Pavel Tlustý; Ireneusz Krech

Různé přístupy k řešení pravděpodobnostních úloh

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 1, 15–21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147162`

Různé přístupy k řešení pravděpodobnostních úloh

Pavel Tlustý, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice
Ireneusz Krech, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Abstract. Although the probability theory is one of the disciplines of elementary mathematics, its teaching is very specific in various aspects. This area of mathematics is often considered difficult, as there is no universal method to be memorized and then used. However, the wide range of possible approaches provides a unique opportunity to encourage and develop mathematical thinking and creativity of problem solvers. The article discusses several different approaches to the solution of a given problem, including the use of stochastic graphs.

Počet pravděpodobnosti patří mezi důležité matematické disciplíny a s jeho základy se seznamují žáci středních škol ve všech vyspělých zemích světa. Pokud však analyzujeme úlohy z matematických soutěží určených této věkové kategorii, objevují se v nich příklady z počtu pravděpodobnosti jen velmi zřídka. Zpravidla jde o obtížnější úlohy, k jejichž řešení nelze použít nějaký „natrénovaný univerzální“ postup. Na druhou stranu se nám obvykle otvírá celá plejáda možných řešení, s ohledem na kreativitu řešitelů.

V belgické matematické olympiádě [3] se v roce 1981 objevila následující úloha:

Dva hráči A a B sledují chlapce, který opakovaně hází mincí. Výsledky hodů si zapisují pomocí posloupnosti písmen. Na k-tém místě této posloupnosti bude buď písmeno r (pokud padl při k-tém hodu rub), nebo písmeno l (pokud padl při k-tém hodu líc). Hráč A se domnívá, že trojice rrr se v takové posloupnosti objeví dříve než trojice rlr. Hráč B si myslí opak. Který z hráčů má větší šanci, že v tomto sporu vyhraje?

Úkolem je rozhodnout, která z trojic rrr, rlr má v nekonečné posloupnosti písmen r a l větší pravděpodobnost, že se objeví dříve. Uvědomme si, že nemusíme počítat konkrétní hodnoty pravděpodobností (s jakými se dané kombinace písmen objeví), ale stačí jen rozhodnout, která z trojic má větší šanci (jde pouze o kvalitativní porovnání). Nejprve si ukážeme autorské řešení, pak předvedeme pět dalších řešení, která se nám podařilo vymyslet.

1. řešení (autorské)

Za prvním písmenem r (písmeno r se ve zmiňované posloupnosti objeví s pravděpodobností 1) může se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{4}$ následovat jedna z možností

$$lr, \quad rr, \quad ll, \quad rl.$$

V prvním případě vyhraje hráč B, ve druhém případě vyhraje hráč A. Nastane-li třetí z případů, tak mají oba hráči stejné šance jako na začátku hry. Ve čtvrtém případě s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ následuje písmeno r a vyhraje hráč B a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ následuje písmeno l, čímž přejdeme do situace, kdy oba hráči budou mít stejné šance jako na začátku hry. Odtud dostaneme, že hráč A vyhraje s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, zatímco hráč B vyhraje s pravděpodobností

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

S pravděpodobností $\frac{3}{8}$ hra přejde do situace, kdy mají oba hráči stejně velké šance na výhru jako na začátku hry.

Závěr: Hráč B má větší šance na výhru než hráč A.

Z autorského řešení pouze vyplývá, že šance hráče B jsou větší než hráče A. Pokud bychom chtěli šance na výhru jednotlivých hráčů kvantifikovat, musíme autorské řešení doplnit například takto:

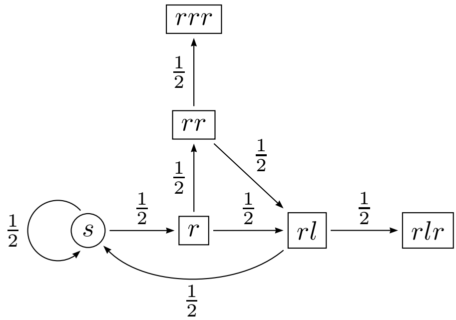
Vzhledem k tomu, že

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} \qquad \text{a} \qquad P(A) + P(B) = 1,$$

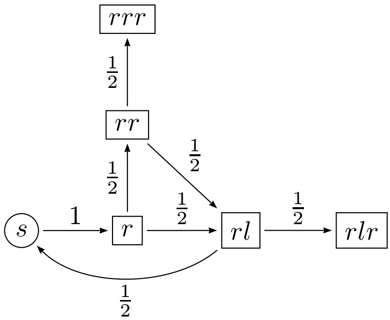
tak po jednoduché úpravě dostaneme $P(A) = \frac{2}{5}$ a $P(B) = \frac{3}{5}$.

Nyní si ukážeme pět dalších řešení, některé z nich využívají vlastností tzv. *stochastických grafů*.

Průběh hry si můžeme znázornit pohybem figurky po hracím plánu na obr. 1. Na začátku hry stojí figurka na políčku s a podle výsledků jednotlivých hodů se přesouvá po hracím plátně tak dlouho, až dorazí buď do bodu $\boxed{rrr}$, nebo do bodu $\boxed{rlr}$. Vzhledem k tomu, že písmeno r se ve zmiňované posloupnosti objeví s pravděpodobností 1, můžeme graf na obr. 1 nahradit zjednodušeným grafem na obr. 2 (se kterým budeme dále pracovat).



Obr. 1: Původní graf hry



Obr. 2: Graf hry po úpravě

2. řešení (absorpční algoritmus)

Označme $p_{a\rightsquigarrow b}$ pravděpodobnost, že figurka z bodu $\boxed{a}$ přejde do bodu $\boxed{b}$. Zajímá nás $P(A) = p_{s\rightsquigarrow rrr}$. Ze zadání je zřejmé, že $p_{rlr\rightsquigarrow rrr} = 0$ a $p_{rrr\rightsquigarrow rrr} = 1$. S využitím obr. 2 získáme soustavu rovnic (*absorpční algoritmus*)

$$\begin{aligned}
p_{s\rightsquigarrow rrr} &= p_{r\rightsquigarrow rrr},\\
p_{r\rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2}\cdot p_{rr\rightsquigarrow rrr} + \frac{1}{2}\cdot p_{rl\rightsquigarrow rrr},\\
p_{rr\rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot p_{rl\rightsquigarrow rrr},\\
p_{rl\rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2}\cdot p_{s\rightsquigarrow rrr}.
\end{aligned}$$

Po jejím vyřešení dostaneme, že

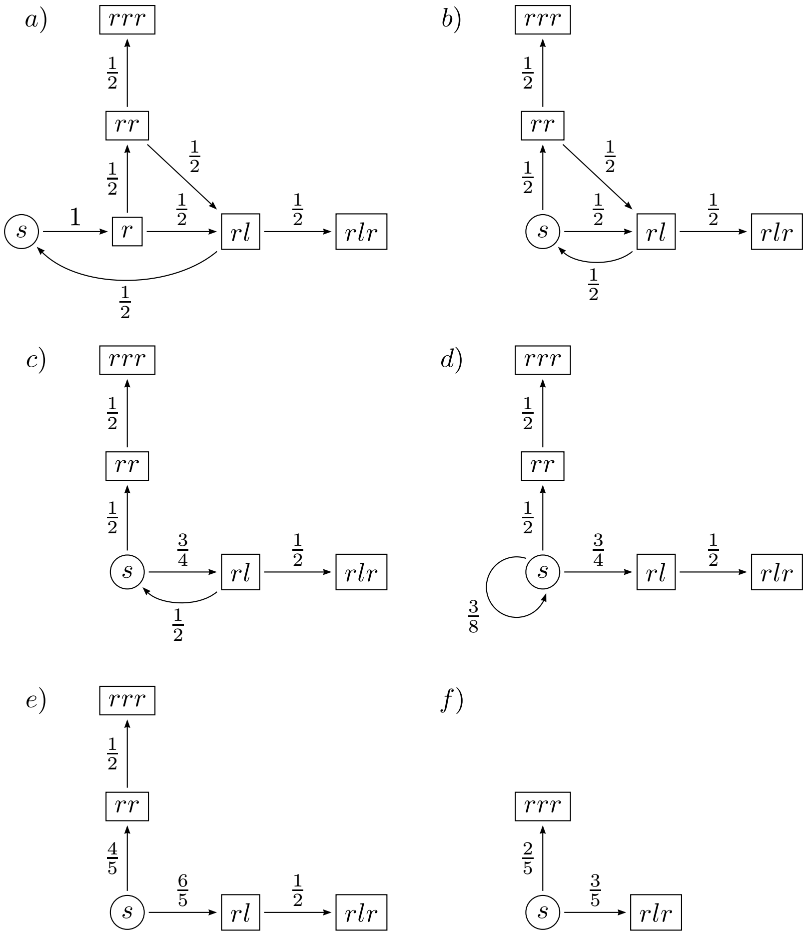
$$P(A) = p_{s\rightsquigarrow rrr} = \frac{2}{5},$$

což znamená, že

$$P(B) = p_{s\rightsquigarrow rlr} = \frac{3}{5}.$$

3. řešení (redukce stochastického grafu)

Princip této metody spočívá v tom, že se snažíme postupně eliminovat některé vrcholy (a tedy i hrany) stochastického grafu s cílem získat elementární stochastický graf. Jednotlivá pravidla redukce stochastického grafu jsou podrobně popsána např. v [1]. Je nutné si uvědomit, že v průběhu procesu redukce nemusí vždy vzniknout stochastický graf. Stochastický graf (elementární) dostaneme až na konci celého procesu redukce. V našem případě postupně dostáváme posloupnost grafů na obr. 3.



Obr. 3: Redukce stochastického grafu

Z posledního grafu na obr. 3 f) vidíme, že $P(A) = \frac{2}{5}$ a $P(B) = \frac{3}{5}$.

4. řešení (pravidlo součinu)

Podívejme se na graf na obr. 2 a označme $P(A) = x$. Do uzlu $\boxed{rrr}$ vede trasa $s \to r \to rr \to rrr$ s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, nebo trasa $s \to \to r \to rr \to rl \to s$, (dostaneme se na začátek a šance je znova x), nebo trasa $s \to r \to rl \to s$, čímž jsme opět na začátku a šance je x. Tedy ze stochastického grafu na obr. 2 a pravidla součinu dostaneme

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x.$$

Odtud plyne, že $P(A) = x = \frac{2}{5}$, tedy $P(B) = \frac{3}{5}$.

5. řešení (věta o celkové pravděpodobnosti – podmíněná verze)

Nejprve si připomeneme znění věty o celkové pravděpodobnosti (ve variantě pro podmíněné pravděpodobnosti).

Věta. *Tvoří-li jevy $C_1, C_2, \ldots, C_n$ úplný rozklad pravděpodobnostního prostoru $P(B) > 0$ a $P(B \cap C_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, pak pro libovolný jev A v tomto pravděpodobnostním prostoru platí*

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B \cap C_i) \cdot P(C_i|B).$$

Pro $k = 1, 2, 3$ označme jevy

$$R_k = \{\text{v } k\text{-tém hodu padne } r\}, \quad L_k = \{\text{v } k\text{-tém hodu padne } l\}$$

a podmíněné pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} x &= P(A|R_1 \cap R_2), \\ y &= P(A|R_1 \cap L_2), \\ z &= P(A|L_1 \cap R_2), \\ w &= P(A|L_1 \cap L_2). \end{aligned}$$

Pak pomocí uvedené věty dostaneme

$$\begin{aligned} x = P(A|R_1 \cap R_2) = P(A|R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cdot P(R_3|R_1 \cap R_2) &+ \\ + P(A|R_1 \cap R_2 \cap L_3) \cdot P(L_3|R_1 \cap R_2) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analogicky platí

$$y = P(A|R_1 \cap L_2) = P(A|R_1 \cap L_2 \cap R_3) \cdot P(R_3|R_1 \cap L_2) + \\ + P(A|R_1 \cap L_2 \cap L_3) \cdot P(L_3|R_1 \cap L_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + w \cdot \frac{1}{2},$$

$$z = P(A|L_1 \cap R_2) = P(A|L_1 \cap R_2 \cap R_3) \cdot P(R_3|L_1 \cap R_2) + \\ + P(A|L_1 \cap R_2 \cap L_3) \cdot P(L_3|L_1 \cap R_2) = x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2},$$

$$w = P(A|L_1 \cap L_2) = P(A|L_1 \cap L_2 \cap R_3) \cdot P(R_3|L_1 \cap L_2) + \\ + P(A|L_1 \cap L_2 \cap L_3) \cdot P(L_3|L_1 \cap L_2) = z \cdot \frac{1}{2} + w \cdot \frac{1}{2}.$$

Získali jsme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y, \\ y &= \frac{1}{2}w, \\ z &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ w &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w, \end{aligned}$$

jejíž řešení je

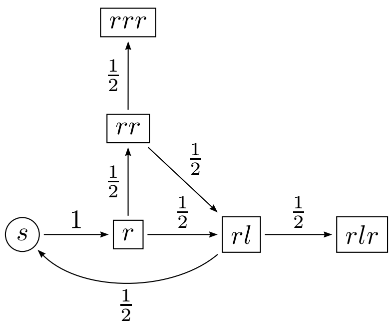
$$x = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{1}{5}, \quad z = \frac{2}{5}, \quad w = \frac{2}{5}.$$

Z věty o celkové pravděpodobnosti (obvyklá verze) dostaneme

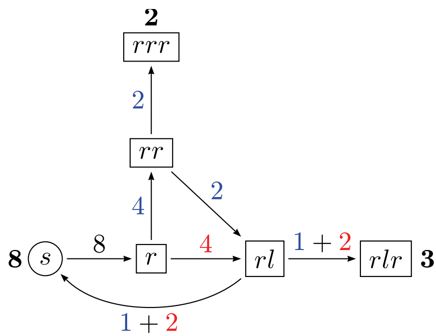
$$P(A) = P(A|R_1 \cap R_2) \cdot P(R_1 \cap R_2) + P(A|L_1 \cap R_2) \cdot P(L_1 \cap R_2) + \\ + P(A|R_1 \cap L_2) \cdot P(R_1 \cap L_2) + P(A|L_1 \cap L_2) \cdot P(L_1 \cap L_2) = \\ = x \cdot \frac{1}{4} + y \cdot \frac{1}{4} + z \cdot \frac{1}{4} + w \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

6. řešení (figurky ve stochastickém grafu)

Představme si, že na počátku hry stojí 8 figurek v bodě ⓢ a jednotlivé pravděpodobnosti interpretujeme jako poměr, ve kterém se figurky v daném bodě rozdělí k dalšímu putování ve směru šipek (obr. 4). Tedy z bodu ⓢ vyjde 8 figurek a všechny dorazí do bodu $\boxed{r}$. Polovina figurek (tj. 4) dojde do bodu $\boxed{rr}$ a polovina do bodu $\boxed{rl}$. Ze čtyř figurek v bodě $\boxed{rr}$ dorazí dvě do cíle v bodě $\boxed{rrr}$ a dvě do bodu $\boxed{rl}$. V bodě $\boxed{rl}$ je tedy celkem 6 figurek. Tři z nich dorazí do cíle v bodě $\boxed{rlr}$ a tři se vrátí do bodu ⓢ. Do cíle dorazilo celkem 5 figurek, dvě do bodu $\boxed{rrr}$ a tři do bodu $\boxed{rlr}$ (obr. 5). Odtud je zřejmé, že $P(A) = \frac{2}{5}$ a $P(B) = \frac{3}{5}$.



Obr. 4: Graf hry po úpravě



Obr. 5: Pohyb figurek po stochastickém grafu

Samozřejmě, že je možné i jednotlivé postupy vzájemně kombinovat. Můžeme například částečně zjednodušit stochastický graf na obr. 1, což pak vede na mnohem jednodušší soustavy rovnic ve třetím nebo pátém řešení.

Literatura

[1] Krech, I., Tlustý, P.: *Stochastické grafy a jejich aplikace.* Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.

[2] Płocki, A., Tlustý, P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Prometheus, Praha, 2007.

[3] Sergejev, I. N. a kol.: *Zarubežnyje matematičeskije olimpiady.* Vypusk 17, Nauka, Moskva, 1987.