Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Lucie Chybová

Šachové úlohy v kombinatorice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 2, 125–147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147328`

Šachové úlohy v kombinatorice

Lucie Chybová

Abstrakt. Článek pojednává o matematických úlohách souvisejících se šachovnicí a šachovými figurami. Ze šachu však budeme potřebovat pouze pravidla pro pohyb figur po šachovnici. Postupně se zaměřujeme na jezdcovy procházky po obdélníkových šachovnicích a dále na tzv. nezávislost a dominanci figur a vztah mezi nimi na čtvercových šachovnicích. Ukážeme, že některé problémy lze řešit elegantněji, pokud je přeformulujeme v řeči teorie grafů.

1. Šachové figury, reprezentace šachovnice

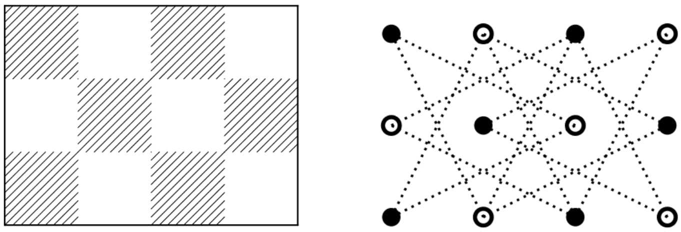
Než přistoupíme k jednotlivým šachovým úlohám v kombinatorice, které zde postupně představíme od procházek po šachovnici přes nezávislost a dominanci až po jejich vzájemný vztah, vysvětlíme alespoň základní pojmy, jež budeme dále používat.

V článku budeme uvažovat nejen klasickou čtvercovou šachovnici o rozměrech 8×8, ale i obdélníkové šachovnice o rozměrech $m \times n$, kde m značí počet řádků a n počet sloupců. U figur nám nebude záležet na barvě, tj. nebudeme rozlišovat černé a bílé figury. Podstatné pro nás bude pouze to, o jaký typ figury se jedná a jaké tahy s ní tedy můžeme provést. V textu se setkáme s následujícími figurami:

- *Král* se může v jednom tahu posunout o jedno pole v libovolném směru (svisle, vodorovně nebo po úhlopříčce).
- *Dáma* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí v libovolném směru.
- *Věž* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí svisle nebo vodorovně.
- *Jezdec (kůň)* se může v jednom tahu posunout nejprve o dvě pole svisle nebo vodorovně a poté o jedno pole ve směru kolmém k předešlému.
- *Střelec* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí po úhlopříčkách.

Pohyb libovolné figury po šachovnici můžeme reprezentovat grafem, který zkonstruujeme následujícím způsobem: Každému poli šachovnice odpovídá právě jeden vrchol. Hrany tvoří dvojice vrcholů zastupující pole, mezi kterými může figura provést povolený tah. Grafy odpovídající různým figurám tedy mají stejné množiny vrcholů (pro šachovnici o rozměrech $m \times n$ je to mn vrcholů), ale odlišné množiny hran. Pro příslušný graf používáme označení $K_{m,n}$ v případě, že jde o krále, $D_{m,n}$ v případě dam, $V_{m,n}$ v případě věží, $J_{m,n}$ v případě jezdců a $S_{m,n}$ v případě střelců. Na obrázku 1 vidíme, jak lze pohyb jezdce po šachovnici 3×4 převést na graf $J_{3,4}$.

Mgr. Lucie Chybová, Gymnázium Voděradská, Voděradská 900/2, 100 00 Praha-Strašnice, e-mail: `chybova@gymvod.cz`



(a) šachovnice 3×4 (b) graf $J_{3,4}$

Obr. 1. Šachovnice a graf odpovídající povoleným tahům jezdce

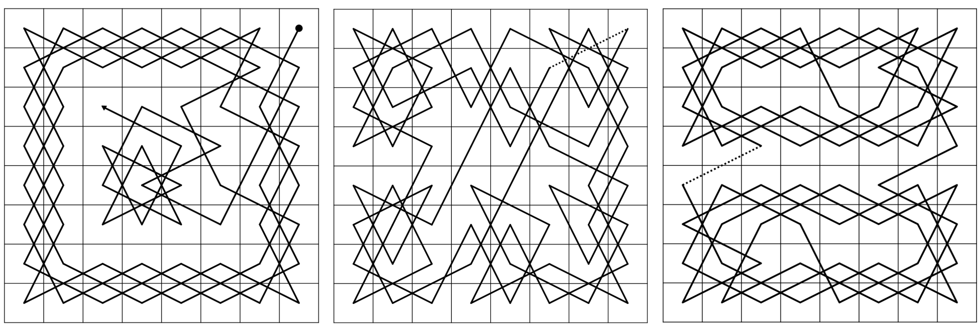
Pole šachovnice $m \times n$ (resp. vrcholy příslušného grafu) budeme číslovat podobným způsobem, jaký je obvyklý u klasické šachovnice 8×8. Souřadnice levého dolního pole (resp. vrcholu) tedy budou $(1, 1)$, kde první souřadnice značí číslo řádku a druhá číslo sloupce. Navíc bude toto pole (resp. vrchol) mít černou barvu, stejně jako na šachovnici 8×8. Obarvení zbylých polí (resp. vrcholů) je také znázorněno v obrázku 1.

2. Procházky po šachovnici

Jestliže jezdec projde šachovnici $m \times n$ tak, že na každé její pole stoupne právě jednou a dokáže se povoleným tahem dostat na pole, ze kterého začínal, nazýváme danou posloupnost tahů *uzavřená jezdcova procházka* nebo prostě jen *jezdcova procházka*. Pokud jezdec projde šachovnici $m \times n$ tak, že na každé její pole stoupne právě jednou a nedokáže se povoleným tahem dostat na pole, ze kterého začínal, nazýváme danou posloupnost tahů *otevřená jezdcova procházka*.

Hledání jezdcovy procházky po šachovnici patří mezi nejrozšířenější matematické problémy, které nějak souvisí s šachovnicí a šachovými figurami. Napsáno o ní bylo již hodně, proto se jí zde nebudeme podrobněji zabývat. Pro zajímavost pouze uvádíme na obrázku 2 několik ukázek řešení.

Kromě toho dále využijeme následující dvě věty hovořící o existenci jezdcovy procházky po šachovnicích různých rozměrů. Allen J. Schwenk jako první ve svém článku [16] sepsal jak důkaz neexistence jezdcovy procházky po některých šachovnicích speciálních rozměrů, tak důkaz existence jezdcovy procházky po všech ostatních šachovnicích.



(a) Ali C. Mani (9. st.) (b) al-Adlí ar-Rúmí (9. st.) (c) Leonhard Euler (1759)

Obr. 2. Procházky jezdce

Věta 1. *Pro všechna přirozená* $m \leq n$ *existuje na šachovnici* $m \times n$ *uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

(i) m *a* n *jsou obě lichá čísla,*

(ii) $m = 1$, 2 *nebo* 4,

(iii) $m = 3$ a $n = 4$, 6 *nebo* 8.

V předchozí větě 1 tvrdíme, že na šachovnicích, které mají lichý počet polí, neexistuje uzavřená jezdcova procházka. Následující věta 2 pocházející z knihy [17] Johna J. Watkinse říká, že na některých z nich existuje alespoň otevřená jezdcova procházka.

Věta 2. *Na každé šachovnici* $n \times n$, *kde* $n = 4k + 1$ *a* k *je přirozené, existuje otevřená jezdcova procházka.*

Také u ostatních šachových figur lze studovat existenci otevřených či uzavřených procházek, viz např. [17]. Vesměs se však jedná o méně zajímavé úlohy než v případě jezdcovy procházky.

3. Nezávislost na šachovnici

V úlohách o nezávislosti figur na šachovnici hledáme maximální počet figur, které můžeme na šachovnici rozmístit tak, aby se žádné dvě neohrožovaly (figura je na nějakém poli ohrožována, pokud se jiná figura může na toto pole dostat jedním povoleným tahem). Bude nás zajímat nejen maximální počet figur, ale také jejich rozmístění. V některých případech je dokonce možné určit počet všech možností. Nejdříve však připomeneme několik pojmů z teorie grafů.

Množinu vrcholů $N \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ nazveme *nezávislou*, pokud žádné dva vrcholy této množiny nejsou spojeny hranou. Řekneme, že nezávislá množina vrcholů $N \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ je *maximální*, jestliže v tomto grafu neexistuje žádná nezávislá množina s větším počtem vrcholů. *Nezávislost grafu* G je rovna počtu vrcholů maximální nezávislé množiny a značí se $\beta(G)$.

Řešení úlohy o nezávislosti figur na šachovnici $n \times n$ je ekvivalentní hledání maximální nezávislé množiny v příslušném grafu, jehož konstrukci jsme popsali v úvodu článku. Maximální počet figur, které můžeme na šachovnici $n \times n$ rozmístit, je roven nezávislosti odpovídajícího grafu.

3.1. Nezávislost dam

Úloha o nezávislosti dam na šachovnici 8×8 patří mezi nejrozšířenější úlohy tohoto typu. V české literatuře ji najdeme pod heslem *problém osmi dam*. Poprvé ji zveřejnil v roce 1848 Max Bezzel [1].

Jedním z nejznámějších matematiků, kteří se problémem osmi dam zabývali, byl Carl Friedrich Gauss. Ten převedl kolem roku 1850 těžší část úlohy na jednoduché aritmetické cvičení. Nejprve rozmístil dámy na šachovnici 8×8 tak, aby v každém řádku a sloupci stála právě jedna dáma. Toto rozmístění zapsal ve formě posloupnosti osmi čísel. První číslo odpovídalo číslu řádku, ve kterém stála dáma v prvním sloupci, druhé číslo odpovídalo číslu řádku, ve kterém stála dáma ve druhém sloupci atd. Aby měl Gauss jistotu, že žádné dvě dámy nestojí na jedné úhlopříčce, využil následující vlastnosti souřadnic polí na jedné úhlopříčce: Dvě pole leží na jedné úhlopříčce vedené jihovýchodním směrem právě tehdy, když je součet souřadnic jednoho pole roven součtu souřadnic druhého pole. Dvě pole leží na jedné úhlopříčce vedené jihozápadním směrem právě tehdy, když je součet souřadnic jednoho pole roven součtu souřadnic druhého pole, přičemž sloupce v tomto případě číslujeme zprava.

Této vlastnosti využijeme v následující větě 3, která říká, kolik nejvýše dam můžeme umístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádné dvě neohrožovaly. Důkaz této věty pochází z knihy [10], kterou napsali bratři Isaak Moisejevič Jaglom a Akiva Moisejevič Jaglom, a jedná se o mírně pozměněnou verzi původních důkazů pocházejících z článků [12] a [13] Emila Paulse.

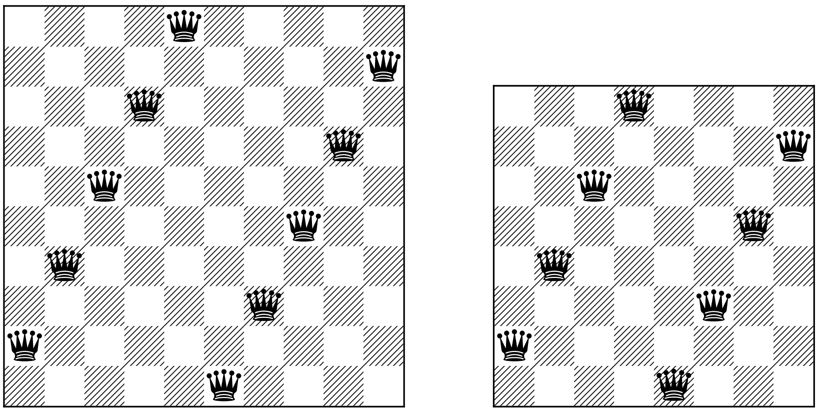
Poznamenejme ještě, že při hledání počtu možností rozmístění figur započítáváme všechna rozmístění, která nejsou stejná. To znamená, že pokud jedno vznikne rotací nebo osovou symetrií z druhého, považujeme tato rozmístění za různá a započítáváme obě.

Věta 3. *$\beta(D_{1,1}) = \beta(D_{2,2}) = 1$, $\beta(D_{3,3}) = 2$ a pro $n \geq 4$ platí*

$$\beta(D_{n,n}) = n.$$

Důkaz. Pro grafy $D_{1,1}$, $D_{2,2}$ a $D_{3,3}$ tvrzení jistě platí. Zaměříme se tedy na $n \geq 4$. Důkaz dále rozdělíme na případy, kdy je n liché, a na případy, kdy je n sudé, a zkusíme najít konkrétní rozestavení n dam na šachovnici $n \times n$ v obou případech.

- n sudé ($n = 2k$): První dámu umístíme na pole se souřadnicemi $(2, 1)$. Dále si představíme, že posouváme jezdce od tohoto pole vždy o dvě pole nahoru a jedno doprava, a na každé pole, na které jezdec stoupne, umístíme další dámu. Takto se nám podaří umístit dámy do prvních k sloupců a do každého řádku sudého čísla. Postup opakujeme znovu, ale tentokrát začneme na poli o souřadnicích $(1, k+1)$. Tímto způsobem obsadíme zbylé sloupce a řádky lichého čísla (obr. 3a).

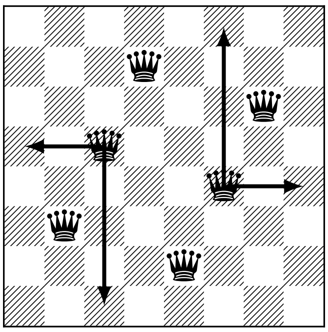


(a) šachovnice 10×10 (b) šachovnice 8×8

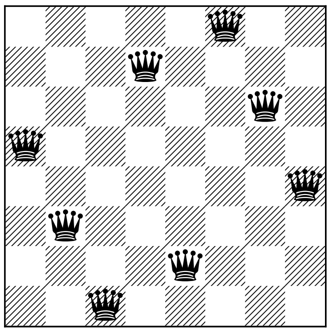
Obr. 3. Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 2k$)

Nyní ověříme, zda neleží některé dvě dámy na jedné úhlopříčce. Vzhledem k tomu, jak jsme dámy na šachovnici umisťovali, je hned jasné, že stačí zkontrolovat pouze úhlopříčky směřující jihovýchodním směrem. K tomu využijeme výše popsanou Gaussovu metodu, kterou aplikujeme na r-tou dámu ve skupině k dam na levé části šachovnice a s-tou dámu ve skupině k dam na pravé části šachovnice, neboť dvě dámy stojící ve stejné skupině jistě nestojí na jedné úhlopříčce. r-tá dáma v první skupině stojí na poli o souřadnicích $(2r, r)$, s-tá dáma ve druhé skupině stojí na poli o souřadnicích $(2s-1, k+s)$. Dámy tedy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $2r + r = 2s - 1 + k + s$. Po úpravě dostáváme $k = 3(r-s)+1$, a protože $n = 2k$, můžeme rovnost dále upravit na $n = 6(r-s)+2$. Z toho vyplývá, že pokud lze n psát ve tvaru $n = 6l+2$ pro nějaké přirozené l, pak budou při popsaném rozmisťování dam některé dámy stát na jedné úhlopříčce (obr. 3b). Na ostatních šachovnicích metoda funguje.

Případ $n = 6l+2$ vyšetříme zvlášť: První dámu umístíme na pole se souřadnicemi $(3, 2)$. Dále pokračujeme opět tak, že si představíme, že posouváme jezdce od tohoto pole vždy o dvě pole nahoru a jedno doprava a na každé pole, na které jezdec stoupne, umístíme další dámu (obr. 4a). Tímto způsobem se nám podařilo rozmístit $k-1$ dam a vynechali jsme první sloupec. Nyní odstraníme dámu z pole se souřadnicemi $(n-3, k-1)$ a místo ní postavíme jednu dámu na pole se souřadnicemi $(n-3, 1)$ a jednu dámu na pole se souřadnicemi $(1, k-1)$. Dále otočíme šachovnici o $180°$ a postup zopakujeme. Tímto způsobem obsadíme všechny sloupce a řádky (obr. 4b).



(a) šachovnice 8×8 – nahrazování dam



(b) šachovnice 8×8 – konečné rozmístění

Obr. 4. Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ $(n = 6l+2)$

Nyní ověříme, že žádné dvě dámy nestojí na stejné úhlopříčce. Ověřování začneme provádět pro $n-2$ dam na šachovnici, které jsme umisťovali pravidelně (tzn. před nahrazením dámy na poli o souřadnicích $(n-3, k-1)$ a dámy umístěné na stejném poli při otočení šachovnice). Opět je jasné, že stačí zkontrolovat pouze úhlopříčky směřující jihovýchodním směrem a zaměřit se na dvojici dam, z nichž jedna je v levé a druhá v pravé části šachovnice. r-tá dáma v první skupině stojí na poli o souřadnicích $(2r+1, r+1)$, s-tá dáma ve druhé skupině stojí na poli o souřadnicích $(2s, k+s)$. Dámy tedy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $2r + 1 + r + 1 = 2s + k + s$. Po úpravě dostáváme $k = 3(r - s) + 2$, a protože $n = 2k$, můžeme rovnost dále upravit na $n = 6(r - s) + 4$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$, znamená to, že žádné dvě z těchto $n - 2$ dam nestojí na stejné úhlopříčce.

Při nahrazování zmíněných dvou dam obsadíme zbylé neobsazené řádky a sloupce. Je zřejmé, že žádné dvě dámy z těchto čtyř nestojí na stejné úhlopříčce. Stačí tedy zkontrolovat, že nově umístěné čtyři dámy nestojí na stejné úhlopříčce s některou z dříve rozmístěných dam. Nejprve se podíváme na dámu na poli se souřadnicemi $(n - 3, 1)$ a r-tou dámu na levé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $n - 3 + 1 = 2r + 1 + r + 1$. Po úpravě dostáváme $n = 3r + 4$ a musíme ověřit, zda někdy nastane rovnost $6l + 2 (= n) = 3r + 4$. Rovnost nastává pouze v případě, že $2l - r = \frac{2}{3}$, což není možné, protože l i r nabývají jen přirozených hodnot. Stejně postupujeme v případě s-té dámy na pravé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $n - 3 + 1 = 2s + k + s$. Protože $n = 2k$, můžeme rovnost upravit a dostáváme $k = 3s + 2$, a tedy $n = 6s + 4$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$, znamená to, že ani v tomto případě nestojí dvě dámy na stejné úhlopříčce.

Nyní se podíváme na dámu na poli se souřadnicemi $(1, k - 1)$ a r-tou dámu na levé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $1 + k - 1 = 2r + 1 + r + 1$. Protože $n = 2k$, můžeme rovnost upravit a dostáváme $n = 6r + 4$. Stejně postupujeme v případě s-té dámy na pravé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $1 + k - 1 = 2s + k + s$. Po úpravě dostáváme $0 = 3s$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$ a $s > 0$, znamená to, že ani v jednom z těchto dvou případů nestojí dvě dámy na stejné úhlopříčce. Postavení zbylých dvou dam již nemusíme kontrolovat, neboť jsme je umisťovali stejným způsobem jako předchozí dvě dámy pouze s tím rozdílem, že jsme přitom otočili šachovnici.

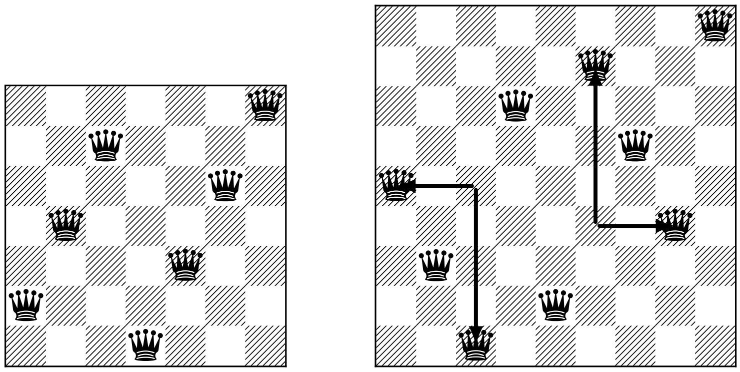
Tato metoda rozmisťování dam na šachovnici $n \times n$, kde $n = 6l + 2$, tedy funguje a tím je dokončen důkaz pro sudé n.

- n liché $(n = 2k - 1)$: Při obou metodách rozmisťování dam po šachovnici $n \times n$, kde n je sudé, zůstává neobsazená úhlopříčka spojující pole se souřadnicemi $(1, 1)$ a (n, n). Stačí tedy na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ rozmístit dámy podle výše popsaných návodů a po přidání n-tého sloupce a n-tého řádku umístit zbývající n-tou dámu na pole se souřadnicemi (n, n). Na obrázku 5 vidíme oba typy těchto rozmístění. □

Zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých dam na šachovnici $n \times n$. Pro nízké hodnoty n lze příslušné počty získat pomocí počítače, viz tabulku 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet řešení na šachovnici $n \times n$	1	4	8	2	10	4	40	92	352

Tab. 1. Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých dam na šachovnici $n \times n$ (údaje převzaty z `http://oeis.org/A000170`)



(a) šachovnice 7×7 (b) šachovnice 9×9

Obr. 5. Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ $(n = 2k - 1)$

Pro zajímavost poznamenejme, že všech 92 možností rozmístění osmi dam na šachovnici 8×8 lze získat z dvanácti základních řešení pomocí otočení nebo symetrie podle každé ze čtyř os.

3.2. Nezávislost věží

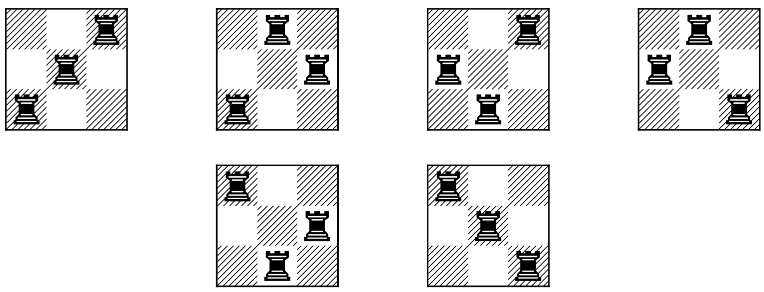
Úloha o nezávislosti věží je výrazně jednodušší než úloha o nezávislosti dam, protože nemusíme ověřovat, zda některé dvě věže nestojí na stejné úhlopříčce. Proto je i určení hodnoty $\beta(V_{n,n})$ velmi jednoduché a uvádíme ho bez důkazu. Totéž platí také pro určení počtu všech možností rozmístění maximálního počtu nezávislých věží na šachovnici.

Věta 4. *Pro každé přirozené n platí*

$$\beta(V_{n,n}) = n.$$

Věta 5. *Počet všech možností rozmístění n nezávislých věží na šachovnici $n \times n$ je $n!$.*

Na obrázku 6 vidíme všechna možná rozmístění tří nezávislých věží na šachovnici 3×3.



Obr. 6. Nezávislost tří věží na šachovnici 3×3

3.3. Nezávislost jezdců

Následující větu, která udává nejvyšší počet jezdců, které můžeme umístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva neohrožovali, lze dokázat několika různými způsoby. My vyjdeme z důkazu pro šachovnici 8×8, který uveřejnil Ralph Greenberg [7] a který rozšířil na obecné n ve své knize [17] John J. Watkins.

Věta 6. *$\beta(J_{1,1}) = 1$, $\beta(J_{2,2}) = 4$ a pro $n \geq 3$ platí*

$$\beta(J_{n,n}) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{2}(n^2+1), & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

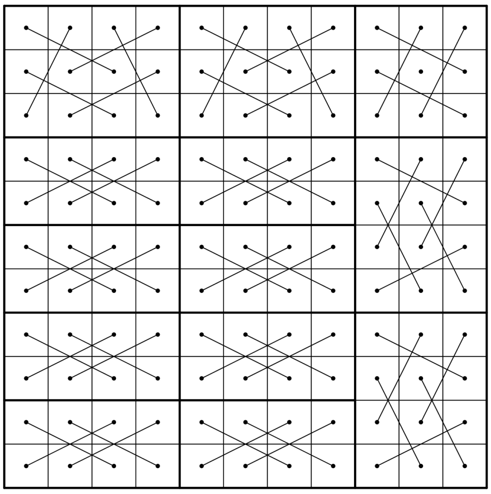
Důkaz. Pro graf $J_{1,1}$ tvrzení jistě platí. Pro graf $J_{2,2}$ platí, že můžeme umístit jezdce na každé pole šachovnice, kterou graf reprezentuje, což jsou dohromady čtyři jezdci. Důkaz pro $n \geq 3$ rozdělíme na výše uvedené dva případy.

- n sudé ($n = 2k$): Pro $n = 4$ rozdělíme šachovnici na dva obdélníky o rozměrech 2×4. Každý z těchto obdélníků může obsahovat nejvýše čtyři nezávislé jezdce, neboť jezdec na kterémkoliv poli takového obdélníku ohrožuje právě dvě jeho pole; pole, na kterém stojí, a k němu jedno další. Dostáváme tedy nerovnost $\beta(J_{4,4}) \leq 8$. Pokud navíc umístíme jezdce na všechna pole jedné barvy, nebudou se žádní dva jezdci ohrožovat, neboť ohrožují pouze pole odlišné barvy. Takto se nám tedy podaří umístit na šachovnici osm jezdců, což je hledané maximum pro šachovnici 4×4.

  Pro $n > 4$ využijeme (Schwenkovu) větu 1, která říká, že na každé takové šachovnici $n \times n$ existuje uzavřená jezdcova procházka. Vezmeme-li onu uzavřenou procházku, pak jezdci musejí stát na polích, která nenásledují těsně po sobě. Minimálně každé druhé pole tedy musíme vynechat a dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq \frac{1}{2}n^2$. Navíc opět můžeme využít toho, že jezdec ohrožuje pouze pole odlišné barvy. Umístěním jezdců na všechna pole jedné barvy tedy dostaneme $\frac{1}{2}n^2$ nezávislých jezdců na šachovnici $n \times n$ pro sudé $n > 4$.

- n liché ($n = 4k+1$): Na všech šachovnicích $(4k+1) \times (4k+1)$ existuje podle věty 2 otevřená jezdcova procházka. Na základě stejného argumentu jako v předchozím odstavci dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq \frac{1}{2}(n^2+1)$. Protože je n liché, je na šachovnici více černých polí. Pokud umístíme jezdce na všechna černá pole, neohrožují se a dostáváme rovnost $\beta(J_{n,n}) = \frac{1}{2}(n^2+1)$.

- n liché ($n = 4k-1$): Šachovnici $(4k-1) \times (4k-1)$ lze rozdělit celkem na $2(k-1)^2$ obdélníků o rozměrech 2×4, $2(k-1)$ obdélníků o rozměrech 3×4 a čtverec o rozměrech 3×3 (obr. 7). Každé pole v těchto pravoúhelnících spojíme hranou s právě jedním polem odpovídajícím nějakému povolenému tahu. Vidíme, že na obdélníky o rozměrech 2×4 můžeme rozmístit nejvýše čtyři jezdce, na obdélníky o rozměrech 3×4 nejvýše šest jezdců a na čtverec o rozměrech 3×3 nejvýše pět jezdců. Pro hodnotu $\beta(J_{n,n})$ tedy dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq$ $\leq 4(2(k-1)^2) + 6(2(k-1)) + 5 = \frac{1}{2}((4k-1)^2+1)$. Dále opět platí, že pro liché n je na šachovnici více černých polí, a pokud umístíme jezdce na každé černé pole, dostáváme rovnost $\beta(J_{n,n}) = \frac{1}{2}((4k-1)^2+1) = \frac{1}{2}(n^2+1)$. □



Obr. 7. Rozdělení šachovnice $(4k-1)\times(4k-1)$

Stejně jako pro dámy ani pro jezdce zatím nebyl nalezen obecný vzorec, který by udával počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých jezdců na šachovnici $n\times n$, ale alespoň pro nízké hodnoty n lze příslušné počty získat pomocí počítače, viz tabulku 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet řešení na šachovnici $n\times n$	1	1	2	6	1	2	1	2	1	2

Tab. 2. Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých jezdců na šachovnice $n\times n$ (údaje převzaty z `http://oeis.org/A244081`)

3.4. Nezávislost střelců

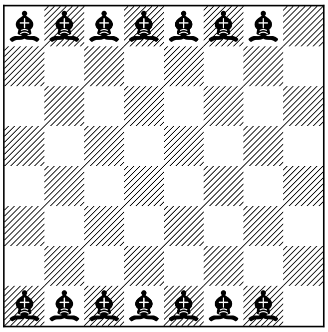
Podobně jako v předchozích případech nejprve ukážeme, kolik nejvýše nezávislých střelců můžeme umístit na šachovnici $n\times n$. Důkazy této i následující věty pochází z knihy [10] bratří Jaglomů.

Věta 7. *$\beta(S_{1,1})=1$ a pro každé přirozené $n\geq 2$ platí*

$$\beta(S_{n,n})=2n-2.$$

Důkaz. Pro graf $S_{1,1}$ tvrzení jistě platí. Pozornost tedy upřeme na $n\geq 2$. Šachovnice $n\times n$ má celkem $2n-1$ úhlopříček vedených jedním směrem. Dvě z těchto úhlopříček jsou tvořeny pouze jedním polem v protějších rozích šachovnice. Tato dvě pole zároveň leží na jedné úhlopříčce vedené opačným směrem. Proto nemůžou střelci stát na obou těchto polích a nemohou obsadit více než $2n-1-1$ úhlopříček. Dostáváme tedy nerovnost $\beta(S_{n,n})\leq 2n-2$.

Pokud umístíme střelce na pole o souřadnicích $(1,1)$, $(1,2)$, …, $(1,n-1)$ a dále na pole o souřadnicích $(n,1)$, $(n,2)$, …, $(n,n-1)$, žádní dva střelci se neohrožují



Obr. 8. 14 nezávislých střelců na šachovnici 8×8

a dohromady je na šachovnici $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$ střelců (obr. 8). Proto platí $\beta(S_{n,n}) = 2n - 2$. □

Věta 8. *Je-li na šachovnici $n \times n$ rozmístěno $2n-2$ nezávislých střelců, pak stojí vždy u okrajů šachovnice.*

Důkaz. Předpokládejme, že je na šachovnici $n \times n$ rozmístěno $2n - 2$ nezávislých střelců. Každé pole šachovnice očíslujeme podle toho, kolika střelci je ohrožováno. Nejvyšším číslem, které se na šachovnici může vyskytovat, je číslo dvě. Jedno pole je totiž součástí nejvýše dvou úhlopříček a na každé úhlopříčce může stát nejvýše jeden střelec. Nejnižším číslem, které se na šachovnici může vyskytovat, je číslo jedna. Kdyby některé pole nebylo ohrožováno žádným střelcem, mohli bychom na toto pole postavit dalšího střelce, což neodpovídá předpokladu, že už máme na šachovnici maximální počet $2n - 2$ nezávislých střelců. Na každém poli šachovnice $n \times n$ je tedy buď číslo jedna, nebo číslo dvě.

Nyní ukážeme, že polí s číslem jedna je nejméně $2n$. Všechna pole, na kterých stojí střelec, mají jistě číslo jedna. Takových polí je $2n - 2$. Navíc mají číslo jedna určitě všechna čtyři rohová pole a alespoň dvě z nich nejsou obsazená střelcem. Dohromady tedy dostáváme nejméně $2n - 2 + 2 = 2n$ polí, na kterých je číslo jedna.

Označme S součet všech čísel na šachovnici. Tento součet můžeme odhadnout shora následujícím způsobem:

$$S \leq 1 \cdot 2n + 2 \cdot (n^2 - 2n) = (2n - 2)n.$$

Střelec na libovolném krajním poli šachovnice ohrožuje přesně n polí. Jednoduše můžeme nahlédnout, že střelec, který stojí na stejné úhlopříčce, ale mimo okraj šachovnice, ohrožuje nejméně $n + 2$ polí. Označme a počet střelců mimo okraje šachovnice a b počet střelců u jejích okrajů. Protože je $a + b = 2n - 2$, platí nerovnost:

$$S \geq bn + a(n + 2) = (a + b)n + 2a = (2n - 2)n + 2a.$$

Celkově tedy dostáváme odhad pro S:

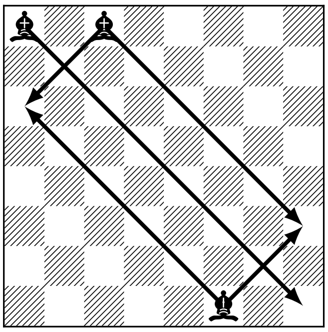
$$(2n - 2)n + 2a \leq S \leq (2n - 2)n.$$

To ovšem znamená, že a musí být rovno nule, a všichni střelci tedy stojí u okrajů šachovnice. $\square$

Následující věta říká, kolik existuje možností umístění maximálního počtu nezávislých střelců na šachovnici $n \times n$. Její důkaz najdeme v knize [3] Henryho Ernesta Dudeneyho.

Věta 9. *Pro $n \geq 2$ je počet všech možností rozmístění $2n - 2$ nezávislých střelců na šachovnici $n \times n$ roven 2^n.*

Důkaz. Pro $n = 2$ je tvrzení jasné. Pro $n > 2$ využijeme věty 8, díky které víme, že střelci stojí pouze na okrajích šachovnice. Jestliže střelce umístíme do jednoho rohového pole, v protějším rohu už střelec stát nemůže. Pokud střelec v jednom rohu nestojí, musí jistě stát v protějším rohu. Podobně platí, že pokud umístíme střelce do nejvyššího řádku na pole o souřadnicích (n, k), pak na polích u pravého a levého okraje se souřadnicemi (k, n) a $(n - k + 1, 1)$ střelci nestojí, neboť jsou tato pole střelcem ohrožována. Navíc je již jasné, že v nejnižším řádku na poli o souřadnicích $(1, n-k+1)$ střelec stojí, protože jediná další krajní pole, ze kterých lze pole $(1, n - k + 1)$ ohrozit, jsou dvě právě zmíněná pole u pravého a levého okraje, a ta jsou prázdná (obr. 9).



Obr. 9. Ohrožování krajních polí střelci na šachovnici 8×8

Pokud naopak neumístíme střelce do nejvyššího řádku na pole o souřadnicích (n, k), pak na polích u levého a pravého okraje se souřadnicemi $(n - k + 1, 1)$ a (k, n) střelci stojí a v nejnižším řádku na poli o souřadnicích $(1, n - k + 1)$ střelec nestojí.

Na každém poli nejvyššího řádku šachovnice se tedy můžeme rozhodnout, zda na něj postavíme střelce. U každého takového pole máme dvě možnosti a v jednom řádku je dohromady n polí. To je dohromady 2^n možností. Rozmístění střelců na zbývajících krajních polích je již jednoznačně určeno. $\square$

3.5. Nezávislost králů

Důkaz následující věty, která říká, kolik nejvýše nezávislých králů můžeme umístit na šachovnici $n \times n$, pochází opět z knihy [10] bratří Jaglomů.

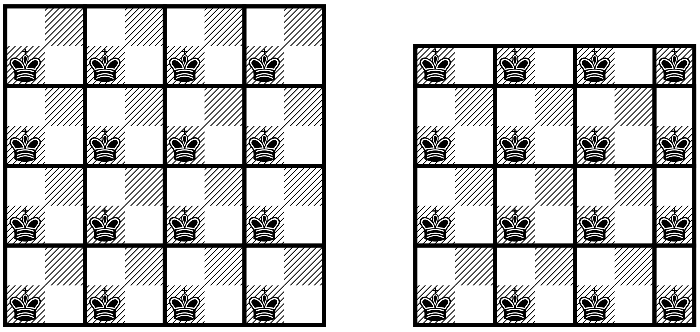
Věta 10. *Pro každé přirozené n platí*

$$\beta(K_{n,n}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}n\right)^2, & \textit{je-li } n \textit{ sudé,} \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2, & \textit{je-li } n \textit{ liché.} \end{cases}$$

Důkaz. Pro $n = 1$ je tvrzení jasné. Ostatní hodnoty n rozdělíme stejně jako ve znění věty na sudé a liché. V obou případech však využijeme toho, že do čtverce 2×2 lze umístit nejvýše jednoho nezávislého krále.

- n sudé: Šachovnici $n \times n$ lze rozdělit na $\left(\frac{1}{2}n\right)^2$ čtverců 2×2. Proto platí nerovnost $\beta(K_{n,n}) \leq \left(\frac{1}{2}n\right)^2$. Pokud navíc do těchto čtverců umístíme po jednom králi na stejnou pozici (např. do levého dolního rohu), jsou tito královéhradecké nezávislí (obr. 10a). Dostáváme tedy rovnost $\beta(K_{n,n}) = \left(\frac{1}{2}n\right)^2$.
- n liché, $n > 1$: Jestliže je n liché, znamená to, že $n - 1$ je sudé. Proto umístíme na šachovnici $(n-1) \times (n-1)$ krále stejným způsobem, který jsme popsali výše. Takto rozmístíme $\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)^2$ králů. Dále přidáme zbývající n-tý řádek a n-tý sloupec a rozdělíme je na jeden společný čtverec 1×1 v rohu šachovnice a $n - 1$ obdélníků 2×1 (obr. 10b). Využijeme toho, že do obdélníku 2×1 lze umístit nejvýše jednoho nezávislého krále, a umístíme krále do levého pole všech obdélníků v n-tém řádku a do spodního pole všech obdélníků v n-tém sloupci. Navíc postavíme krále na pole se souřadnicemi (n, n). Dohromady tedy dostáváme rovnost $\beta(K_{n,n}) = \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n-1) + 1 = \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2$.

$\square$



(a) šachovnice 8×8 (b) šachovnice 7×7

Obr. 10. Nezávislost králů na šachovnici $n \times n$

Také pro krále platí, že zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých králů na šachovnici $n \times n$, ale alespoň pro nízké hodnoty n lze příslušné počty získat pomocí počítače, viz tabulku 3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
počet řešení na šachovnici $n \times n$	1	4	1	79	1	3 600	1	281 571

Tab. 3. Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých králů na šachovnici $n \times n$ (údaje převzaty z `http://oeis.org/A193580`)

4. Dominance na šachovnici

V úlohách o dominanci figur na šachovnici hledáme minimální počet figur předepsaného typu, které musíme na šachovnici rozmístit tak, aby pokrývaly všechna její pole (pole šachovnice je pokryto, pokud se na něj může nějaká figura dostat jedním povoleným tahem nebo na něm přímo stojí). Podobně jako v předchozí kapitole nás bude zajímat minimální potřebný počet figur, jejich rozmístění, případně počet možností. Opět budeme uvažovat nejen klasickou šachovnici 8×8, ale i další čtvercové šachovnice.

Při hledání počtu řešení opět započítáváme všechna řešení, která nejsou stejná. Pro připomenutí, to znamená, že pokud jedno řešení vznikne rotací nebo osovou symetrií z druhého, považujeme tato řešení za různá a započítáváme obě.

Podobně jako v předchozí kapitole nejprve připomeneme několik dalších pojmů z teorie grafů, které budeme používat.

Množinu vrcholů $D \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ nazveme *dominující*, pokud každý vrchol z $V \backslash D$ je spojen hranou s některým vrcholem z D. Řekneme, že dominující množina vrcholů $D \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ je *minimální*, jestliže v tomto grafu neexistuje žádná dominující množina s menším počtem prvků. *Dominance grafu* G je rovna počtu prvků minimální dominující množiny a značí se $\gamma(G)$.

Řešení úlohy o dominanci figur na šachovnici $n\times n$ je ekvivalentní hledání minimální dominující množiny v příslušném grafu, jehož konstrukci jsme popsali v úvodu článku. Minimální počet figur, které musíme na šachovnici $n \times n$ rozmístit tak, aby pokrývaly všechna její neobsazená pole, je roven dominanci grafu.

4.1. Dominance věží

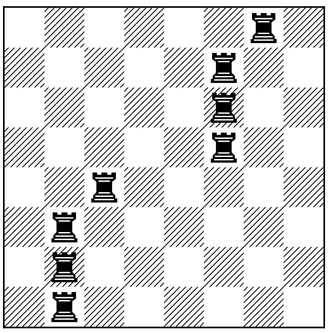
Úloha o dominanci věží na šachovnici $n \times n$ patří mezi nejjednodušší úlohy tohoto typu, proto zde následující věty uvádíme bez důkazů.

Věta 11. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

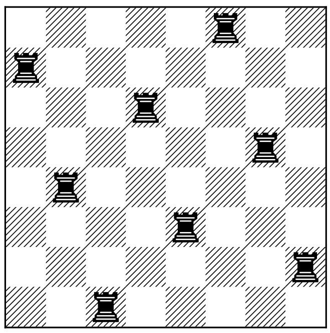
$$\gamma(V_{n,n}) = n.$$

Věta 12. *Počet způsobů, jak šachovnici $n \times n$ pokrýt n věžemi, je $2n^n - n!$.*

Na obrázku 11 uvádíme dvě možnosti z celkových $2 \cdot 8^8 - 8! = 33\,514\,112$, jak rozmístit 8 věží na šachovnici 8×8 tak, aby ji celou pokrývaly.



(a) věž v každém řádku



(b) věž v každém řádku i sloupci

Obr. 11. Dominance věží na šachovnici 8×8

4.2. Dominance králů

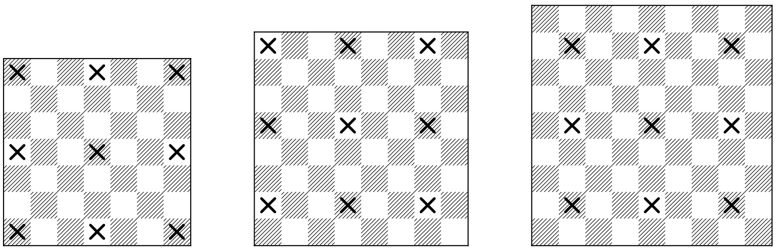
John J. Watkins v knize [17] píše, že je dominance králů také překvapivě jednoduchá, a dokonce nudná, což demonstruje na důkazu hodnoty dominance grafu $K_{n,n}$. Abychom se o její jednoduchosti přesvědčili i my, ukážeme Watkinsův důkaz v mírně upravené formě.

Věta 13. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(K_{n,n}) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x.

Důkaz. V obrázku 12 je na šachovnici 7×7, 8×8 a 9×9 označeno 9 polí, z nichž žádná dvě není schopen pokrýt pouze jeden král.



(a) šachovnice 7×7 (b) šachovnice 8×8 (c) šachovnice 9×9

Obr. 12. Důkaz dominance králů

Podobně lze postupovat i na šachovnicích jiných rozměrů. Pro libovolné přirozené číslo k začneme na šachovnicích typu $(3k-2) \times (3k-2)$ na poli $(1,1)$, na šachovnicích typu $(3k-1) \times (3k-1)$ na poli $(2,1)$ a na šachovnicích typu $(3k) \times (3k)$ na poli $(2,2)$ a mezi každými dvěma označenými poli necháme dvě neoznačená pole ve vodorovném i svislém směru. Žádná dvě takto označená pole není schopen pokrýt pouze jeden král. To znamená, že k pokrytí šachovnic potřebujeme nejméně tolik králů, kolik je označených polí. Na šachovnicích všech tří zmíněných typů je tento počet roven hodnotě k^2. U prvního typu šachovnic je $n = 3k-2$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n+2}{3}\right)^2$. U druhého typu šachovnic je $n = 3k-1$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right)^2$. U třetího typu šachovnic je $n = 3k$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n}{3}\right)^2$. Souhrnně tedy můžeme napsat, že je k pokrytí libovolné šachovnice $n \times n$ potřeba alespoň $\lfloor\frac{n+2}{3}\rfloor^2$ králů.

Jestliže na šachovnici $n \times n$ umístíme krále na všechna pole označená způsobem, který jsme popsali v předchozím odstavci, pak pokryjí celou šachovnici. Počet těchto králů odpovídá počtu označených polí a těch je $\lfloor\frac{n+2}{3}\rfloor^2$. $\square$

V dostupné literatuře zatím neexistuje odhad počtu možností umístění dominujících králů na šachovnici $n \times n$.

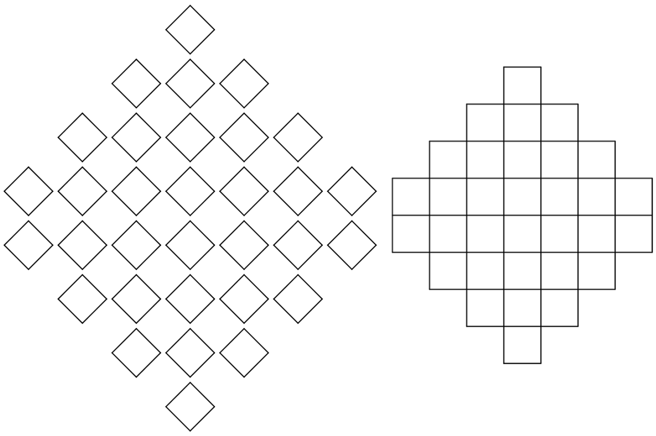
4.3. Dominance střelců

Začneme opět větou, která říká, jaká je hodnota dominance střelců pro šachovnici $n \times n$. Její důkaz pochází z již citované knihy [10] bratří Jaglomů.

Věta 14. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(S_{n,n}) = n.$$

Důkaz. Jak jsme uvedli v úvodu článku, střelec se může pohybovat pouze po úhlopříčkách. Protože je každá úhlopříčka tvořena poli jedné barvy, znamená to, že se každý střelec může pohybovat po polích pouze jedné barvy. Při řešení dominance střelců na šachovnici $n \times n$ proto postupujeme tak, že úlohu řešíme zvlášť pro černá a zvlášť pro bílá pole. Představme si nyní, že se šachovnice otočí o 45° doprava, odstraní se všechna pole např. černé barvy (obr. 13a) a zbylá pole se složí k sobě (obr. 13b). Potom se střelci pohybují vodorovně a svisle místo po diagonálách a jejich pohyb po takto upravené šachovnici tedy odpovídá pohybu věží.



(a) pole bílé barvy (b) složení bílých polí

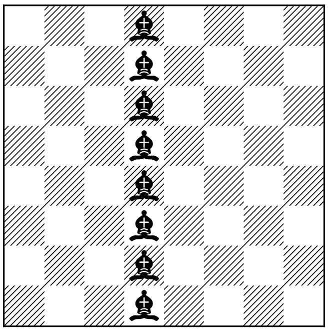
Obr. 13. Otočení a složení bílých polí šachovnice 8×8

Protože se pro n liché liší počet černých a bílých polí na šachovnici $n \times n$, je třeba řešení dále rozdělit na případ, kdy je n sudé, a na případ, kdy je n liché.

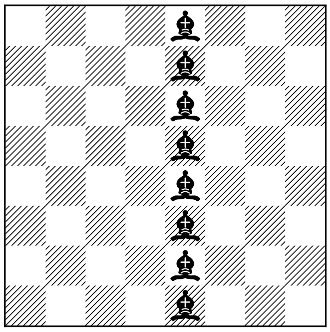
- n sudé: Otočením a složením polí jedné barvy šachovnice $n \times n$ vzniká nepravidelný útvar, který ve svém středu obsahuje obdélník $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2} + 1\right)$. Na jeho pokrytí potřebujeme jistě alespoň $\frac{n}{2}$ věží. Na pokrytí původního neotočeného útvaru je tedy zapotřebí stejný počet střelců (již jsme uvedli, že pohyb střelců po této upravené šachovnici odpovídá pohybu věží, proto je odhad pro oba typy figur stejný). Počet černých polí je v tomto případě stejný jako počet bílých polí. Proto k jejich pokrytí potřebujeme také alespoň $\frac{n}{2}$ střelců. Dohromady tedy na pokrytí šachovnice $n \times n$ potřebujeme alespoň $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ střelců.

Na obrázcích 14a a 14b ukazujeme dvě možnosti rozmístění střelců dominujících šachovnici 8×8. Pokud na ostatních čtvercových šachovnicích $n \times n$, kde n je sudé, postupujeme stejně a umístíme jednoho střelce do každého pole sloupce s číslem $\frac{n}{2}$ nebo do každého pole sloupce s číslem $\frac{n}{2} + 1$, bude jimi pokryta celá šachovnice. K pokrytí šachovnice $n \times n$ nám proto stačí nejvýše n střelců.

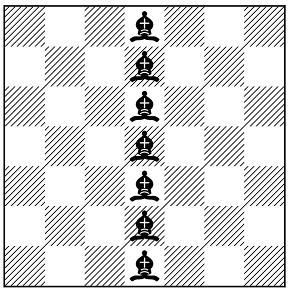
Pro n sudé jsme dokázali, že je k pokrytí šachovnice $n \times n$ potřeba právě n střelců.



(a) šachovnice 8×8



(b) šachovnice 8×8

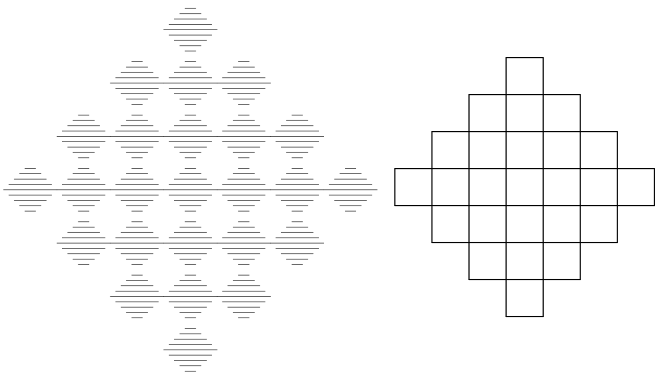


(c) šachovnice 7×7

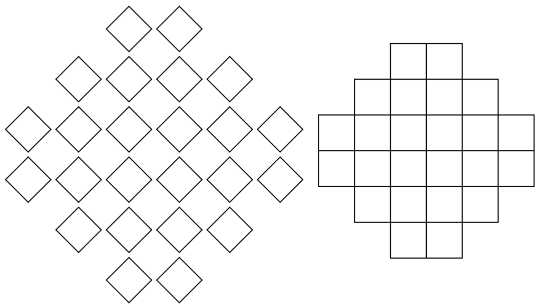
Obr. 14. Dominance střelců

- n liché: Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí. Zaměříme se tedy na $n \geq 3$. Jestliže je n liché, můžeme je zapsat ve formě $n = 2k + 1$ pro nějaké přirozené číslo k. Dále víme, že pole se souřadnicemi $(1, 1)$ má černou barvu, takže bude černých polí pro n liché vždy o jedno více než bílých polí.

  Otočením a složením polí černé barvy (obr. 15a a 15b) vzniká útvar obsahující ve svém středu čtverec $k \times k$, na jehož pokrytí potřebujeme určitě alespoň k věží, a tedy i stejný počet střelců. Otočením a složením polí bílé barvy (obr. 15c a 15d) vzniká útvar obsahující ve svém středu čtverec $(k+1) \times (k+1)$, na jehož pokrytí potřebujeme určitě alespoň $k + 1$ věží, a tedy i stejný počet střelců. Dohromady tedy na pokrytí šachovnice $n \times n$ potřebujeme alespoň $k + (k+1) = 2k+1$ střelců.



(a) pole černé barvy (b) složení černých polí



(c) pole bílé barvy (d) složení bílých polí

Obr. 15. Otočení a složení polí šachovnice 7×7

Jestliže umístíme jednoho střelce do každého pole sloupce s číslem $k+1$, bude jimi pokryta celá šachovnice (na obrázku 14c vidíme pokrytí šachovnice 7×7). K pokrytí šachovnice $n \times n$ nám proto stačí nejvýše n střelců.

Pro n liché jsme dokázali, že je k pokrytí šachovnice $n \times n$ potřeba právě n střelců.

Bez ohledu na to, zda bylo n liché nebo sudé, jsme dokázali, že $\gamma(S_{n,n}) = n$. $\square$

Důkaz následující věty již uvádět nebudeme. K nahlédnutí je ve výše citované knize [10].

Věta 15. *Je-li $n \geq 2$, pak počet způsobů, jak šachovnici $n \times n$ pokrýt střelci, je:*

- *pro $n = 4k$:* $\left(\frac{(2k)!(4k+1)}{2}\right)^2$,
- *pro $n = 4k+1$:* $(2k)!(2k)!\frac{16k^3+24k^2+11k+1}{2}$,
- *pro $n = 4k+2$:* $\left((2k)!(4k^2+5k+2)\right)^2$,
- *pro $n = 4k+3$:* $(2k+1)!(2k)!(16k^4+56k^3+67k^2+33k+6)$.

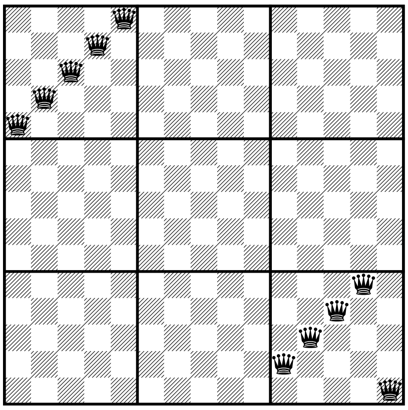
4.4. Dominance dam

Zatím se pro šachovnici $n \times n$ nepodařilo zjistit, jaká je přesná hodnota $\gamma(D_{n,n})$. Jsou známy pouze hodnoty dominancí pro malá přirozená čísla n. Dále existují věty, které tuto hodnotu odhadují shora a zdola. Důkaz následující věty pochází z článku [2] Ernesta J. Cockaynea, ten však za jejího autora označuje L. Welche.

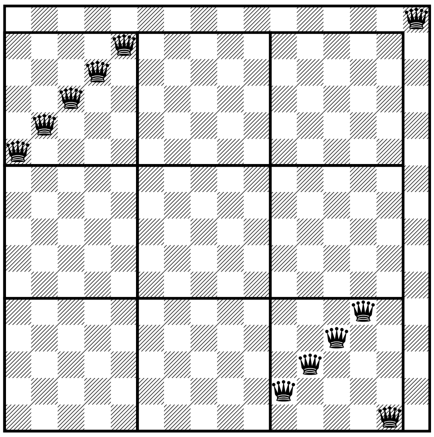
Věta 16. *Pro šachovnici $n \times n$, kde $n = 3m + r$, $0 \le r < 3$, platí*

$$\gamma(D_{n,n}) \le 2m + r.$$

Důkaz. Šachovnici $3m \times 3m$ rozdělíme na devět čtverců $m \times m$ a rozmístíme m dam do levého horního čtverce a m dam do pravého dolního čtverce tak, aby pokrývaly celou šachovnici.



(a) šachovnice 15×15



(b) šachovnice 16×16

Obr. 16. Dominance dam

Na její pokrytí tedy potřebujeme $m + m = 2m$ dam. Na obrázku 16a vidíme rozdělení a pokrytí šachovnice 15×15, v obecném případě postupujeme podle stejného schématu.

Šachovnice $(3m{+}1) \times (3m{+}1)$ má oproti šachovnici $3m \times 3m$ o jeden řádek a sloupec více. Tento řádek a sloupec lze pokrýt jednou další dámou tak, že ji umístíme na pole se souřadnicemi $(3m + 1, 3m + 1)$. Na pokrytí šachovnice $(3m + 1) \times (3m + 1)$ nám tedy stačí $m + m + 1 = 2m + 1$ dam (obr. 16b pro speciální případ šachovnice 16×16). Podobně má šachovnice $(3m + 2) \times (3m + 2)$ oproti šachovnici $(3m + 1) \times (3m + 1)$ o jeden řádek a sloupec více a ty lze opět pokrýt jednou další dámou tak, že ji umístíme na pole se souřadnicemi $(3m + 2, 3m + 2)$. Na pokrytí šachovnice $(3m + 2) \times (3m + 2)$ proto stačí $m + m + 1 + 1 = 2m + 2$ dam. $\square$

Také následující větu lze nalézt v již citovaném článku [2]. Důkaz je poměrně technický, proto jej neuvádíme a odkazujeme zájemce na [2] nebo [9].

Věta 17. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(D_{n,n}) \geq \frac{n-1}{2}.$$

Věta 17 poskytuje dolní odhad dominace $\gamma(D_{n,n})$. Nabízí se přirozená otázka, za jakých okolností je tento odhad optimální. Dmitry Finozhenok a William D. Weakley ve svém článku [4] dokázali, že rovnost $\gamma(D_{n,n}) = \frac{n-1}{2}$ nastává jen pro $n = 3$ a $n = 11$. V ostatních případech tedy odhad z věty 17 není optimální.

V tabulce 4 uvádíme pro několik nejmenších n odhady hodnot $\gamma(D_{n,n})$ získané z vět 16 a 17.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
dolní odhad $\gamma(D_{n,n})$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
horní odhad $\gamma(D_{n,n})$	1	2	2	3	4	4	5	6

Tab. 4. Odhady minimálního počtu dam potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$

Přesné hodnoty $\gamma(D_{n,n})$ jsou alespoň pro některá n díky počítačům také známé. Několik z nich uvádíme v tabulce 5.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(D_{n,n})$	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$\gamma(D_{n,n})$	5	6	7	8	9	9	9	9	10	

Tab. 5. Minimální počet dam potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$ (údaje převzaty z `http://oeis.org/A075458`)

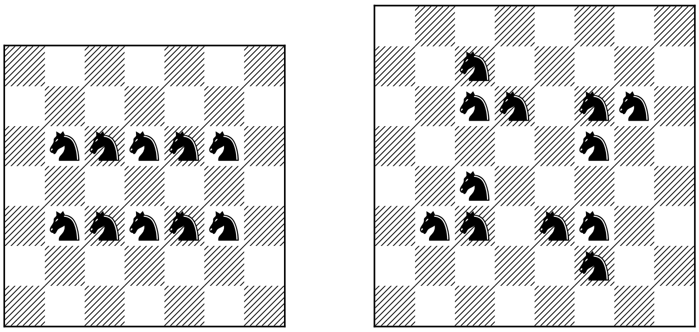
4.5. Dominance jezdců

Stejně jako pro dámy, ani pro jezdce zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění minimálního počtu jezdců potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$, ale alespoň pro nízké hodnoty n lze příslušné počty získat pomocí počítače, viz tabulku 6.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(J_{n,n})$	1	4	4	4	5	8	10	12	14	16
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\gamma(J_{n,n})$	21	24	28	32	36	40	46	52	57	62

Tab. 6. Minimální počet jezdců potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$ (údaje převzaty z `http://oeis.org/A006075`)

Dále uvádíme ukázky konkrétních řešení na šachovnici o rozměrech 7×7 a 8×8 (obr. 17a a 17b).



(a) šachovnice 7×7 (b) šachovnice 8×8

Obr. 17. Dominance jezdců

4.6. Vztah dominance a nezávislosti

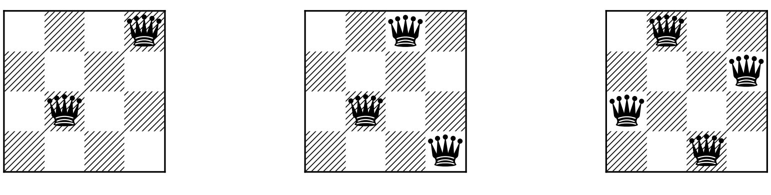
Na závěr celé kapitoly ještě uvedeme jeden zajímavý vztah týkající se nezávislosti a dominance. Pro každý graf G platí nerovnost

$$\gamma(G) \leq \beta(G).$$

Jestliže najdeme maximální nezávislou množinu vrcholů v grafu G, pak je tato množina jistě dominující. Pokud by dominující nebyla, existoval by vrchol v grafu G, který by nebyl spojen s žádným vrcholem z nezávislé množiny a ani by sám nebyl její součástí. Takový vrchol bychom tedy mohli do nezávislé množiny přidat a zvětšit tak počet jejích vrcholů. To je však spor s tvrzením, že počet vrcholů původní nezávislé množiny byl maximální.

Ukázali jsme, že každá maximální nezávislá množina je zároveň dominující. Nyní se pokusíme zjistit, zda také naopak platí, že každá minimální dominující množina je nezávislá.

Toto tvrzení můžeme podobně jako John J. Watkins v knize [17] jednoduše vyvrátit příkladem dam na šachovnici 4×4. Na obrázku 18a vidíme dvě dámy, které pokrývají celou šachovnici 4×4, ale nejsou nezávislé. Pokud figury přemístíme a přidáme k nim třetí (obr. 18b), pak pokrývají celou šachovnici a jsou i nezávislé. Netvoří však maximální nezávislou množinu. Tu dostaneme až opětovným přemístěním figur a přidáním čtvrté dámy (obr. 18c). Tyto úvahy nás motivují k definici dalšího pojmu z teorie grafů.



(a) minimální dominující množina (b) dominující a nezávislá množina (c) dominující a maximální nezávislá množina

Obr. 18. Dominance a nezávislost dam na šachovnici 4×4

Nezávislá dominance grafu G je rovna počtu vrcholů nejmenší nezávislé a dominující množiny a značí se $i(G)$.

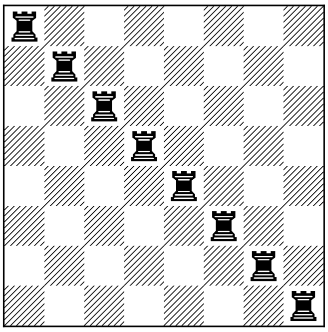
V tuto chvíli je jasné, že pro libovolný graf G platí nerovnost

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G).$$

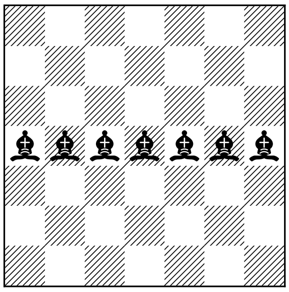
Na obrázku 18 například vidíme, že $\gamma(D_{4,4}) = 2$, $i(D_{4,4}) = 3$ a $\beta(D_{4,4}) = 4$. Zajímavá je však především otázka, pro které grafy G platí rovnost

$$\gamma(G) = i(G).$$

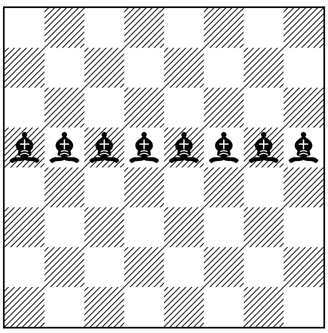
Ve Watkinsově, již několikrát citované, knize [17] se dočteme, že pro grafy $V_{n,n}$, $S_{n,n}$ a $K_{n,n}$ tato rovnost platí pro libovolné n. Věže stačí umístit na jednu z úhlopříček spojujících protější rohová pole (obr. 19a). Střelce postavíme do všech polí prostředního sloupce nebo řádku v případě, že je n liché (obr. 19b). Pokud je n sudé, vybereme si jeden ze dvou prostředních sloupců nebo řádků a opět zaplníme všechna jeho pole (obr. 19c). V případě králů můžeme využít rozmístění popsané v důkazu věty 13 (obr. 19d).



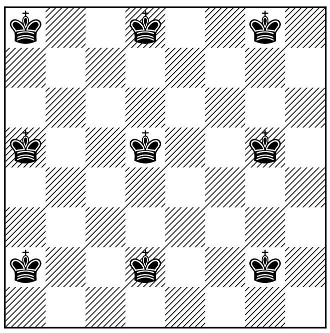
(a) 8 věží na šachovnici 8×8



(b) 7 střelců na šachovnici 7×7



(c) 8 střelců na šachovnici 8×8



(d) 9 králů na šachovnici 8×8

Obr. 19. Ukázky případů, kdy $\gamma(G) = i(G)$

Jak jsme již ukázali výše, rovnost $\gamma(D_{n,n}) = i(D_{n,n})$ obecně neplatí. Kromě uvedeného příkladu, kdy $n = 4$, jsou však známé pouze dvě další hodnoty n, pro které rovnost neplatí, a to je $n = 6$ a $n = 12$.

Poslední figura, kterou jsme zatím v souvislosti s porovnáním hodnot dominance grafu a nezávislé dominance grafu nezmínili, je jezdec. O něm jsme však schopni říct pouze to, že pro všechny hodnoty $n \in \{1, \dots, 10\}$ kromě $n = 7$ a $n = 8$ nastává rovnost $\gamma(J_{n,n}) = i(J_{n,n})$.

5. Závěr

Matematické úlohy inspirované šachem jsou velmi oblíbené nejen mezi matematiky a šachisty, ale díky velkému množství populárně naučné literatury, která se tomuto tématu věnuje, se úlohy dostaly do povědomí širší veřejnosti. Autorka se tímto tématem navíc zabývala ve své diplomové práci [9], kde lze najít většinu zde vynechaných důkazů vět a také mnoho obrázků ilustrujících řešení úloh na vybraných šachovnicích. Velkou zásluhu na popularizaci šachových úloh má např. Martin Gardner, jehož práce [5] je zaměřena na jezdcovu procházku. Několik dalších autorů se nespokojilo s hledáním jezdcovy procházky pouze na obdélníkových šachovnicích v rovině. Kelley Seibel se ve své práci [15] zabývá jezdcovými procházkami po válci a anuloidu, John J. Watkins k nim ve své knize [17] přidává procházky po Kleinově láhvi a Möbiově listu. Podobně se dají rozšířit úlohy o nezávislosti a dominanci figur. Liam H. Harris, Stephanie Perkins, Paul A. Rauch a Sian K. Jones [8] dokázali najít hodnoty nezávislosti střelců na válci, Möbiově listu, anuloidu, Kleinově láhvi a na plášti krychle. Martin Gardner v další ze svých knih [6] ukazuje, jak lze umístit na šachovnici osm figur (krále, dámu, dva střelce, dva jezdce a dvě věže) tak, aby ohrožovaly nejmenší možný počet polí nebo naopak, aby ohrožovaly největší možný počet polí.

Poděkování. Autorka děkuje za množství cenných připomínek doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D.

L i t e r a t u r a

[1] Bezzel, M.: *Zwei Schachfragen.* Berliner Schachzeitung *3* (1848), 363.

[2] Cockayne, E. J.: *Chessboard domination problems.* Discrete Math. *86 (1–3)* (1990), 13–20.

[3] Dudeney, H. E.: *Amusements in mathematics.* Thomas Nelson, London, 1917.

[4] Finozhenok, D., Weakley, W. D.: *An improved lower bound for domination numbers of the queen's graph.* Australas. J. Combin. *37* (2007), 295–300.

[5] Gardner, G.: *Mathematical magic show.* MAA, Washington, DC, 1989.

[6] Gardner, G.: *The unexpected hanging and other mathematical diversions.* The University of Chicago Press, 1991.

[7] Greenberg, R.: *Elementary problems and solutions E1585 II.* Amer. Math. Monthly *71 (2)* (1964), 210.

[8] Harris, L. H., Perkins, S., Rauch, P. A., Jones, S. K.: *Bishop independence.* British J. Math. Comput. Sci. *3 (4)* (2013), 835–843.

[9] Chybová, L.: *Šachové úlohy v kombinatorice.* Diplomová práce, MFF UK, 2017 [online]. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf`

[10] Jaglom, A. M., Jaglom, I. M.: *Challenging mathematical problems with elementary solutions, Vol. 1.* Combinatorial analysis and probability theory. Dover Publications, New York, 1964.

[11] Nauck, F.: *Briefwechseln mit Allen für Alle.* Illustrierte Zeitung *15 (377)* (1850), 182.

[12] Pauls, E.: *Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrete I.* Deutsche Schachzeitung, Leipzig, Nr. *5* (1874), 129–134.

[13] Pauls, E.: *Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrete II.* Deutsche Schachzeitung, Leipzig, Nr. *9* (1874), 257–267.

[14] Raghavan, V., Venkatesan, S. M.: *On bounds for a board covering problem.* Inform. Process. Lett. *25* (1987), 281–284.

[15] Seibel, K.: *The knight's tour on the cylinder and torus.* Proc. Res. Experiences Undergrad. Program Math., Oregon State University, Summer 1994.

[16] Schwenk, A. J.: *Which rectangular chessboards have a knight's tour?* Math. Mag. *64 (5)* (1991), 325–332.

[17] Watkins, J. J.: *Across the board: The mathematics of chessboard problems.* Princeton University Press, 2004.