Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Tři snadné (?) úlohy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 1, 39–40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147166`

Tři snadné (?) úlohy

Emil Calda, MFF UK, Praha

Abstract. The article presents three (not so) easy mathematical problems. In the first problem, the task is to find such a natural number n that the product $999 \cdot n$ contains only the digits 1. The second problem and the third problem are based on the parity of natural numbers.

K vyřešení následujících tří úloh nebudete potřebovat žádné velké matematické znalosti, ale bez dobrého nápadu se neobejdete.

Příklad 1. Určete takové přirozené číslo n, aby v dekadickém zápisu součinu $999 \cdot n$ byly pouze jedničky, tj. aby platilo $999 \cdot n = 11\ldots111$.

Řešení. V tomto případě je dobrým nápadem vyjádřit součin $999 \cdot n$ jako rozdíl, takže z dané podmínky pro číslo n postupně dostaneme

$$1\,000 \cdot n - n = 11\ldots111, \quad n = 1\,000 \cdot n - 11\ldots111.$$

Uvědomíme-li si nyní, že poslední tři číslice čísla $1\,000 \cdot n$ jsou nuly, dostaneme odečtením čísla $11\ldots111$ poslední tři číslice čísla n:

$$n = 1\,000 \cdot n - 11\ldots111 = \ldots000 - \ldots111 = \ldots889$$

Tímto způsobem pokračujeme:

$$n = 1\,000 \cdot n - 11\ldots111 = \ldots889\,000 - \ldots111\,111 = \ldots777\,889$$

Opakováním tohoto postupu dojdeme k tomu, že hledané číslo n je

$$n = 111\,222\,333\,444\,555\,666\,777\,889.$$

Příklad 2. Zvolíme libovolné liché číslo n a s přirozenými čísly od 1 do $2n$ provedeme postupně následující změny. V prvním kroku z nich vyškrtneme libovolná dvě a nahradíme je absolutní hodnotou jejich rozdílu; z původních $2n$ čísel jich tak zůstane jen $2n-1$. Tento postup na ně zopakujeme, takže z $2n-1$ čísel jich zůstane $2n-2$; mezi nimi nyní může být i nula. Tímto způsobem pokračujeme, dokud nezůstane číslo jediné. Ukažte, že poslední zbylé číslo bude liché. (Zkuste si postup např. pro $n = 3$, tj. na číslech 1, 2, 3, 4, 5, 6, a přesvědčte se, že nezávisle na tom, která dvě čísla odstraňujete, zůstane vždy jedno z čísel 1, 3, 5.)

Řešení. Dobrým nápadem je v tomto případě zjistit paritu (tj. sudost nebo lichost) součtu všech původních čísel, tj. součtu

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n.$$

Vzorec pro tento součet nepotřebujeme; k určení jeho parity si stačí uvědomit, že v něm je n sudých a n lichých čísel, a protože n je číslo liché a součet lichého počtu lichých čísel je číslo liché, je celý tento součet (včetně všech čísel sudých) číslo liché.

Vyškrtneme-li nyní v součtu S libovolná dvě čísla a, b a nahradíme-li je číslem $|a - b|$, bude pro nový součet S' platit

$$S' = S - a - b + |a - b|.$$

Probereme-li obě možnosti pro čísla a, b, dostaneme:

je-li $a \geq b$, je $|a - b| = a - b$, takže $S' = S - a - b + (a - b) = S - 2b$

je-li $a < b$, je $|a - b| = -a + b$, takže $S' = S - a - b + (-a + b) = S - 2a$

Odtud je zřejmé, že parita součtu S' je stejná jako parita součtu S. Znamená to, že po každém kroku se parita jednotlivých součtů nemění, a protože u počátečního součtu byla lichá, bude lichá i u posledního součtu s jediným sčítancem, kterým je zbylé číslo.

Příklad 3. V každé místnosti v přízemí určitého domu je sudý počet dveří, které vedou buď do jiné místnosti, nebo ven z domu. Může být počet dveří vedoucích z domu liché číslo?

Řešení. Ukážeme, že počet dveří vedoucích z domu liché číslo být nemůže; v podstatě si stačí uvědomit, že každé dveře mají dvě strany. Představme si pak, že ke každé straně každých dveří postavíme osobu, která bude mít na hlavě modrý klobouk, stojí-li v místnosti, a červený, stojí-li vně domu. Je-li n celkový počet dveří, m počet osob s modrým kloboukem a $č$ počet osob s červeným kloboukem, platí $m + č = 2n$. Protože je však v každé místnosti sudý počet dveří, je počet osob s modrým kloboukem číslo sudé. Z předcházející rovnosti pak plyne, že i číslo $č$, udávající počet osob stojících vně domu, neboli počet dveří vedoucích z domu, je sudé.

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem, 1. kapitola.* Prometheus, Praha, 2006.