Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Netuka

Cesta k pojmu kompaktního operátoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 3, 153–174

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147441`

Cesta k pojmu kompaktního operátoru

Ivan Netuka

Abstrakt. Článek je věnován genezi pojmu kompaktního operátoru. Cesta k jeho vytvoření trvala několik desetiletí a nebyla přímočará. Od problémů fyziky k jejich matematické formulaci pomocí integrálních rovnic, přes okrajové úlohy teorie potenciálu, přes snahy o řešení nekonečných soustav lineárních rovnic. Cesta ilustruje ideu přechodu *od konečného k nekonečnému, od diskrétního ke spojitému.* Ukazuje, proč a jak matematika dospěla k funkcím nekonečně mnoha proměnných, k prostorům funkcí a obecněji, k nekonečněrozměrným prostorům a k zásadním matematickým pojmům, jako je například pojem slabé konvergence. Integrální rovnice byly významným impulsem k vytvoření krystalizačního jádra, v němž se v první dekádě 20. století propojily pojmy z algebry, analýzy, geometrie a topologie. Na cestě k pojmu kompaktního operátoru se setkáme se jmény celé řady vynikajících matematiků: C. Neumann, H. Poincaré, H. von Koch, V. Volterra, I. Fredholm, D. Hilbert, E. Schmidt, M. Fréchet, F. Riesz a další.

Prolog: Rieszova–Schauderova teorie

Poněkud nelogicky začneme na samotném konci historie utváření pojmu kompaktního operátoru a představíme finální verzi *Rieszovy–Schauderovy teorie* pro Banachovy prostory. Tato teorie se stala běžnou součástí kurikula univerzitní výuky matematiky.

Nechť X je Banachův prostor, X^* je duální prostor a $T\colon X \to X$ je *kompaktní lineární operátor.* To znamená, že T zobrazuje uzavřenou jednotkovou kouli v X na množinu, jejíž uzávěr je kompaktní podmnožina prostoru X.

Potom duální operátor $T^*\colon X^* \to X^*$ je kompaktní operátor a o řešitelnosti operátorových rovnic platí tato tvrzení:

- Homogenní rovnice $x - Tx = 0$ a $x^* - T^*x^* = 0$ mají stejný konečný počet lineárně nezávislých řešení.
- Nehomogenní rovnice $x - Tx = y$ má pro $y \in X$ řešení, právě když $x^*(y) = 0$ pro každé $x^* \in X^*$ splňující rovnici $x^* - T^*x^* = 0$.
- Nehomogenní rovnice $x^* - T^*x^* = y^*$ má pro $y^* \in X^*$ řešení, právě když $y^*(x) = 0$ pro každé $x \in X$ splňující rovnici $x - Tx = 0$.

Z prvních dvou tvrzení plyne *Fredholmova alternativa*: rovnice $x - Tx = y$ má řešení pro každé $y \in X$, právě když rovnice $x - Tx = 0$ má pouze triviální řešení.

Vidíme, že v případě kompaktního operátoru je teorie řešitelnosti operátorové rovnice v tomto smyslu analogická teorii řešitelnosti soustavy konečně mnoha lineárních rovnic. Označme ještě $\rho(T)$ množinu všech komplexních čísel λ takových, že rovnice $\lambda x - Tx = y$ má právě jedno řešení pro každé $y \in X$ (*rezolventní množina*). Její komplement $\sigma(T)$ (*spektrum operátoru T*) má tyto vlastnosti:

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc., Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `netuka@karlin.mff.cuni.cz`

- $\sigma(T)$ je spočetná omezená množina komplexních čísel;
- je-li $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, pak λ je izolovaný bod množiny $\sigma(T)$ a rovnice $\lambda x - Tx = 0$ má netriviální řešení (tedy λ je *vlastní číslo* operátoru T).

Odhlédneme-li od kontextu obecných Banachových prostorů a části týkající se duality (doplněné J. Schauderem v roce 1930), je vše podstatné obsaženo v práci (*the most fascinating paper of Banach space theory...*; viz [51], s. 49), kterou F. Riesz publikoval v časopise Acta Mathematica *41* (1918), 71–98, tedy před sto lety, pod názvem *Über lineare Funktionalgleichungen*, [56], s. 1053–1080. Ve skutečnosti teorii dokončil 19. ledna 1916, uveřejnění se zpožděním bylo důsledkem válečných událostí. Před německou verzí v roce 1917 vyšla maďarská verze článku pod názvem *Lineáris függvényegyenletekröl*, [56], s. 1017–1052. Rieszova práce je sepsána v klasickém stylu, v té době ještě normované lineární prostory a Banachovy prostory nebyly na světě. J. Dieudonné Rieszův článek hodnotí vysoce: *In my opinion F. Riesz's 1918 paper is one of the most beautiful ever written; it is entirely geometric in language and spirit, and so perfectly adapted to its goal that it has never been superseded and that Riesz's proofs can still be transcribed almost verbatim*; [9], s. 145. (Osobní vzpomínka: pan profesor Vlastimil Pták, významný matematik a expert ve funkcionální analýze, nás, jako mladé matematiky, nabádal: Kdo to myslí s matematikou vážně, měl by si Rieszovu práci z roku 1918 určitě přečíst.)

Ještě stojí zato uvést jeden citát: *The theory of compact operators is a convincing example that deep and important mathematics can be – or should I say, must be – elegant*; [51], s. 51.

Rieszova–Schauderova teorie je vyložena ve většině knih z funkcionální analýzy. Uveďme např. [2], s. 151, [15], s. 406, [39], s. 36, [57], s. 216, [58], s. 97, [63], s. 111.

Integrální rovnice

Integrální rovnice, jejichž studium se objevuje v 19. století, představují jeden ze základních impulsů pro formování funkcionální analýzy v prvních dekádách 20. století. Není překvapující, že se vyskytují při řešení konkrétních problémů fyziky (P. S. Laplace, J.-B. Fourier, N. Abel, J. Liouville). Např. N. Abel při vyšetřování problému z mechaniky dospěl k rovnici typu

$$\int_a^s K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad s \in [a,b], \tag{1}$$

J. Liouville k rovnici typu

$$f(s) + \int_a^s K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad s \in [a,b]. \tag{2}$$

V rovnicích (1) a (2) vystupuje známá funkce K dvou proměnných (tzv. *jádro integrální rovnice*), dále zadaná funkce g a cílem je najít funkci f.

Termín *integrální rovnice* se poprvé vyskytl v práci P. du Bois-Reymonda z roku 1888, na začátku 20. století D. Hilbert nazval rovnici typu (1) resp. (2) *rovnicí prvního* *druhu* resp. *druhého druhu.* V rovnicích (1) a (2) je v integrálu proměnná horní mez. Pro tento typ se vžil název *rovnice Volterrova typu* (V. Volterra, 1896). Rovnice (2) je speciálním případem rovnice typu

$$f(s) + \int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad s \in [a,b],$$

kterým se říká rovnice *Fredholmova typu.*

Ve druhé polovině 19. století se do popředí zájmu fyziků a matematiků dostaly integrální rovnice v souvislosti s řešením okrajových úloh teorie potenciálu. Jako jeden z centrálních problémů motivovaných matematickou fyzikou zmíníme Dirichletovu úlohu, okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici.

Pro jednoduchost se omezíme v našem výkladu na rovinný případ. Předpokládejme, že G je omezená oblast ohraničená (hladkou) uzavřenou křivkou C. Pro spojitou funkci g zadanou na C úloha spočívá v nalezení *harmonické funkce* u na oblasti G, tedy funkce splňující na G *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

takové, že se její spojité rozšíření z G na C shoduje se zadanou okrajovou podmínkou g.

Z pohledu historie matematiky je významná Riemannova metoda důkazu existence řešení této úlohy, tzv. *Dirichletův princip.* Z dalšího výkladu bude patrné, proč se o ní zmiňujeme, přestože s integrálními rovnicemi nesouvisí. Metoda je založena na vyšetřování třídy $\mathcal{V}$ funkcí v hladkých na G a shodujících se s funkcí g na C a na hledání minima integrálu energie, tzv. *Dirichletova integrálu*

$$\int_G |\nabla v(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

ve třídě funkcí $v \in \mathcal{V}_1$, pro něž je integrál v (3) konečný. Není těžké dokázat, že pokud funkce $u \in \mathcal{V}_1$ splňuje

$$\int_G |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \min\left\{\int_G |\nabla v(x)|^2\,\mathrm{d}x : v \in \mathcal{V}_1\right\},$$

potom je u řešením Dirichletovy úlohy pro okrajovou podmínku g. Dirichletův princip má však dvě neodstranitelné vady. Především existují spojité funkce g na C, pro něž *každé* hladké rozšíření na G má nekonečný Dirichletův integrál, neboli $\mathcal{V}_1 = \emptyset$, a tedy metodu vůbec nelze užít. Pro případ kruhu G takovou funkci g sestrojil v roce 1871 F. Prym, většinou se však cituje příklad J. Hadamarda z roku 1906. Další vada spočívá v tom, že nabývání minima Dirichletova integrálu není nikterak zaručeno. Kritika, kterou vznesl K. Weierstrass v roce 1870 vlastně ke všem problémům variačního počtu, způsobila, že Dirichletův princip upadl do nemilosti. Jednoduše řečeno, Weierstrass upozornil na to, že nelze klást rovnítko mezi *infimum* a *minimum*, prostě minima se nemusí nabývat. Na resuscitaci čekal Dirichletův princip do přelomu 19. a 20. století.

D. Hilbert užil (za dodatečných předpokladů o G a g) tzv. přímou metodu variačního počtu založenou na analogii Bolzanovy–Weierstrassovy věty pro vhodný systém funkcí. Hilbert pravděpodobně neznal práce matematiků italské školy (U. Dini, C. Arzelà, G. Ascoli), kteří, dnes bychom řekli, s kompaktními množinami spojitých funkcí pracovali již v osmdesátých letech 19. století.

Historii integrálních rovnic je věnována celá řada publikací. Uveďme např. [6], s. 210, [15], s. 611, [16], [20], s. 391, [24], s. 1052, [31], [38], [41], s. 21, [57], s. 143. O Dirichletově principu projednává např. [5], s. 295, [7], s. 5, [9], s. 35, [13], s. 187, [15], s. 222, [24], s. 659, 634, [42], s. 33, [44], s. 54, [65], s. 54.

Neumannova metoda v teorii potenciálu

V poslední třetině 19. století přestal být Dirichletův princip považován za spolehlivou a věrohodnou metodu důkazu existence řešení Dirichletovy úlohy. Úsilí matematiků přineslo nové přístupy a důkazové metody. Jen letmo zmíníme např. Schwarzovy–Christoffelovy integrály, Schwarzovu alternující metodu a Poincarého metodu vymetání (*balayage*).

Pro teorii integrálních rovnic a pro formování funkcionální analýzy byla pro řešení Dirichletovy úlohy významná metoda rozvinutá C. Neumannem (1832–1925) v osmdesátých letech 19. století. Idea pochází od fyzika A. Beera ze šedesátých let 19. století a jejím základem je *Ansatz* založený na vyjádření harmonické funkce pomocí potenciálu dvojvrstvy. Zde se opět omezíme pouze na rovinný případ.

Řešení Dirichletovy úlohy u na oblasti G ohraničené hladkou křivkou C se pro okrajovou podmínku g zadanou na C hledá ve tvaru *potenciálu dvojvrstvy s momentem f na C* definovaném pomocí

$$u(x) := \int_0^L \widetilde{K}(x, \varphi(t))f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in G; \tag{4}$$

zde L je délka křivky C, $t \mapsto \varphi(t)$, $t \in [0, L]$, je rovnice křivky parametrizované délkou oblouku a

$$\widetilde{K}(x, \varphi(t)) := \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|x - \varphi(t)|} = \frac{(x - \varphi(t)) \cdot n(t)}{|x - \varphi(t)|^2}, \quad t \in [0, L], \tag{5}$$

je jádro potenciálu dvojvrstvy. Derivuje se podle vnitřní normály. Funkce u definovaná ve (4) je harmonická na G, tedy cílem je najít funkci f takovou, že u nabývá předepsanou okrajovou podmínku g na C. Pokud C je např. křivka se spojitou křivostí, pak funkce $\widetilde{K}$ z (5) má smysl také pro $x = \varphi(s)$, $s \in [0, L]$, $\widetilde{K}$ je spojitá funkce na $[0, L] \times [0, L]$ a podle tzv. *věty o skoku* platí

$$\lim_{x \to \varphi(s)} u(x) = \pi f(s) + \int_0^L \widetilde{K}(\varphi(s), \varphi(t))f(t)\,\mathrm{d}t, \quad s \in [0, L].$$

Při označení $a = 0$, $b = L$ a $K(s, t) := \dfrac{1}{\pi}\widetilde{K}(\varphi(s), \varphi(t))$, $s, t \in [0, L]$, se tedy řešení

Dirichletovy úlohy s okrajovou podmínku g redukuje na integrální rovnici

$$f(s) + \int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} g(s), \qquad s \in [a,b]. \tag{6}$$

Všimněme si, že důkaz existence řešení Dirichletovy úlohy je v tomto případě založen na nepřímé metodě: k zadané funkci g se nejprve najde moment f potenciálu dvojvrstvy a řešení u se pak získá ze vzorce (4).

C. Neumann v sedmdesátých letech 19. století řešil rovnici (6), kterou budeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$f + Kf = g, \tag{7}$$

metodou postupných aproximací. Neumann definoval $f_0 := g$, $f_1 := g - Kf_0$, $f_2 := g - Kf_1$ atd., takže, při zřejmém označení,

$$f_n = g - Kg + K^2 g + \ldots + (-1)^n K^n g.$$

(C. Neumann toto označení neužíval.) Pokud tzv. *Neumannova řada*

$$g - Kg + K^2 g - K^3 g + \ldots$$

(připomínající geometrickou řadu $(1+q)^{-1} = 1 - q + q^2 - q^3 + \ldots$) konverguje, její součet by měl být řešením rovnice (7). C. Neumann takto např. dokázal existenci řešení Dirichletovy úlohy (i pro trojrozměrný prostor) v případě striktně konvexních oblastí.

Neumannova řada má pevné místo v každé základní přednášce z funkcionální analýzy, obvykle v tomto znění: *Je-li $T\colon X \to X$ lineární operátor na Banachově prostoru X a $\|T\| < 1$, pak $I + T$ je prosté zobrazení X* na X a $(I+T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j T^j$.

Pokud se řeší vnější Dirichletova úloha, tedy řešení se hledá na doplňku množiny $G \cup C$, stejný přístup vede na analogickou rovnici, jako je (6), s tím rozdílem, že před integrálem je znaménko minus.

Integrální rovnice uvedeného typu se hodí také pro *vnitřní i vnější Neumannovu* úlohu. V nich se předepisují na hranici hodnoty derivace ve směru normály hledané harmonické funkce, která má v tomto případě tvar *potenciálu jednoduché vrstvy.* Metoda integrálních rovnic odhaluje pozoruhodnou dualitu mezi vnitřní, resp. vnější Dirichletovou úlohou a vnější, resp. vnitřní Neumannovou úlohou a potenciálem jednoduché vrstvy a dvojvrstvy: u „duální“ úlohy vystupuje *jádro transponované* (sdružené), tedy místo jádra K jde o jádro $(s,t) \mapsto K(t,s)$.

Vidíme, že okrajové úlohy matematické fyziky vedou na integrální rovnici typu

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \qquad s \in [a,b]. \tag{8}$$

K rovnici tohoto typu s parametrem λ dospěl H. Poincaré v roce 1897. V rozsáhlé práci rozvinul Neumannovu metodu na obecnější oblasti. V jeho zkoumání však (obecně komplexní) parametr λ již není pouhým zahrnutím případu $\lambda = \pm 1$, nýbrž má fyzikální pozadí ve vyšetřování vlastních čísel rovnice kmitů membrány

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

s homogenní okrajovou podmínkou, tedy funkce u se anuluje na hranici.

Ještě jeden moment musíme v souvislosti s integrálními rovnicemi zmínit. V. Volterra v roce 1896 vyšetřoval integrální rovnici jako limitní případ (*caso limite*) systému konečně mnoha lineárních rovnic. Idea *passagio dal discontinuo al continuo* se v dalším vývoji ukázala velmi plodná. Myšlenka přechodu od konečného k nekonečnému se uplatnila přirozeným způsobem také při řešení systému nekonečně mnoha lineárních rovnic pro nekonečně mnoho neznámých.

Integrálním rovnicím v teorii potenciálu je věnována rozsáhlá literatura. Bez nároku na úplnost (ostatně stejně je tomu v dalších částech článku) uvádíme několik zdrojů, v nichž lze nalézt další odkazy: [9], s. 22, [12], [23], s. 281, [24], s. 1054, [25], [26], s. 73, [27], [28], [29], s. 207, [35], [36], [37], [38], [40], [41], s. 26, [42], s. 44, [47], [57], s. 189, [61], [60], [63], s. 115, [65], s. 109. Zájemce o informace o životě a díle C. Neumanna odkazujeme na [18], [59], [61], [60].

Nekonečné soustavy lineárních rovnic

Speciální případy soustav typu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} x_k = d_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

se sporadicky vyskytují v matematice od počátku 19. století. Např. J.-B. Fourier při řešení okrajových úloh pro rovnici vedení tepla dospěl při výpočtu neurčitých koeficientů ke speciální soustavě typu (9). Astronom G. W. Hill řešil v roce 1877 při studiu pohybu Měsíce soustavu analogickou (9), kde indexy j, k probíhají všechna celá čísla.

Fourier a podobně Hill užívali metodu přechodu od konečného k nekonečnému. Např. pro soustavu (9) se nejprve řeší prvních n rovnic s tím, že se ignorují neznámé s indexy většími než n a řešení se pak získá jako limita pro $n \to \infty$. Tím se však samozřejmě ocitáme na tenkém ledě, což ilustruje soustava, kterou jako instruktivní příklad uvedl E. Helly v roce 1921:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots &= 1, \\ x_2 + x_3 + \ldots &= 1, \\ x_3 + \ldots &= 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hill užíval determinanty nekonečných matic a Cramerovo pravidlo, oprávněnost takového postupu však nezdůvodňoval. To provedl v roce 1866 H. Poincaré. Z podnětu G. Mittag-Lefflera rozvinul dále metody řešení nekonečných soustav jeho žák H. von

Koch. Jeho determinanty mají tvar

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Pro determinant D_n matice $(\delta_{jk} + a_{jk})_{j,k=1,2,\ldots,n}$, kde $\delta_{jk} = 0$ pro $j \neq k$ a $\delta_{jj} = 1$, odvodil důležitý vzorec ve tvaru konečného součtu

$$D_n = 1 + \sum_{j_1} a_{j_1 j_1} + \frac{1}{2!} \sum_{j_1, j_2} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} \\ a_{j_2 j_1} & a_{j_2 j_2} \end{vmatrix} + \frac{1}{3!} \sum_{j_1, j_2, j_3} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} & a_{j_1 j_3} \\ a_{j_2 j_1} & a_{j_2 j_2} & a_{j_2 j_3} \\ a_{j_3 j_1} & a_{j_3 j_2} & a_{j_3 j_3} \end{vmatrix} + \dots, \tag{10}$$

kde $j_1, \ldots, j_n$ probíhají nezávisle všechny hodnoty od 1 do n.

Uvidíme, že vzorec (10) byl jednou z podstatných ingrediencí Fredholmova úspěchu při řešení rovnice typu (8). Navíc se ukázalo, že v určitých situacích jsou teorie řešitelnosti integrálních rovnic a teorie řešitelnosti nekonečných soustav ekvivalentní.

Historie nekonečných soustav je podrobně vyložena v [55], dále lze doporučit [9], s. 75, [15], s. 612, [41], s. 7, [50].

I. Fredholm a řešení integrální rovnice

I. Fredholm (1866–1927) publikoval v roce 1900 ve švédském časopise Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar Stockholm průlomovou práci *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*; viz [69]. Tato práce je považována za katalyzátor významných změn ve vývoji matematické analýzy. Integrální rovnice se tak staly jedním z nejdůležitějších zdrojů formování funkcionální analýzy na začátku 20. století.

Fredholm zkoumal *obecnou* integrální rovnici

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t)\, \mathrm{d}t = g(s), \qquad s \in [a, b], \tag{11}$$

za předpokladu, že K je omezená po částech spojitá funkce na $[a, b] \times [a, b]$, funkce g je spojitá na $[a, b]$ a λ je komplexní parametr. S odstupem času se v přednášce v roce 1909 Fredholm vrátil k inspiraci, kterou čerpal z prací jiných matematiků. Byla to především Volterrova myšlenka o přechodu *od konečného k nekonečnému*, v tomto případě od soustav (konečně mnoha) lineárních rovnic k integrálním rovnicím. Dále zmínil přínos svého kolegy H. von Kocha k teorii nekonečných determinantů. V tomto smyslu Fredholm propojil tři jednoduché, ale nosné myšlenky (srov. [9], s. 99):

- aproximoval pro dělení $\{t_k = a + (k/n)(b-a)\}_{0 \leqq k \leqq n}$ integrál v (11) riemannovskými součty

$$f(t_j) + \frac{\lambda(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} K(t_k, t_j) f(t_k) = g(t_j), \qquad 1 \leqq j \leqq n; \tag{12}$$

- determinant této soustavy vyjádřil pomocí von Kochova vzorce (viz (10))

$$1+\frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_k K(t_k,t_k)+\frac{\lambda^2(b-a)^2}{2!n^2}\sum_{k_1,k_2}\begin{vmatrix} K(t_{k_1},t_{k_1}) & K(t_{k_1},t_{k_2})\\ K(t_{k_2},t_{k_1}) & K(t_{k_2},t_{k_2})\end{vmatrix}+\dots$$

  a pro $n\to\infty$ získal tzv. *determinant integrální rovnice* (11), který je definován takto:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) \;&:=\; 1+\lambda\int_a^b K(t,t)\,\mathrm{d}t+\frac{\lambda^2}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1 & t_2\\ t_1 & t_2\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2+\\ &\quad+\dots+\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\!\dots\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_m\\ t_1 & t_2 & \dots & t_m\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_m+\dots,\end{aligned}$$

  kde užíváme Fredholmovo označení

$$K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m\\ y_1 & y_2 & \dots & y_m\end{pmatrix}:=\begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \dots & K(x_1,y_m)\\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \dots & K(x_2,y_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \dots & K(x_m,y_m)\end{vmatrix};$$

- dokázal lokální stejnoměrnou konvergenci, přičemž k odhadu užil Hadamardův výsledek z roku 1893: je-li A matice řádu $m\times m$, platí

$$|\det A|^2\leqq\prod_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^m|a_{jk}|^2\right).$$

Pak se řešení soustavy (12) vyjádří pomocí Cramerova pravidla a v čitateli se opět provede limitní přechod pro $n\to\infty$. Kromě determinantu $\Delta(\lambda)$ Fredholm definoval *první minor*

$$\Delta(s,t;\lambda):=K(s,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\!\dots\int_a^b K\begin{pmatrix} s & t_1 & \dots & t_n\\ t & t_1 & \dots & t_n\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n$$

a rozvojem determinantu v integrandu podle prvního řádku po úpravě získal rovnost

$$\Delta(s,t;\lambda)=K(s,t)\Delta(\lambda)-\int_a^b K(s,z)\Delta(z,t;\lambda)\,\mathrm{d}z. \tag{13}$$

Pro funkci

$$\tilde f(s):=g(s)\Delta(\lambda)-\lambda\int_a^b\Delta(s,z;\lambda)g(z)\,\mathrm{d}z,\quad s\in[a,b],$$

z (13) obdržel

$$\tilde{f}(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t = g(s)\Delta(\lambda), \qquad s \in [a, b].$$

Vidíme, že pokud $\Delta(\lambda) \neq 0$, je funkce $f := \tilde{f}/\Delta(\lambda)$ (jediným) řešením rovnice (11).

Dále Fredholm dokázal, že pokud pro λ_0 má homogenní rovnice

$$f(s) + \lambda_0 \int_a^b K(s, t) f(t)\, \mathrm{d}t = 0 \tag{14}$$

pouze triviální řešení, pak $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ a tudíž rovnice (11) má pro $\lambda = \lambda_0$ právě jedno řešení pro každou spojitou funkci g na $[a, b]$. Poznamenejme, že v roce 1900 mu ještě nebylo známo, že existence netriviálního řešení rovnice (14) implikuje, že $\Delta(\lambda_0) = 0$.

Znamenitý je závěr článku. Fredholm aplikuje výsledek pro obecnou integrální rovnici na integrální rovnici pro řešení Dirichletovy úlohy na omezené rovinné oblasti ohraničené křivkou třídy C^3. Jádro takové integrální rovnice souvisí s potenciálem dvojvrstvy, viz (5). Z vlastností potenciálu dvojvrstvy snadno plyne, že homogenní rovnice (viz (6)) má pouze triviální řešení, tudíž podle Fredholmova obecného výsledku má Dirichletova úloha řešení pro *každou* spojitou okrajovou podmínku.

Fredholm završil svou teorii v práci *Sur une classe d'équations fonctionnelles* publikované v roce 1903 v Acta Mathematica a dokázal tzv. Fredholmovu alternativu, tedy úplnou informaci o řešitelnosti rovnice (11), včetně nutné a postačující podmínky pro existenci řešení, pokud λ je nulovým bodem determinantu Δ.

Z hlediska vývoje matematiky je pozoruhodné, že Fredholmova prezentace ze zásadní publikace z roku 1903 předznamenala operátorový přístup: rovnici (11), při našem označení, psal ve tvaru $S_K f(x) = g(x)$. Operátorový přístup se nevyskytuje u D. Hilberta, objevil se později zejména díky publikacím F. Riesze.

Originální Fredholmovy práce a také text jeho výše zmíněné přednášky z roku 1909 jsou publikovány v sebraných spisech [11]. Výklad Fredholmovy teorie lze nalézt v [15], s. 611, [23], s. 285, [57], s. 143.

Historickými aspekty se zabývají např. tyto publikace [1], [4], [6], s. 210, [9], s. 97, [12], [16], [20], s. 393, [24], s. 1056, [30], s. 74, [31], [38], [41], s. 29, [51], s. 51, 199. O životě a díle I. Fredholma viz např. [11], [45], [69].

D. Hilbert a totální spojitost

Fredholmův výsledek způsobil, že se integrální rovnice dostaly do centra pozornosti prvních dekád 20. století. Na třetím mezinárodním kongresu matematiků konaném v roce 1904 v Heidelbergu proslovil D. Hilbert (1862–1943) zvanou přednášku *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.* Na čtvrtém Mezinárodním kongresu matematiků uspořádaném v roce 1908 v Římě v plenární přednášce *L'avenir des Mathématiques* mluvil H. Poincaré o *progrès considérable par suite de découvertes de M. Fredholm.* M. Bôcher v plenární přednášce pronesené na pátém Mezinárodním kongresu matematiků uvedl v Cambridgi v roce 1912 toto:

We come finally to the method of integral equations which has held such a prominent place in the mathematical literature of the last few years. The central fact here is that a linear differential equation, whether ordinary or partial, together with a system of linear boundary conditions can be replaced by a single integral equation of the second kind. We have already seen how this fact presented itself in a very special case in the early work of Liouville. In the case of the fundamental boundary problem for Laplace's equation it formed the starting point for Fredholm's epoch-making investigations. It was however for Hilbert to bring out this relation clearly in more general cases, and to make use of it in the theory of characteristic functions.

Problematika integrálních rovnic silně upoutala D. Hilberta, v té době předního představitele evropské matematiky. H. Weyl o tom, jak skandinávská jiskra přeskočila do Göttingenu, napsal: *In winter of 1900–1901, the Swedish mathematician E. Holmgren reported in Hilbert's seminar on Fredholm's first publication on integral equations and it seems that Hilbert caught fire at once*; [53], s. 274. Zajímavou informaci se lze dočíst v [9], s. 106. *It is reported (by Hellinger) that Hilbert inaugurated a session of his Seminar by announcing the development of a method which would lead to the proof of the Riemann hypothesis: the problem is to prove that a particular entire function has all its zeros on the real line, and Hilbert hoped that this function would be expressed as the "determinant" of an integral equation with symmetric kernel. However, nobody has yet been able to find such an equation.*

Po celé desetiletí byly integrální rovnice pro Hilberta a jeho matematickou školu zájmem číslo jedna. Hilbert výsledky své výzkumné práce z let 1901 až 1910 vyložil v sérii šesti sdělení z let 1904 (2 práce), 1905, 1906 (2 sdělení), 1910 publikovaných ve zprávách Královské společnosti věd v Göttingenu, třída matematicko-fyzikální. V prakticky nezměněné formě bylo všech šest *Mitteilungen* převzato do Hilbertovy monografie *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* vydané v roce 1912. Hilbertovy *Mitteilungen* lze rozdělit do dvou skupin: první, čtvrté a páté sdělení zahrnují nové teorie, druhé, třetí a šesté se věnují nejrůznějším aplikacím.

Pro vývoj funkcionální analýzy a také pro náš výklad o genezi pojmu kompaktního operátoru je nejpodstatnější Hilbertův čtvrtý příspěvek z roku 1906, *a masterpiece and one of the best papers he ever wrote*; viz [9], s. 110. Níže se tomuto sdělení budeme více věnovat, neboť právě v něm D. Hilbert zavedl jednak pojem (*silné*) spojitosti, jednak pojem *totální spojitosti*, které v později vytvořené funkcionální analýze souvisejí se *silnou* a *slabou topologií* a s definicí kompaktního operátoru.

Z [15], s. 626 budeme citovat v českém překladu převzatém z [50], s. 66 tento Heuserův přiléhavý výrok: *Čtvrté sdělení je skrz naskrz klasická analýza. V hrdinském úsilí vymačká z* passagio dal discontinuo al continuo *vše, co může vydat – a tím z něj vysaje život. Výsledky tohoto sdělení uvedly do pohybu funkcionálně-analytický balvan, metody tohoto sdělení byly pod ním pohřbeny.*

V letech 1901 až 1914 bylo z podnětu Hilberta vypracováno alespoň 19 disertací věnovaných integrálním rovnicím a příbuzné problematice. Mezi tehdejšími doktorandy nacházíme celou řadu známých matematiků: O. D. Kellogg, E. Schmidt, E. Hellinger, H. Weyl, A. Haar, R. Courant, H. Steinhaus. V roce 1907 se v Göttingenu habilitoval O. Toeplitz, těsnými kontakty s Hilbertem byli ovlivněni F. Riesz, H. Hahn a J. von Neumann. Patrně z přímých Hilbertových žáků nejvíce k formování funkcionální analýzy přispěl E. Schmidt. Výstižné a zasvěcené shrnutí rozhodujících prací D. Hilberta je obsaženo v článku A. Pietsche, který v tomto časopise vyšel v českém překladu pod názvem *Hilbert & Schmidt aneb o jednom mezníku v historii matematiky*; viz [50]. Na s. 79 o teorii integrálních rovnic napsal: *A dokonce celá Hilbertova škola se začala věnovat novému problémovému okruhu a ve velmi krátké době rozvinula ucelenou teorii. S tím asi byla spojena jistá tragika Fredholmova života: s rezignací musel přihlížet, jak jeho podnět byl pod rukama göttingenských matematiků doveden do plného rozkvětu a mnohostranně rozvinut.*

Rozsah tohoto článku neumožňuje věnovat se celému bohatství Hilbertova přínosu; několik odkazů uvádíme na konci této části. Pro náš cíl je však důležité říci alespoň několik slov ke čtvrtému sdělení z roku 1906. Tam se totiž objevují zárodky fundamentálních pojmů, které dnes ovládá každý matematik: Hilbertův prostor ℓ^2, slabá konvergence, kompaktní operátor.

Hilbert uvažoval integrální rovnici

$$f(s) + \int_a^b K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad s \in [a,b]; \tag{15}$$

zde K je spojitá funkce na $[a,b] \times [a,b]$, g je známá spojitá funkce na $[a,b]$. Hledá se spojitá funkce f na $[a,b]$, která splňuje rovnici (15). Pro zajímavost uveďme, že Hilbert setrvává v kontextu tradiční klasické analýzy, např. se u něj nikde nesetkáme s tehdy již známým Lebesgueovým integrálem. Hilbert měl zájem ukázat, že řešitelnost rovnice (15) je v jistém smyslu ekvivalentní řešitelnosti vhodné nekonečné soustavy lineárních rovnic. Jeho přístup se však od postupů navržených Volterrou a Fredholmem liší.

Hilbert uvažuje úplnou ortonormální posloupnost $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ a příslušné Fourierovy koeficienty

$$x_j := \int_a^b f(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t, \quad y_j := \int_a^b g(t)\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t$$

a

$$k_{j\ell} := \int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi_j(s)\varphi_\ell(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \quad j, \ell = 1, 2, \dots$$

Od rovnice (15) tak Hilbert přejde k soustavě lineárních rovnic

$$x_j + \sum_{\ell=1}^{\infty} k_{j\ell}x_\ell = y_j, \quad j = 1, 2, \dots \tag{16}$$

Z Besselovy nerovnosti plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2 < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{j,\ell=1}^{\infty} k_{j\ell}^2 < \infty$$

a jako řešení se připouštějí posloupnosti $x_1, x_2, \dots$ takové, že $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$. Hilbert mluví o *Wertsystem* $x_1, x_2, \dots$ *mit konvergenter Quadratsumme*. Toto je moment, kdy se v matematice objevil zárodek pozdějšího prostoru posloupností s konečnou sumou kvadrátů. Ten teprve v roce 1913 F. Riesz nazval *Hilbertův prostor*. Dnes obvyklé značení ℓ^2 bylo zavedeno později. A. Pietsch (viz [50], s. 69, poznámka 8 pod čarou) první výskyt takového označení připisuje S. Banachovi [2], s. 12.

Hilbert dále uvažuje *úseky* nekonečné soustavy (16), tj. soustavy lineárních rovnic

$$x_j + \sum_{\ell=1}^{n} k_{j\ell} x_\ell = y_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

a snaží se získat řešení soustavy (16) limitním přechodem ze (17) pro $n \to \infty$. Užijeme-li pro $x = (x_1, x_2, \ldots)$ označení

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \right)^{1/2}$$

(toto označení Hilbert neužíval!), pak konvergence, která se Hilbertovi pro limitní přechod hodí, je přesně, v moderní terminologii, *slabá konvergence*. Tedy $x^{(m)} \overset{w}{\to} x$ pro $m \to \infty$, jestliže

$$\sup\{\|x^{(m)}\| : m = 1, 2, \ldots\} < \infty$$

a zároveň pro každé $j = 1, 2, \ldots$ platí $x_j^{(m)} \to x_j$ pro $m \to \infty$ (tedy konvergence *po složkách*). Hilbert ještě uvažuje, v naší terminologii, *silnou konvergenci*: $x^{(m)} \to x$ pro $m \to \infty$ znamená $\|x^{(m)} - x\| \to 0$ pro $m \to \infty$.

Je třeba zdůraznit, že Hilbert s pojmy dnes obvyklými ve funkcionální analýze (prostor, norma, operátor) nepracuje, ve skutečnosti pracuje převážně s nekonečnými kvadratickými formami

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} k_{j\ell} x_j x_\ell, \quad k_{j\ell} = k_{\ell j}.$$

V analogii se situací v konečné dimenzi hledá podmínky, za nichž lze Q pomocí ortogonální transformace převést k hlavním osám, tedy do tvaru

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j x_j^2; \tag{18}$$

pak jsou k_j *vlastní čísla* a přiblížili jsme se na krůček od Hilbertovy–Schmidtovy teorie samoadjungovaných operátorů a od spektrální teorie. A zde přicházíme k centrálnímu pojmu čtvrtého sdělení. Hilbert ukázal, že takové převedení do tvaru (18) je možné, pokud kvadratická forma je *totálně spojitá* (*vollstetig*) ve smyslu následující definice, kterou uvedeme v původním znění (viz [51], s. 45): *Wir nennen eine Funktion* $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ *der unendlich vielen Variablen* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *für ein bestimmtes Wertsystem derselben* vollstetig, *wenn die Werte von* $F(\xi_1 + \varepsilon_1, \xi_2 + \varepsilon_2, \ldots)$ *gegen den Wert* $F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ *konvergieren, wie man auch immer* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *für sich zu Null werden läßt. Dabei sind die Variablen stets an die Ungleichung* $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots \leqq 1$ *gebunden.*

V naší terminologii znamená totální spojitost funkce F podmínku: $x^{(m)} \xrightarrow{w} x$ implikuje $F(x^{(m)}) \to F(x)$, $m \to \infty$. Totální spojitost bilineární formy B je definována analogicky: $x^{(m)} \xrightarrow{w} x$, $y^{(m)} \xrightarrow{w} y$ implikuje $B(x^{(m)}, y^{(m)}) \to B(x, y)$. Ještě jeden velmi významný fakt: Hilbert pro slabou konvergenci dokazuje větu Bolzanova–Weierstrassova typu, totiž že *z každé omezené posloupnosti v ℓ^2 lze vybrat slabě konvergentní posloupnost.* Současným jazykem: *omezené množiny v ℓ^2 jsou slabě relativně kompaktní.* Zde se Hilbert myšlenkově vrací k vlastnosti užité při resuscitaci Dirichletova principu, a tak znovu implicitně vstupuje do hry teorie potenciálu.

A nyní k významnosti zavedené totální spojitosti. Hilbert dokazuje, že pro teorii řešitelnosti soustavy (16) a tím i integrální rovnice (15) platí Fredholmova alternativa za pouhého předpokladu, že bilineární forma s koeficienty z (16) je totálně spojitá. Zhruba řečeno, totální spojitost je v pozadí toho, že pro řešitelnost nekonečných soustav a integrálních rovnic platí analogické výsledky, které známe z lineární algebry pro soustavy konečně mnoha lineárních rovnic.

Podrobnější informace o Hilbertově přínosu (např. jsme se nezmínili o spektrální teorii) lze nalézt např. v [4], [9], s. 105, [15], s. 617, [16], [17], s. 94, [20], s. 394, [24], s. 1060, [41], s. 31, [50], [52], [57], s. 203. O životě a díle D. Hilberta viz např. [53], [67], [68].

Prolínání geometrie, topologie a analýzy

Hilbertova snaha o vybudování teorie funkcí nekonečně mnoha proměnných se odehrávala stále na půdě klasické analýzy. Teprve další generace postupně zaujímala abstraktnější pohled. Např. E. Schmidt a M. Fréchet v letech 1907 až 1908 přenesli jazyk eukleidovské geometrie do Hilbertových prostorů, jejichž axiomatická definice, tak jak jsme dnes zvyklí, přišla ovšem až mnohem později. Poprvé se (i v současném označení) mluví o normě $\|x\|$ bodu (vektoru) x, o trojúhelníkové nerovnosti, ortogonalitě apod. E. Schmidt dokázal větu o ortogonálním doplňku, v roce 1907 M. Fréchet a F. Riesz běžně pracovali s *geometrií* prostorů posloupností s konvergentní řadou čtverců. Za šťastnou shodu okolností lze považovat, že se v době samotného začátku Hilbertovy teorie integrálních rovnic objevuje nový nástroj analýzy, totiž Lebesgueův integrál. Víme, že jeho užití do Hilbertových prací nevstoupilo, nicméně příslušníci mladší generace význam Lebesgueova integrálu rychle rozeznali. A tak se paralelně s prostorem ℓ^2 posloupností studuje prostor L^2 měřitelných funkcí s lebesgueovsky integrovatelným kvadrátem, který má (na rozdíl od analogicky definovaného prostoru pomocí Riemannova integrálu) mimořádně důležitou vlastnost: je úplný. Na L^2 lze zavést skalární součin a tím vnést do tohoto prostoru geometrii, tedy např. definovat délku (normu) vektoru, kolmost apod. Takřka na den ve stejnou dobu F. Riesz a E. Fischer v roce 1907 nezávisle dokázali, že pokud prvku $f \in L^2$ přiřadíme posloupnost jeho Fourierových koeficientů vzhledem k úplné ortonormální posloupnosti, dostáváme izomorfismus L^2 na ℓ^2. Z abstraktního pohledu, jakkoli jsou prvky prostorů L^2 a ℓ^2 zcela odlišné, se tyto prostory jeví jako stejné. Zmíněný izomorfismus dává tedy možnost zastoupit prvek z L^2 *souřadnicemi* (to jsou Fourierovy koeficienty) vzhledem k souřadnicovým osám (ty odpovídají vektorům ortonormální báze). Co je však zvláště důležité: *Rieszova–Fischerova věta* otevřela cestu ke studiu prostorů L^p a dále k obecné teorii normovaných lineárních prostorů a později k dualitě.

První dekáda 20. století byla tedy silně poznamenána na jedné straně Hilbertovými výsledky, na druhé straně objevem Lebesgueova integrálu. V té době se již více a více prosazoval jazyk teorie množin a v algebře vystupoval do popředí trend k obecným algebraickým strukturám, kde charakter studovaných objektů ustupuje do pozadí a za podstatná jsou považována pravidla vymezující zacházení s nimi. V analýze odklon od konkrétních objektů (jako jsou funkce, křivky, plochy), u nichž byly studovány vlastnosti jako např. spojitost, limita, křivost, nastává později. M. Fréchet ve své disertaci z roku 1906 přichází s přenesením pojmů konvergence, spojitosti, vzdálenosti na zcela libovolné množiny (povaha jejich prvků nehraje žádnou roli) a definuje metrické prostory. Pak je možno v abstraktním kontextu mluvit o okolí bodu, zavést limitu a spojitost, podobně jako v eukleidovském prostoru. Pro rozvoj funkcionální analýzy je mimořádně důležité, že lze studovat fundamentální pojmy, jako je např. kompaktnost, úplnost, separabilita.

První léta 20. století znamenají posun od klasické k moderní analýze. Poněkud pozapomenuté pojmy studované na konci 19. století zejména italskými matematiky (G. Peano, V. Volterra, S. Pincherle a další), jako jsou lineární prostory, lineární funkcionály a obecněji nelineární funkcionály a operátory, postupně ožívají a stávají se běžným jazykem matematiků začátku 20. století. Integrální rovnice na jedné straně a variační počet na druhé straně přispěly k obecné myšlence *funkcionálů*, tedy *funkcí definovaných na funkcích*, a *operátorů* jako zobrazení mezi obecně nekonečnědimenzionálními prostory. V roce 1903 přivádí J. Hadamard na svět, dnes bychom řekli, ideu *topologické duality*, tedy studium obecného tvaru spojitého lineárního funkcionálu na prostoru $C([a, b])$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ (uvažuje se topologie stejnoměrné konvergence). Jeho výsledek byl překonán F. Rieszem v roce 1909: každý spojitý lineární funkcionál na $C([a, b])$ lze vyjádřit pomocí Stieltjesova integrálu. Předtím, v roce 1907, M. Fréchet a F. Riesz ukázali, že všechny spojité lineární funkcionály na (tehdy známých) Hilbertových prostorech lze vyjádřit pomocí skalárního součinu.

Pro formování funkcionální analýzy je důležitá práce F. Riesze *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (1910); viz [56], s. 441. Riesz v ní rozvinul teorii prostorů $L^p = L^p((a, b))$ a prostorů L^q k nim duálních. Zde $1 < p < \infty$ a $q := p/(p-1)$. J. Dieudonné v [9], s. 124 vyjádřil názor, že vedle Hilbertova *4. Mitteilung* je to nejdůležitější práce pro rozvoj funkcionální analýzy. Riesz studuje řešitelnost nekonečného systému rovnic

$$\int_a^b f(t)g_j(t)\,\mathrm{d}t = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

kde $g_j \in L^q$ a f je hledaná funkce z L^p. Zde je zřejmá souvislost s problémem, který E. Schmidt řešil pro ℓ^2 v návaznosti na Rieszovu–Fischerovu větu. Riesz nejprve, v analogii s Hilbertovým prostorem L^2, zavádí *silnou konvergenci* v L^p definovanou pomocí podmínky

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^b |f(t) - f_j(t)|^p\,\mathrm{d}t = 0$$

a *slabou konvergenci* takto: *Die Folge* $\{f_i(x)\}$ *von Funktionen der Klasse* $[L^p]$ *konvergiert in bezug auf den Exponenten* p *schwach gegen die Funktion* $f(x)$ *derselben Klasse, wenn*

a) *die Integralwerte*
$$\int_a^b |f_i(x)|^p \, \mathrm{d}x$$
insgesamt unterhalb einer endliche Schranke liegen;

b) *für alle Stellen* $a \leqq x \leqq b$
$$\lim_{i\to\infty} \int_a^x f_i(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x$$
ausfällt.

Později poznamenává, že podmínka b) je ekvivalentní s podmínkou, že
$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_i(x))g(x) \, \mathrm{d}x = 0$$
pro každou funkci $g \in L^q$. Při důkazu věty, že každá nekonečná omezená podmnožina funkcí z L^p obsahuje vybranou slabě konvergentní posloupnost, však užívá původní definici. Jinak řečeno, omezené množiny v L^p jsou slabě relativně kompaktní. Poté Riesz uvádí podmínku pro řešitelnost problému z (19) a dokazuje (v dnešní terminologii), že L^q je duální prostor k prostoru L^p.

U Riesze se objevuje definice spojitého lineárního operátoru (*Funktionaltransformation* $T[f(x)]$) na L^p a definice duálního operátoru (*Transponierte* $\mathcal{T}[g(x)]$) na L^q definovaného pomocí
$$\int_a^b T[f(x)]g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathcal{T}[g(x)] \, \mathrm{d}x.$$

Dalším významným mezníkem v krystalizační fázi formování funkcionální analýzy je Rieszova kniha *Les systèmes d'équation linéaires à une infinité d'inconnues* (1913). Její název poněkud zastírá fakt, že v ní mj. Riesz rozvíjí teorii operátorů (*substitutions linéaires*) na prostoru ℓ^2. Je významné, že opouští svět Hilbertových kvadratických forem ve prospěch lineárních operátorů. V tomto kontextu je pro Riesze podle definice operátor *totálně spojitý*, jestliže převádí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní. Poznamenává, že v ℓ^2 třída totálně spojitých operátorů splývá s třídou operátorů, které lze (v normě) libovolně přesně aproximovat konečnědimenzionálními operátory.

Další informace k tématu této kapitoly lze nalézt např. v [2], s. 64, [4], [6], s. 213, [9], s. 115, [15], s. 628, [16], [19], [20], s. 398, [21], [24], s. 1081, [32], [34], [41], s. 58, [43], [45], [46], [48], s. 73, [49] [50], [51], s. 9, 106, [52], [57], s. 195, [62], [64], [54].

Rieszova teorie totálně spojitých operátorů

Konečně dospíváme ke slavnému Rieszovu článku *Über linearen Funktionalgleichungen*, který vyšel v Acta Mathematica v roce 1918. Dříve, než se soustředíme na práci samotnou, zdůrazníme několik jejích podstatných rysů. Především se Riesz při studiu lineárních rovnic zcela odklonil od Hilbertovy metodiky jejich zkoumání pomocí bilineárních forem. Rieszův přístup preferuje řeč lineárních operátorů, jejíž zárodek je patrný už ve Fredholmově práci. Ještě v kapitole III knihy *Les systèmes d'equations linéaires a une infinité d'inconnues* (1913) užívá Riesz v kontextu prostoru ℓ^p *překlad* Hilbertovy definice totálně spojitých bilineárních forem do nové řeči lineárních zobrazení: operátor na ℓ^p $(1 < p < \infty)$ se nazývá *totálně spojitý*, jestliže převádí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní. V práci dokončené v roce 1916 se Riesz již uchýlil k nové definici, pro ℓ^p ekvivalentní, v níž pojem slabé konvergence nefiguruje. V definici užívá Fréchetův pojem kompaktnosti: operátor se nazývá *totálně spojitý*, jestliže zobrazuje omezené množiny na množiny relativně kompaktní, tj. množiny, jejichž uzávěr je kompaktní. Tato definice je s ohledem na další vývoj funkcionální analýzy mimořádně šťastná. (Zde vsuneme důležitou poznámku. Terminologie, jak už to někdy v matematice bývá, prodělala po zavedení normovaných lineárních prostorů proměnu: pro původní definici totální spojitosti založenou na slabé konvergenci byl název ponechán, zatímco pro novou definici založenou na kompaktnosti se od padesátých let minulého století vžil termín kompaktní operátor – tuto terminologii navrhl E. Hille.)

Je užitečné zdůraznit, že obecně nejsou tyto dvě definice ekvivalentní. Např. v prostoru ℓ^1 splývá slabá konvergence se silnou, tedy např. identický operátor $I\colon \ell^1 \to \ell^1$ je zřejmě totálně spojitý, není však kompaktní, neboť koule v nekonečnědimenzionálním prostoru není relativně kompaktní.

F. Riesz v roce 1916 již nepracoval s nekonečnými soustavami lineárních rovnic, s nekonečnými determinanty, s kvadratickými a bilineárními formami, opustil jazyk analýzy nekonečně mnoha proměnných. Chtělo by se říci, že pracoval s lineárními operátory na normovaných lineárních prostorech.

Ovšem toto doslova pravda není, na vytvoření pojmu normovaného lineárního prostoru bylo třeba ještě krátkou dobu počkat; viz [10], [51], s. 23. Rieszova práce je psána v kontextu prostoru $C([a, b])$, jakoby autor ještě neměl odvahu se vznést do výšin abstraktních pojmů. Riesz napsal: *Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeine Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen; er wird auch bemerken, dass gewisse unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der Hilbert'sche Raum von unendlich vielen Dimensionen nach Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit betrachtet werden darf*; viz [56], s. 1053.

Není pochyb o tom, že Riesz měl další zobecnění na mysli. Omezení na prostor spojitých funkcí napomohlo k nové definici totálně spojitého (v dnešním jazyce kompaktního) operátoru jako jednoho z nejplodnějších pojmů teorie operátorů. Měli bychom poznamenat, že v oné době slabá konvergence v $C([a, b])$ nebyla ani definována, natož užívána. Na druhé straně kompaktnost Fredholmova integrálního operátoru vyplývá jednoduše z kritéria (Arzelà–Ascoli) relativní kompaktnosti množin v $C([a, b])$.

Je zde ještě jeden moment: při formulaci Fredholmovy alternativy pro obecné operátory neměl Riesz ještě k dispozici pojem duálního operátoru, což v případě integrálních operátorů nečiní potíže (transponované jádro $\widetilde{K}(s, t) = K(t, s)$).

Necháme-li stranou aplikaci na integrální rovnice, celá práce je založena pouze:

- na pojmu normy, kterou Riesz sice ad hoc definuje pro prostor $C([a, b])$, avšak operuje s vlastnostmi, které vstupují po čtyřech letech do abstraktní definice;
- na vtipné aplikaci pojmu kompaktního operátoru.

Klíčem k důkazům jsou vlastně jen následující dvě takřka zřejmá tvrzení (formulujeme je již v současném jazyce):

- je-li X normovaný lineární prostor a Y je jeho vlastní uzavřený podprostor, potom existuje vektor $x \in X$ takový, že $\|x\| = 1$ a $\|x - y\| \geqq \frac{1}{2}$ pro všechna $y \in Y$;
- pokud množina $M \subset X$ obsahuje nekonečnou posloupnost $\{x_j\}$ takovou, že $\|x_j - x_k\| \geqq \frac{1}{2}$ pro všechna $j \neq k$, pak M není relativně kompaktní.

Pro kompaktní lineární operátor A zkoumá Riesz operátor $T := I - A$ a užitím výše uvedených tvrzení dokazuje:

1. jádro $T^{-1}(0)$ operátoru T má konečnou dimenzi;
2. $T(X)$ je uzavřený podprostor v X a jeho kodimenze je konečná.

V dalším kroku Riesz uvažuje iterace T^k operátoru T a zkoumá jednak jádro N_k operátoru T^k, jednak obraz $F_k := T^k(X)$. (Poznamenejme, že taková metoda pro prostory konečné dimenze byla užita Ed. Weyrem, viz [3].) Ukazuje, že $\{N_k\}$ je neklesající posloupnost uzavřených prostorů konečné dimenze a $\{F_k\}$ je nerostoucí posloupnost uzavřených podprostorů konečné kodimenze. Pomocí tvrzení 2 Riesz dokázal sporem, že existuje nejmenší přirozené číslo n takové, že $N_{k+1} = N_k$ pro $k \geqq n$. Pak $F_{k+1} = F_k$ pro $k \geqq n$ a X je topologický direktní součet prostorů F_n a N_n. Restrikce T na F_n je lineární homeomorfismus F_n na F_n. Jestliže speciálně $N_1 = T^{-1}(0) = \{0\}$, pak T je lineární homeomorfismus X na X a T^{-1} splňuje $(I - A)T^{-1} = I$, neboli $T^{-1} = I + AT^{-1}$, což je operátor stejného tvaru jako T, neboť AT^{-1} je zřejmě kompaktní. Odtud se již získá informace o spektru operátoru T.

Podrobnější informace lze nalézt např. v [2], s. 151, [4], [6], s. 214, [9], s. 144, [14], [15], s. 641, [16], [20], s. 401, [32], [33], [34], [41], s. 64, [46], [49], [50], [51], s. 45, [57], s. 214, [56], s. 1053. O živote a díle F. Riesze (1880–1956) pojednávají [8], [14], [15], s. 628, [19], [22], [34], [46], [56], s. 15, [66].

Epilog: Rieszova teorie po roce 1918

J. Dieudonné k Rieszově teorii poznamenal: *Although there has been much work done on compact operators of special types, the general theory of compact operators has remained pretty much what it was after the publication of F. Riesz's 1918 paper*; viz [9], s. 148. K dokonalosti prezentace již jen scházel abstraktní kontext Banachových prostorů. A. Pietsch v [51], s. 23 říká: *…around 1913 the concept of a* complete normed linear space *was ripe for discovery. So to speak*, it must have been in the air… Jak jsme již zmínili, Riesz byl kolem roku 1916 krůček od abstraktní formulace. *Why did Riesz not cross the Rubicon?*, vznáší otázku A. Pietsch v [51], s. 23 a konstatuje: *The answer to this question will remain a mystery forever!* Za možný důvod považuje to, že v té době nebyl dostupný obecný pojem *transponovaného zobrazení*, tedy v současné terminologii pojem duálního operátoru. Dvacátá léta 20. století v rychlém sledu přinesla obecné pojmy: Banachův prostor, duální prostor, také existenci spojitých lineárních funkcionálů (důsledek Hahnovy–Banachovy věty), duální operátor. Banach a Schauder (1930) ukázali, že pro normovaný lineární prostor X a spojitý lineární operátor $T\colon X \to Y$ existuje (právě jeden) spojitý lineární operátor T^* na duálním prostoru X^* takový, že

$$x^*(Tx) = T^*x^*(x), \quad x \in X,\ x^* \in X^*.$$

A jsme u vysvětlení Schauderova jména v Rieszově–Schauderově teorii: Schauder dokázal (pro Banachův prostor X), že operátor $T\colon X \to X$ je kompaktní, právě když operátor $T^*\colon X^* \to X^*$ je kompaktní. To byl scházející článek k završení teorie kompaktních operátorů. A. Pietsch v [51], s. 198 formuluje svůj názor: *In my opinion, the Riesz–Schauder spectral theory of compact operators is the absolute highlight of functional analysis in non-Hilbert spaces. Therefore it was quite natural to ask whether the same results could be obtained for larger classes of operators.* Takové třídy operátorů byly hojně studovány, viz např. [15], s. 373, 511, [51], s. 192, 198, [63], s. 203.

Opakovaně jsme zdůraznili významnou vlastnost integrálních rovnic a operátorových rovnic s kompaktním operátorem: teorie řešitelnosti je v zásadě shodná s tím, co známe z lineární algebry o soustavách lineárních rovnic. Důvod pro tuto analogii, alespoň v intuitivní rovině, se nabízí: integrální operátory a v řadě prostorů (např. v Hilbertových prostorech) kompaktní operátory lze libovolně přesně aproximovat konečnědimenzionálními operátory. Nečekaně a překvapivě delikátní je situace v Banachových prostorech.

Označme $\mathcal{F}$ systém všech operátorů $T\colon X \to X$, pro něž $\dim T(X) < \infty$. Budeme říkat, že lineární operátor $T\colon X \to X$ je *aproximovatelný* (píšeme $T \in \overline{\mathcal{F}}$), jestliže

$$\inf\{\|T - \widetilde{T}\|\colon \widetilde{T} \in \mathcal{F}\} = 0.$$

Nechť $T \in \overline{\mathcal{F}}$ a nechť $\widetilde{T} \in \mathcal{F}$ je takový operátor, že pro $Q := T - \widetilde{T}$ platí $\|Q\| < 1$. Potom podle věty o Neumannově řadě je $I - Q$ invertibilní. Rovnici $x - Tx = y$ lze psát jako $(I - Q)x - \widetilde{T}x = y$, neboli $x - (I - Q)^{-1}\widetilde{T}x = (I - Q)^{-1}y$. Protože $(I - Q)^{-1}\widetilde{T} \in \mathcal{F}$, lze redukovat řešitelnost rovnice $x - Tx = y$ na problém lineární algebry; viz [51], s. 47.

Od T. H. Hildebrandta z roku 1931 pochází tento problém: *Je v Banachových prostorech kompaktní operátor vždy aproximovatelný?* A. Pietsch k této otázce říká: *In my opinion, this was the most important question ever asked in Banach space theory. Enflo's negative answer (1973) changed the philosophical background of the subject decisively*; viz [51], s. 54.

Tím se naše putování po stopách pojmu kompaktního operátoru uzavírá. Popsaná geneze je znamenitou ilustrací toho, jakými cestami se vývoj matematiky ubírá, jak jediný pojem dokázal ovlivnit formování funkcionální analýzy. Tato disciplína se rozvinula v mnoha nečekaných směrech a dodnes poskytuje podněty pro základní výzkum i užitek pro nejrůznější aplikace. Jak pravil H. Weyl (1951): *Since the turn of the century, ... mathematics is more like the Nile Delta, its waters fanning out in all directions.* Náš výklad o kompaktních operátorech, zdá se, potvrzuje pravdu, kterou připomněl J. Dieudonné (1989): *As Hadamard once said, in mathematics simple ideas come last.* (Citáty jsou z [48], s. i, vi.)

O dalším vývoji funkcionální analýzy po roce 1918 viz např. [4], [6], s. 214, [9], s. 128, 208, 210, [10], [15], s. 645, [16], [20], s. 402, [21], [24], s. 1088, [32], [33], [41], s. 56, 145, [43], [49], [50], [64].

Poděkování. Článek byl podpořen grantem GA ČR registrační číslo 18-00449S.

L i t e r a t u r a

[1] Archibald, T., Tazzioli, R.: *The reception of Fredholm's results on integral equations: preliminary report.* Real Anal. Exchange 2005, 29th Summer Symposium Conference, 113–136.

[2] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires.* Monografje matematyczne, Tom I. Warszawa, 1932.

[3] Bečvář, J., et al.: *Eduard Weyr 1852–1903.* Prometheus, Praha, 1995.

[4] Birkhoff, G., Kreyszig, E.: *The establishment of functional analysis.* Historia Math. *11 (3)* (1984), 258–321.

[5] Bottazzini, U.: *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] Bourbaki, N.: *Elements of the history of mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[7] Courant, R.: *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces.* Interscience Publishers, New York, 1950.

[8] Császár, Á.: *Life and work of Frigyes Riesz.* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. *48* (2005), 45–57.

[9] Dieudonné, J.: *History of functional analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1981.

[10] Duda, R.: *The discovery of Banach spaces.* European Mathematics in the Last Centuries. Univ. Wrocław, Wrocław, 2005, 37–46.

[11] Fredholm, I: *Oeuvres complètes publiées par l'Institut Mittag-Leffler.* Litos Reprotryck, Malmö, 1955.

[12] Gårding, L.: *The Dirichlet problem.* Math. Intelligencer *2 (1)* (1979/80), 43–53.

[13] Gray, J.: *The real and the complex: a history of analysis in the 19th century.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, Cham, 2015.

[14] Halmos, P. R.: *The work of F. Riesz. Functions, series, operators.* Vol. I, Proceedings of the Conference, Budapest, August 22–28, 1980, B. Sz. Nagy, J. Szabados (eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 35. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, 37–48.

[15] Heuser, H.: *Funktionalanalysis.* Theorie und Anwendung. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[16] Heuser, H.: *Zur Ideengeschichte der Funktionalanalysis.* Math. Semesterber. *35 (1)* (1988), 38–63.

[17] Hilbert, D.: *Gesammelte Abhandlungen*, Band III. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[18] Hölder, O.: *Carl Neumann.* Math. Ann. *96 (1)* (1927), 1–25.

[19] Horváth, J.: *On the Riesz-Fischer theorem.* Studia Sci. Math. Hungar. *41 (4)* (2004), 467–478.

[20] Jahnke, N. (ed.): *A history of analysis.* History of Mathematics *24*. American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 2003.

[21] Järvinen, R. D.: *Mathematics history and mathematicians: the case of functional analysis.* Global analysis – analysis on manifolds, Teubner-Texte Math. *57*, Teubner, Leipzig, 1983, 164–179.

[22] Kalmár, L., Rédei, L., Sz.-Nagy, B.: *Frédéric Riesz, 1880–1956.* Acta Sci. Math. Szeged *17* (1956), 1–3.

[23] Kellogg, O. D.: *Foundations of potential theory.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 31, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1967.

[24] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[25] Král, J.: *Potential theory and Neumann's method.* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Heft *34* (1976), 71–79.

[26] Král, J.: *Integral operators in potential theory.* Lecture Notes in Mathematics 823. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[27] Král, J., Medková, D.: *On the Neumann operator of the arithmetical mean.* Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) *61 (2)* (1992), 143–165.

[28] Král, J., Netuka, I.: *Contractivity of C. Neumann's operator in potential theory.* J. Math. Anal. Appl. *61 (3)* (1977), 607–619.

[29] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu IV.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1977.

[30] Kress, R.: *Linear integral equations.* Applied Mathematical Sciences 82. Springer--Verlag, Berlin, 1989.

[31] Kress, R.: *Fast 100 Jahre Fredholmsche Alternative.* Jahrbuch Überblicke Mathematik, Vieweg, Braunschweig, 1994, 14–27.

[32] Kreyszig, E.: *Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis.* Elem. Math. *41 (2)* (1986), 25–35.

[33] Kreyszig, E.: *Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932.* Elem. Math. *41 (3)* (1986), 49–57.

[34] Kreyszig, E.: *Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis.* Elem. Math. *45 (5)* (1990), 117–130.

[35] Lebesgue, H.: *Sur la méthode de Carl Neumann.* J. Math. Pures Appl., 9e série, *16* (1937), 205–217, 421–423.

[36] Lebesgue, H.: *En marge du calcul des variations. Une introduction au calcul des variations et aux inégalités géométriques.* Monographies de „L'Enseignement Mathématique", No. 12. Institut de Mathématiques, Université de Geneve; Imprimerie Kundig, Geneva, 1963.

[37] Lebesgue, H.: *En marge du calcul des variations.* Enseign. Math. *9 (2)* (1963), 209–326.

[38] Lonseth, A. T.: *Sources and applications of integral equations.* SIAM Rev. *19 (2)* (1977), 241–278.

[39] Lukeš, J.: *Úvod do funkcionální analýzy.* Univerzita Karlova v Praze, 2005.

[40] Mawhin, J.: *Henri Poincaré and the partial differential equations of mathematical physics.* The Scientific Legacy of Poincaré, Hist. Math. *36*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 257–277.

[41] Monna, A. F.: *Functional analysis in historical perspective.* Oesthoek, Utrecht, 1973.

[42] Monna, A. F.: *Dirichlet's principle.* A Mathematical Comedy of Errors and Its Influence on the Development of Analysis. Oesthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975.

[43] Musielak, J.: *On the history of functional analysis.* Opuscula Math. *13* (1993), 7, 14, 27–36.

[44] Netuka, I.: *Pojem kompaktnosti: původ, vývoj, význam.* In: 32. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 26.–30. 8. 2011, J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.), Matfyz-Press, Praha, 2011, 33–76.

[45] Netuka, I., Veselý, J.: *Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy.* PMFA *22* (1977), 10–21.

[46] Netuka, I., Veselý, J.: *F. Riesz a matematika dvacátého století.* PMFA *25* (1980), 128–138.

[47] Netuka, I., Veselý, J.: *Integrální rovnice v teorii potenciálu.* PMFA *28* (1983), 22–38.

[48] Pier, J.-P.: *Mathematical analysis during the 20th century.* Oxford University Press, New York, 2001.

[49] Pier, J.-P.: *Top breakthroughs in functional analysis during the 20th century.* Analysis and Applications, Allied Publ., New Delhi, 2004, 1–15.

[50] Pietsch, A.: *Hilbert & Schmidt aneb O jednom mezníku v historii matematiky.* PMFA *39* (1994), 65–94.

[51] Pietsch, A.: *History of Banach spaces and linear operators.* Birkhäuser, Boston, MA, 2007.

[52] Pietsch, A.: *Erhard Schmidt and his contributions to functional analysis.* Math. Nachr. *283 (1)* (2010), 1, 6–20.

[53] Reid, C.: *Hilbert.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[54] von Renteln, M.: *Zur Situation der Analysis um die Jahrhundertwende.* Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff, Berliner Studienreihe Math. *5*, Heldermann, Berlin, 1994, 107–130.

[55] Riesz, F.: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Gauthier--Villars, Paris, 1913.

[56] Riesz, F.: *Oeuvres complètes.* Publiées sur l'ordre de l'Académie des Sciences de Hongrie par Ákos Császár. 2 Vols., Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[57] Riesz, F., Sz.-Nagy, B.: *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

[58] Rudin, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw--Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.

[59] Salié, H.: *Carl Neumann.* 100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. H. Beckert, H. Schumann (Eds.), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981, 92–101.

[60] Schlote, K.-H.: *Carl Neumanns Forschungen zur Potentialtheorie.* Centaurus *46 (2)* (2004), 99–132.

[61] Schlote, K.-H.: *Carl Neumann's contributions to potential theory and electrodynamics.* European Mathematics in the Last Centuries, Univ. Wrocław, 2005, 123–140.

[62] Siegmund-Schultze, R.: *Der Strukturwandel in der Mathematik um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert, untersucht am Beispiel der Entstehung der ersten Begriffsbildungen der Funktionalysis.* NTM Schr. Geschichte Natur. Tech. Medizin *18 (1)* (1981), 4–20.

[63] Simon, B.: *Operator theory.* A Comprehensive Course in Analysis, Part 4. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[64] Smithies, F.: *The shaping of functional analysis.* Bull. London Math. Soc. *29 (2)* (1997), 129–138.

[65] Sologub, V. S.: *Rozvoj teorie eliptických rovnic v XVIII. a XIX. století (rusky).* Naukova Dumka, Kiev, 1975.

[66] Sz.-Nagy, B.: *F. Riesz: his life and style.* Functions, Series, Operators, Vol. I, II (Budapest, 1980), Colloq. Math. Soc. János Bolyai *35*, North-Holland, Amsterdam, 1983, 69–76.

[67] Weyl, H.: *Obituary: David Hilbert 1862–1943.* Obit. Notices Roy. Soc. London *4* (1944), 547–553.

[68] Weyl, H.: *David Hilbert and his mathematical work.* Bull. Amer. Math. Soc. *50* (1944), 612–654.

[69] Zeilon, N.: *Ivar Fredholm (francouzsky).* Acta Math. *54 (1)* (1930), I–XVI.