Jan Kuchařík

Výpočet objemu pravidelného dvanáctistěnu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 2, 1–11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147258`

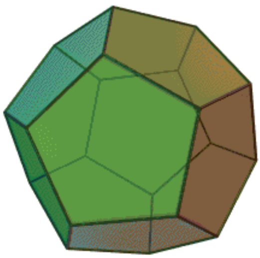
Výpočet objemu pravidelného dvanáctistěnu

Jan Kuchařík, Praha

Abstract. In the article, we shall determine the volume of a regular dodecahedron—one of the Platonic solids. A brief historical introduction is followed by the information on a regular pentagon and golden section, which is then applied in the calculations concerning the regular dodecahedron.

Úvod a historické zařazení

Pravidelný dvanáctistěn (též dodekahedron; je zobrazen na obr. 1), jakožto jedno z pěti Platónských těles, se tradičně těší velké oblibě matematiků. Platónská tělesa se vyznačují vysokou mírou symetrie a na pohled velkou estetičností. Každé z těchto těles má mimořádný význam, neb se dá snadno dokázat (viz např. [1]), že jich existuje opravdu jen pět. Už Euklides věnoval jeden ze svazků svých Základů právě jim, dalo by se říct, že se jednalo o vyvrcholení celé jeho učebnice, jakousi pomyslnou „třešničku na dortu“.



Obr. 1: Pravidelný dvanáctistěn

Platón sám o těchto tělesech uvažoval i v jiném významu – na mikroskopické úrovni se mělo jednat o geometrické znázornění „atomů“, z nichž se skládají jednotlivé živly – oheň, země, voda, vzduch. Špičatý čtyřstěn představoval pronikavý oheň, krychle (šestistěn) zpodobňovala pevnou stabilní zemi, zaoblenější dvacetistěn představoval tekoucí vodu, a lehce vanoucímu a vším pronikajícímu vzduchu se přiřadil osmistěn. Páté nevyužité těleso – dodekahedron – nemělo v tomto modelu živel přiřazen. Aristoteles sice později přidal ke čtyřem tradičním živlům ještě éter – látku tvořící nebe – ale s pravidelným dvanáctistěnem už tento živel nespojil.

Dnes samozřejmě víme, že model je nesprávný, ale je zajímavé si tyto historické představy připomenout. Kromě toho atomistické názory se pak vyskytovaly i u dalších filosofů (Demokritos) a sloužily jako odrazový můstek pro dnešní moderní vědu.

Protože se jedná o téma známé už od antiky, existuje mnoho knih i internetových stránek, kde je o těchto tělesech pojednáno mnohem obšírněji. V tomto článku bychom se chtěli zaměřit na jeden konkrétní problém, totiž vypočítat objem pravidelného dvanáctistěnu. Byť se jedná o těleso vysoce symetrické, jedná se už o poměrně složitou geometrickou strukturu a odvodit objem tohoto tělesa není vůbec snadný úkol. Na druhou stranu, jedná se o úkol řešitelný středoškolskými prostředky.

Pravidelný pětiúhelník a jeho charakteristika

Protože dodekahedron je těleso, jehož stěny mají tvar pravidelných pětiúhelníků, bude vhodné naši analýzu problému započít tím, že se zaměříme právě na pravidelný pětiúhelník. Konkrétně bude potřeba pomocí délky jeho strany a vyjádřit všechny charakteristické veličiny v něm.

Už od dob Pythagorejců je známo, že pravidelný pětiúhelník v sobě obsahuje proporce známé pod označením „zlatý řez“. Je proto vhodné tento poznatek stručně připomenout.

Definice zlatého řezu. Uvažme následující konstrukci: rozdělme danou úsečku AB bodem C tak, aby délka delšího úseku AC k délce kratšího úseku CB byla ve stejném poměru jako délka celé úsečky AB k délce delšího úseku AC. Matematicky zapsáno:

$$\Phi = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

Celá situace je znázorněna přehledně na obr. 2:

Obr. 2: Zlatý řez úsečky AB

Označíme-li délku kratšího úseku CB jako x a délku delšího úseku jako y, lze poslední rovnost přepsat do tvaru

$$\Phi = \frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}. \tag{1}$$

Na pravé straně rovnosti si lze všimnout, že výraz $\frac{x+y}{y}$ lze přepsat do tvaru $\frac{x}{y}+1$. Zlomek $\frac{x}{y}$ ale není nic jiného, než převrácená hodnota zlatého řezu $\frac{y}{x} = \Phi$. Odtud dostáváme rovnici pro hodnotu zlatého řezu:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Jejím vyřešením dostáváme dva kořeny, z nichž kladný (ten důležitý) dává hodnotu

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618.$$

Rovnici pro zlatý řež lze také převést do často uváděného ekvivalentního tvaru $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Zde se zastavíme a odvodíme z ní jeden speciální důsledek, který se nám bude později hodit:

$$3 - \Phi^2 = (\Phi - 1)^2$$

Pokud tuto zvláštní formu odmocníme (na obou stranách jsou kladná čísla), obdržíme

$$\sqrt{3 - \Phi^2} = \Phi - 1.$$

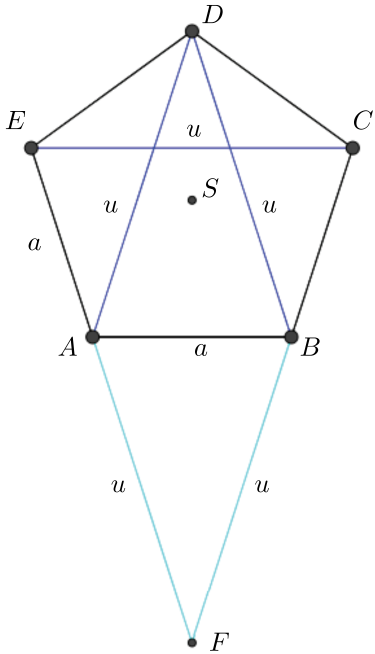
Později v průběhu poměrně náročného výpočtu objemu dvanáctistěnu na přesně takový výraz narazíme.

Výskyt zlatého řezu uvnitř pravidelného pětiúhelníku

Poměr délky úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku k délce jeho strany je právě poměr zlatého řezu (pro úplnost poznamenejme, že všechny úhlopříčky jsou stejně dlouhé). Označíme-li délku strany jako a, úhlopříčky jako u, pak tedy platí

$$\frac{u}{a} = \Phi. \tag{2}$$

Důkaz je založen na následující myšlence. Uvažme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a definujme bod F jako průsečík polopřímek CB a EA. Protože $AD \parallel CB$ a $BD \parallel EA$, tak čtyřúhelník $BDAF$ je rovnoběžník. Navíc protože $|AD| = |BD|$, jedná se dokonce o kosočtverec. Z toho důvodu tedy nutně mají i strany AF, BF délku u.



Obr. 3: Pravidelný pětiúhelník

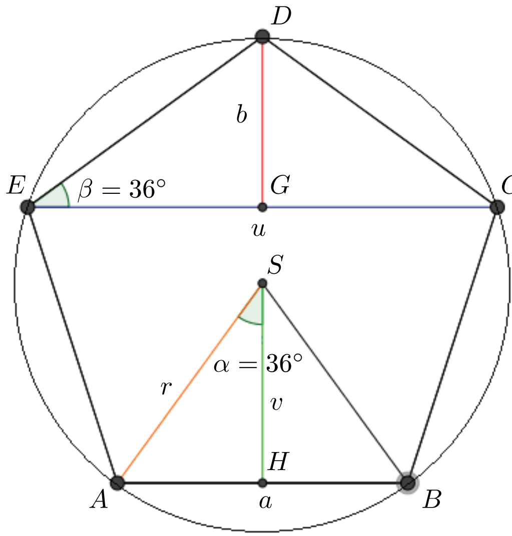
Uvažme nyní podobné trojúhelníky FAB, FEC a vyjádřeme poměr délek ramena a základny. Pro trojúhelník FAB máme $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{u}{a}$, pro trojúhelník FEC máme $\frac{|EF|}{|EC|} = \frac{u+a}{u}$. Srovnáním dostáváme rovnost

$$\frac{u}{a} = \frac{u+a}{u}.$$

Jedná se o rovnost identickou s (2), proto $\frac{u}{a} = \Phi$.

Charakterizace důležitých veličin pravidelného pětiúhelníku

Nyní už disponujeme potřebnými znalostmi, abychom si mohli vypočítat, cokoliv nás v pravidelném pětiúhelníku bude zajímat. Později při výpočtu objemu dodekahedronu se ukáže, že klíčovou důležitost mají délky u, b, r, v na obr. 4. Vyjádříme nyní všechny tyto délky pomocí délky strany a.



Obr. 4: Délky v pravidelném pětiúhelníku

Než se do toho pustíme, připomeňme si velikosti charakteristických úhlů v pravidelném pětiúhelníku:

1. středový úhel ASB je pětina plného úhlu, tj. $\frac{2\pi}{5} = 72°$, takže úhel ASH má velikost $\frac{\pi}{5} = 36°$
2. úhel CED je obvodový vůči středovému úhlu CSD; protože středové úhly mají velikost $\frac{2\pi}{5} = 72°$, obvodové mají velikost $\frac{\pi}{5} = 36°$

Nyní se už pusťme do výpočtů:

- $b = a \sin\frac{\pi}{5}$ … z pravoúhlého trojúhelníku DEG
- $u = \Phi a$ … víme, že délky u, a jsou k sobě v poměru zlatého řezu
- $r = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ … z pravoúhlého trojúhelníku ASH
- $v = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$ … z pravoúhlého trojúhelníku ASH

Hodnoty funkcí sinus a tangens jsou sice snadno na kalkulačce získatelná čísla, nicméně my dokážeme jejich hodnotu pro velikost úhlu $\frac{\pi}{5}$ určit i bez ní. To je možné právě díky tomu, že pravidelný pětiúhelník v sobě ukrývá zlatý řez. Využijeme toho, že úhel velikosti $\frac{\pi}{5}$ je vnitřním úhlem pravoúhlého trojúhelníku DEG, a tedy

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{u/2}{a} = \frac{\Phi}{2}.$$

Z goniometrie víme, že $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, tedy pro náš konkrétní úhel

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{1-\frac{\Phi^2}{4}}.$$

Odtud určíme

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \frac{\sin(\pi/5)}{\cos(\pi/5)} = \frac{\sqrt{1-\Phi^2/4}}{\Phi/2} = \sqrt{\frac{4}{\Phi^2}-1}.$$

Vyjádřili jsme tedy hodnoty funkcí sinus, kosinus a tangens pro úhel velikosti $\frac{\pi}{5}$, což využijeme ve vztazích pro b, u, r a v (jednoduché algebraické mezikroky jsou vynechány):

$$\begin{aligned} b &= a\cdot\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{4}} \\ u &= a\cdot\Phi \\ r &= a\cdot\frac{1}{\sqrt{4-\Phi^2}} \\ v &= a\cdot\frac{\Phi}{2\sqrt{4-\Phi^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

Závěrem ještě odvoďme vzorec pro obsah S pravidelného pětiúhelníku. Pětiúhelník $ABCDE$ lze rozřezat na pět shodných trojúhelníků ASB, BSC, CSD, DSE, ESA. Stačí tedy určit obsah jednoho z nich a výsledek vynásobit pěti.

Trojúhelník ABS má obsah

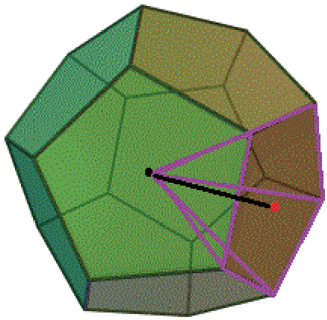
$$S_\Delta = \frac{av}{2} = a^2\frac{\Phi}{4\sqrt{4-\Phi^2}}.$$

Celkový obsah pětiúhelníku tedy je

$$S_p = a^2\cdot\frac{5\Phi}{4\sqrt{4-\Phi^2}}. \tag{4}$$

Objem pravidelného dvanáctistěnu

Jak už název napovídá, těleso má povrch tvořený z dvanácti stejných pravidelných stěn (pětiúhelníků). Uvažme nyní střed dodekahedronu a označme jej S. Celé těleso lze rozřezat na dvanáct stejných jehlanů s podstavou pravidelného pětiúhelníku a vrcholem S. Stačí tedy spočíst objem jednoho takového jehlanu (obr. 5), výsledek vynásobit dvanácti a získáme objem dodekahedronu.



Obr. 5: Pravidelný dvanáctistěn složený z jehlanů

Je známo, že objem jehlanu se počítá jako

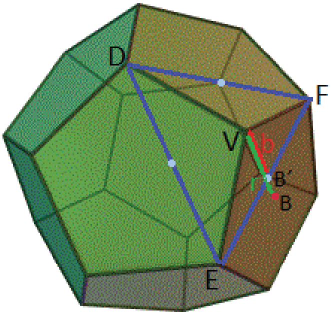
$$V_j = \frac{1}{3} S_p \cdot h,$$

kde S_p je obsah podstavy a h je výška jehlanu. Celkový objem dodekahedronu tedy bude

$$V = 12 \cdot V_j = 4 S_p \cdot h. \tag{5}$$

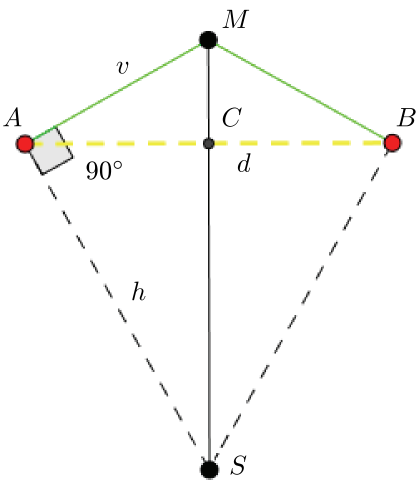
Obsah podstavy už máme spočtený (vztah (4)), zbývá tedy vyjádřit výšku h. Právě tato část výpočtu však bude docela zajímavá. Postup lze nalézt např. v [2].

Nejprve si uvědomme, že příslušný pětiboký jehlan je pravidelný, a tedy pata výšky splývá se středem podstavného pětiúhelníku. Uvažme tedy dvě vzájemně sousedící stěny a spusťme z bodu S příslušné kolmice (obr. 5). Paty těchto kolmic označme A, B. Z důvodu symetrie dodekahedronu musí být úsečky AS, BS stejně dlouhé. Dále uvažme hranu, kde se dvě stěny dotýkají, a označme její střed M. Spojme středy zmíněných dvou pětiúhelníků s bodem M, vzniknou dvě stejně dlouhé úsečky AM, BM – z hlediska minulé kapitoly se jedná o úsečky délky v, kterou jsme vypočetli ve vztahu (3).



Obr. 6: Délky úseček v pravidelném pětiúhelníku

Uvědomme si, že body S, A, M, B leží v jedné rovině, a tedy tvoří rovinný čtyřúhelník. Dále si povšimněme, že, protože SB je výškou v jehlanu, musí být kolmá na libovolnou úsečku ležící v příslušné podstavě, a tedy i na úsečku BM. Víme tedy, že $SB \perp BM$. Překresleme si nyní čtyřúhelník $SAMB$ do roviny (obr. 7)



Obr. 7: Čtyřúhelník $SAMB$

Nyní ukážeme, že jsou-li známy délky v, d, lze odtud vyjádřit hledanou délku úsečky h. Lze snadno nahlédnout, že trojúhelníky MAS, MCA jsou podobné, platí tedy $\frac{|MA|}{|AS|} = \frac{|MC|}{|CA|}$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku MCA vidíme, že

$$|MC| = \sqrt{v^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Odtud tedy je

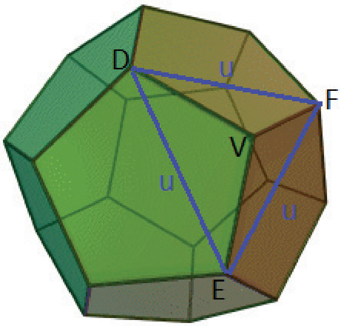
$$\frac{v}{h} = \frac{\sqrt{v^2 - d^2/4}}{d/2},$$

takže

$$h = \frac{vd}{\sqrt{4v^2 - d^2}}. \tag{6}$$

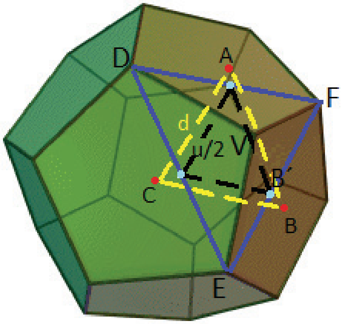
Vidíme, že postačí znát délky úseček v, d a z nich lze délku h dopočítat. Ještě je třeba určit délku úsečky AB.

Uvažme nyní libovolný vrchol V dodekahedronu. Z tohoto vrcholu vycházejí tři hrany – řekněme VD, VE, VF. Ze symetrie je zjevné, že trojúhelník DEF je rovnostranný (obr. 8). Navíc jsme v předchozí části spočetli délku strany takového trojúhelníku: jedná se o úhlopříčku u uvnitř pravidelného pětiúhelníku, takže platí vztah (3).



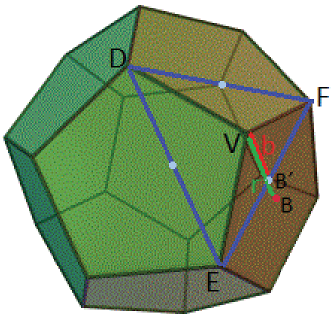
Obr. 8: Čtyřstěn $DEFV$

V tomto rovnostranném trojúhelníku DEF uvažme středy stran a z nich vycházející střední příčky. Vzniklý trojúhelník (na obr. 9 zobrazen přerušovaně) bude mít poloviční délky stran (tedy $\frac{u}{2}$). Uvažme ještě středy těch stěn dodekahedronu, které obsahují některou ze stran našeho trojúhelníku. Označme tyto středy A, B, C. Ze symetrie vidíme, že i trojúhelník ABC je rovnostranný. Jaká je délka jeho strany? Jedná se o spojnici středů stěn, tedy se jedná o délku d, o níž už jsme pojednali výše.



Obr. 9: Trojúhelník ABC

Uvážíme stejnolehlost se středem v bodě V, která zobrazí příčkový trojúhelník na trojúhelník ABC. Stačí spočíst poměr $\frac{|VB|}{|VB'|}$, kde B' je střed úsečky EF (obr. 10). V části věnované pětiúhelníku je uvedeno, že VB odpovídá úsečce r, zatímco VB' odpovídá úsečce b. Délky obou těchto úseček jsme vyjádřili ve vztahu (3), takže umíme přesně určit jejich poměr, tedy koeficient stejnolehlosti.



Obr. 10: Podobnost trojúhelníků

Vezmeme tedy stranu příčkového trojúhelníku (ta má délku $\frac{u}{2}$) a vynásobíme ji koeficientem stejnolehlosti $\frac{r}{b}$. Tím získáme délku strany trojúhelníku ABC, tedy

$$d = \frac{ru}{2b}. \tag{7}$$

Pomocí vztahů (6) a (7) dostaneme

$$d = a \cdot \frac{\Phi}{4 - \Phi^2},$$

$$h = a \cdot \frac{\Phi}{2\sqrt{4-\Phi^2} \cdot \sqrt{3-\Phi^2}}.$$

V kapitole pojednávající o charakteristické rovnici zlatého řezu jsme uvedli jeden její důsledek, totiž

$$\sqrt{3-\Phi^2} = \Phi - 1.$$

Proto výše uvedený vztah pro h zjednodušíme ještě na tvar

$$h = a \cdot \frac{\Phi}{2\sqrt{4-\Phi^2} \cdot (\Phi - 1)}.$$

Připomeňme, že geometricky je h vzdálenost středu libovolné stěny od středu dvanáctistěnu. Celý dvanáctistěn jsme rozdělili na dvanáct shodných jehlanů o výšce h a podstavě o obsahu S_p spočteném ve vztahu (4). Vypočteme objemy těchto jednotlivých jehlanů, vynásobíme dvanácti a získáme objem celého tělesa. Tato myšlenka byla formulována vzorcem (5) a my do něj nyní můžeme dosadit, neboť jsme určili h. Vychází

$$V = a^3 \cdot \frac{5\Phi^2}{2(4-\Phi^2)(\Phi-1)}.$$

Dosadíme-li konkrétní hodnotu zlatého řezu

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618,$$

dospějeme k vzorci

$$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} \cdot a^3 \doteq 7{,}66 \cdot a^3.$$

Literatura

[1] Allenby, R. B. J. T., Slomson, A.: *How to count: an introduction to combinatorics.* 2nd ed., Discrete mathematics and its applications, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[2] Mathematical Misfits – three-dimensional solution. *Internetový časopis Plus Magazine*, `https://plus.maths.org/content/puzzle-page-24`.