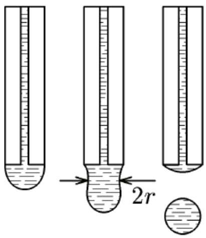


Obr. 3

Nad misku vah umístíme můstek s kádinkou, ve které je zkoumaná kapalina, a na konec vahadla zavěsíme kroužek nebo rámeček s drátkem a vyvážíme jej. Hladinu kapaliny v kádince upravíme tak, aby se nacházela asi 2 mm pod vyváženým kroužkem. Vychýlíme-li vahadlo, hladina zachytí kroužek a rovnováha se poruší. Sílu povrchového napětí určíme tárováním. Na druhou misku vah přidáme lehký kalíšek a na něj sypeme zvolna drobná tělíska (táru), až dojde k odtržení kroužku od hladiny vody nebo k vytažení tenkého kapalinového prstence nad hladinu saponátového roztoku. (Jako tárovací tělíska se hodí např. jáhly nebo hořčičné semínko.) Zvážíme hmotnost m samotného kalíšku s tělísky a určíme povrchové napětí

$$\sigma = \frac{mg}{2l}.$$

c) *Kapková metoda* měření povrchového napětí spočívá v určení poměru hmotností kapek dvou kapalin (měřené a srovnávací) při znalosti povrchového napětí srovnávací kapaliny. Ze silnostěnné skleněné trubičky necháme *velmi zvolna* odkapat stejný počet N kapek měřené i srovnávací kapaliny. Jejich celkové hmotnosti M_1, M_2 pak zvážíme.



Obr. 4

Tíhová síla působící na kapku v okamžiku odtržení od konce trubičky je rovna síle povrchového napětí:

$$\frac{M_1 g}{N} = 2\pi r \sigma_1, \quad \frac{M_2 g}{N} = 2\pi r \sigma_2, \quad \sigma_1 = \frac{M_1}{M_2}\sigma_2.$$

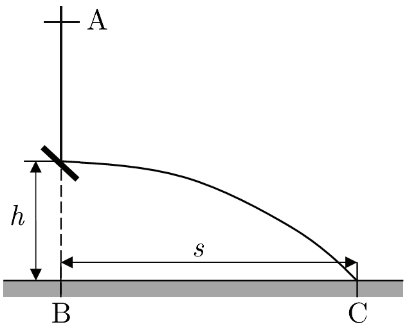
Jako srovnávací kapalinu zvolíme destilovanou vodu.

7. Odražená kulička

Malá kulička volně puštěná z bodu A dopadá na pevnou desku, upevněnou ve výšce $h = 1{,}20$ m nad vodorovným povrchem Země tak, že svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 45°$. Po dokonale pružném odrazu dopadá na povrch Země v bodě C ve vzdálenosti $s = 4{,}20$ m (obr. 5).

a) Určete celkovou dobu letu kuličky t.

b) Určete výšku H, ze které byla kulička puštěna. Úlohy a) a b) řešte nejprve obecně.



Obr. 5

c) V jaké výšce h_0 nad vodorovným povrchem Země musíme umístit odraznou desku, aby kulička doletěla do maximální vzdálenosti? Určete tuto maximální vzdálenost s_0.

KATEGORIE D

1. Vlak mezi zastávkami

Elektrický zastávkový vlak se rozjížděl se zrychlením $a_1 = 0{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, v okamžiku dosažení rychlosti $v_1 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ změnil velikost zrychlení na $a_2 = 0{,}32\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, s nímž zrychloval po dobu $t_2 = 25$ s. Dále se po dobu $t_3 = 2$ min 30 s pohyboval rovnoměrným pohybem a nakonec na dráze $s_4 = 460$ m rovnoměrně zpomaleným pohybem zastavil.

a) Proveďte potřebné výpočty a sestrojte graf závislosti rychlosti na čase.

b) Vypočtěte průměrnou rychlost vlaku.

2. Dva válce na sobě

Železný válec má průměr $d_1 = 8{,}0$ cm a výšku $h_1 = 3{,}5$ cm. Hliníkový válec má stejný průměr a hmotnost $m_2 = 0{,}730$ kg. Válce postavíme podstavami na sebe, čímž vznikne složený válec. Hustota železa je $\rho_1 = 7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, hustota hliníku $\rho_2 = 2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

a) Určete výšku h složeného válce a jeho průměrnou hustotu ρ.

b) Určete tlak p, kterým složený válec působí na podložku.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

3. Cyklista v parku

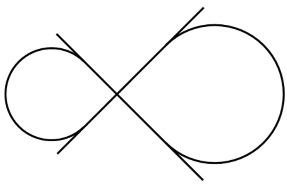
Na křižovatce cest v parku je uzavřená smyčka ve tvaru osmičky. Rovné úseky se protínají pod pravým úhlem a na kruhové úseky navazují v tečném směru. Celková délka smyčky je $s = 280$ m a cyklista ji projel rovnoměrným pohybem za dobu $t = 46$ s. Poloměr většího kruhového úseku je $r_2 = 25$ m.

a) Určete poloměr r_1 menšího kruhového úseku.

b) Určete velikost úhlu α_1 a velikost úhlu α_2, o které je cyklista v jednotlivých zatáčkách odchýlen od svislého směru.

c) Rozhodněte, zda takto může smyčku bezpečně projíždět po dešti, kdy součinitel smykového tření mezi kolem a mokrým asfaltovým povrchem je $f = 0{,}35$.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Cyklista při přejezdu ze zakřivené trajektorie na rovný úsek, a naopak změní sklon plynule ve velmi krátké době, kterou považujte za zanedbatelnou.



Obr. 1

4. Lyžař na svahu

Lyžař sjíždí svah s úhlem sklonu $\alpha = 13°$ a délky $s = 70$ m. Na svah navazuje dostatečně dlouhá vodorovná rovina se stejnou kvalitou sněhu.

a) Určete dobu jízdy t_0 na svahu, zanedbáme-li tření mezi lyžemi a sněhem.

b) Určete dobu jízdy t_1 na svahu, jestliže součinitel smykového tření $f_1 = 0{,}060$.

c) Po sněžení se doba pohybu na svahu prodloužila na $t_2 = 17$ s. Určete součinitel smykového tření f_2.

d) Určete v případech b) a c) dráhy s_1 a s_2, na kterých na vodorovné rovině zastaví.

Ve všech případech zanedbáme odpor vzduchu. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty, dráhu s_2 stačí určit pouze číselně.

5. Průjezd opravovaným úsekem silnice

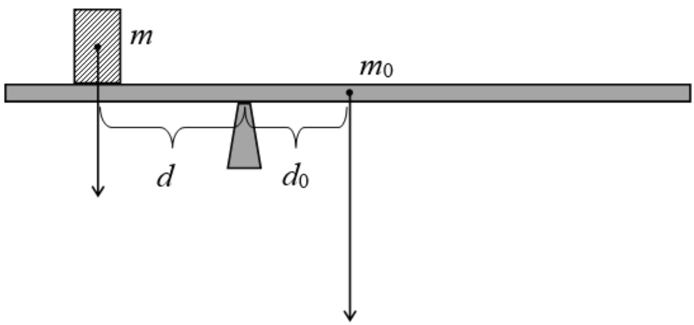
Automobil o hmotnosti $m = 1\,600$ kg se pohybuje rychlostí o velikosti $v_1 = 90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a před opravovaným úsekem silnice začne brzdit tak, že za dobu $\Delta t = 12$ s rovnoměrně zpomaleným pohybem zmenší velikost rychlosti na hodnotu $v_2 = 18\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Po výjezdu z opravovaného úseku za stejnou dobu Δt naopak zvětší velikost rychlosti z v_2 na v_1 při stálém urychlovacím výkonu P.

a) Určete velikost F brzdící síly během zpomalování.
b) Určete urychlovací výkon P během zrychlování.
c) Vyjádřete funkční závislost velikosti okamžité rychlosti v na čase t během zrychlování a sestrojte graf této závislosti.
d) Do obrázku doplňte graf závislosti okamžité rychlosti na čase během brzdění a z grafů porovnejte ujeté dráhy během brzdění a během zrychlování.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

6. Praktická úloha: Vážení těles pákou

Podpěra má horní vodorovnou podstavu tvaru úzkého obdélníku s šířkou několika milimetrů. Na tuto úzkou plošku položíme kolmo k jejím podélným hranám dřevěnou lať délky aspoň 1 metr. Pokud se těžiště latě nachází nad ploškou, je lať v rovnovážné poloze stálé s velmi malou stabilitou. Obdobného vyvážení dosáhneme, jestliže na lať položíme těleso a lať vhodným způsobem posuneme. Tím se těžiště latě dostane mimo plošku, ale těžiště soustavy latě s tělesem bude opět nad ploškou.



Obr. 2

Označme m_0 hmotnost latě, m hmotnost tělesa a při dosažení rovnovážně polohy d_0 vodorovné vychýlení těžiště latě (rameno tíhové síly latě) a d vodorovnou vzdálenost tělesa od středu plošky (rameno tíhové síly tělesa). Podle momentové věty pak platí: $mgd = m_0 g d_0$.

Pomůcky: Dřevěná lať, podpěra, délkové měřidlo, sada závaží, těleso neznámé hmotnosti, váhy.

Úkoly:

a) Změřte vyvážením hmotnost latě, jako těleso použijte závaží známé hmotnosti m_z. Určete střední hmotnost $\overline{m}_0$ latě, průměrnou odchylku Δm_0 a relativní odchylku δm_0 její hmotnosti.
b) Pomocí známé hodnoty $\overline{m}_0$ z prvního měření změřte hmotnost libovolného tělesa, kterým závaží nahradíme. Určete střední hmotnost $\overline{m}$ tělesa, průměrnou odchylku Δm a relativní odchylku δm jeho hmotnosti.
c) Hmotnost latě a hmotnost tělesa ověřte vážením na vahách.

Postup:

1) Měření hmotnosti latě provedeme 10krát, kdy použijeme závaží a budeme měnit jeho umístění na lati. Hmotnost závaží je možné též měnit. K zápisu naměřených hodnot a k jejich statistickému zpracování použijeme tabulku:

Číslo měření	$\frac{m_z}{\mathrm{g}}$	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\frac{\Delta m_0}{\mathrm{g}}$
1					
2					
⋮					
10					
Střední hodnota					
Relativní odchylka				$\delta m_0 =$	

2) Měření hmotnosti tělesa provedeme též 10krát, přičemž měníme jeho umístění na lati. Z momentové věty plyne $m = \frac{d_0}{d} m_0$, kde označíme $x = \frac{d_0}{d}$ poměr délek ramen.

K zápisu naměřených hodnot a k jejich statistickému zpracování použijeme tabulku.

Číslo měření	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d_0}{\text{cm}}$	$x = \frac{d_0}{d}$	Δx
1 2 $\vdots$ 10				
Střední hodnota				
Relativní odchylka			$\delta x =$	

Střední hodnotu hmotnosti tělesa a odchylky získáme ze vztahů

$$\overline{m} = \overline{x} \cdot \overline{m}_0, \quad \delta m = \delta x + \delta m_0, \quad \Delta m = \frac{\overline{m} \cdot \delta m}{100\ \%}.$$

7. Míček a diabolka

Měkčený míček o hmotnosti $m_1 = 12$ g padal volným pádem. V okamžiku, kdy jeho rychlost měla velikost $v_1 = 4{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, byl zasažen diabolkou o hmotnosti $m_0 = 0{,}54$ g letící rychlostí o velikosti $v_0 = 170\ \text{m·s}^{-1}$ vystřelenou ze vzduchovky. Diabolka v míčku uvázla v ose procházející středem míčku. Bezprostředně po zásahu se soustava pohybovala vodorovně.

a) Určete počáteční výšku h míčku nad místem zásahu.

b) Určete velikost w rychlosti míčku s diabolkou bezprostředně po zásahu a úhel α mezi společnou rychlostí $\boldsymbol{w}$ a rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pohybu diabolky bezprostředně před zásahem.

c) Určete poměr kinetické energie soustavy bezprostředně po zásahu a kinetické energie soustavy bezprostředně před zásahem.