Jindřich Bečvář; Vlastimil Dlab

Bohatství pýthagorejských tvrzení včetně Pýthagorovy věty pro čtyři i více bodů v prostoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 4, 283–294

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147071`

Bohatství pýthagorejských tvrzení včetně Pýthagorovy věty pro čtyři i více bodů v prostoru

Jindřich Bečvář, Praha, Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstrakt. Článek ukazuje, jak lze prezentovat Pýthagorovu větu a jak je možno s její pomocí učinit výuku elementární matematiky zajímavou a přitažlivou. Toho lze dosáhnout objasněním několika ekvivalentních formulací Pýthagorovy věty, jejím zobecněním pro libovolný trojúhelník a rozšířením na čtyřúhelník, resp. na čtyři, pět, či více bodů v prostoru.

Článek se pokouší usnadnit učitelům práci, která je často komplikována jak administrativou, tak didaktickou literaturou nejrůznější úrovně.

Velmi těžko bychom hledali někoho, kdo se ve škole nesetkal s Pýthagorovu větou[1] nebo se na ni vůbec nepamatuje: *V pravoúhlém trojúhelníku je* $a^2 + b^2 = c^2$.

Málokdo se však již ve škole dočkal krásného příběhu, jehož hlavním hrdinou je právě tato rovnost. Není úchvatné již to, že číselný vztah jednoduše vyplývá například z podobnosti trojúhelníků? A což teprve, když se dozvíme, že pýthagorejská rovnost platí pro **každý** trojúhelník, že obdobná rovnost existuje i pro čtyřúhelník a že má blízký vztah ke komplexním číslům. To jsme se na gymnáziu nedozvěděli! Mnohé z toho přitom do výuky matematiky přirozeným způsobem patří.

Začněme přesnější formulací.

Věta 1 (**Pýthagorova věta).** *Pro délky stran* $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ *trojúhelníku* ABC *s pravým úhlem při vrcholu* C *platí rovnost* $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkaz. Jednoduchý důkaz (viz obrázek 1) bezprostředně plyne z podobnosti trojúhelníků ABC, CBD a ACD, kde D je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Potom je

$$\frac{a}{c} = \frac{c_B}{a}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{c_A}{b}, \qquad \text{a tedy} \qquad a^2 + b^2 = c \cdot (c_B + c_A) = c^2. \qquad \square$$

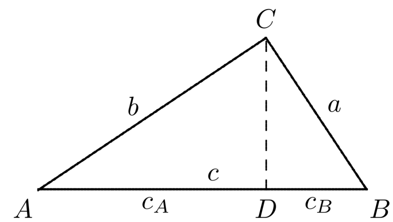
Připomeňme, že větu 1 lze snadno přeformulovat takto: *V libovolném trojúhelníku* ABC *platí rovnost* $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$ *právě tehdy, když je úhel při vrcholu* C

[1] Pýthagorova věta je snad nejznámějším matematickým tvrzením. V evropské tradici je její objev i objev jejího důkazu připisován Pýthagorovi (6. stol. př. Kr.). Znění a důkaz tohoto teorému však známe až z Eukleidových *Základů* [7], které vznikly kolem roku 300 př. Kr. Připomeňme, že Pýthagorovu větu znali již v 18. století př. Kr. v Mezopotámii; na hliněných tabulkách z té doby jsou zachyceny úlohy, které ji využívají. Rovněž staří Číňané počítali různé příklady pomocí Pýthagorovy věty před více než dvěma tisíci lety. Problém datace matematických znalostí ve staré Číně však bohužel naráží na nedostatek dochovaných matematických textů.

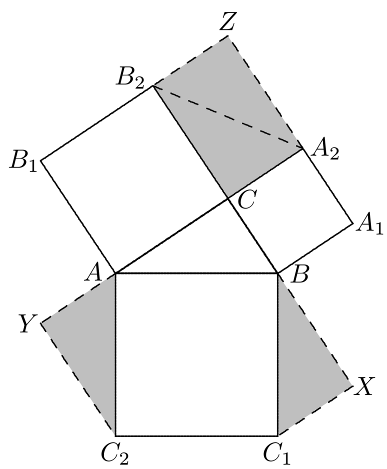
Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz, prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Bzí 47, 468 22 Železný Brod, e-mail: vdlab@math.carleton.ca

pravý. To nastane právě tehdy, když jsou trojúhelníky ACD a CBD, kde D je pata výšky z vrcholu C na přímku AB, podobné.

Celá řada důkazů Pýthagorovy věty má charakter geometrických obrázků. Uveďme tři takové ilustrace, které patří víceméně k důkazům „beze slov“. První z nich znali již ve staré Číně. Na obrázku 2 jsou trojúhelníky ABC, C_2AY, BC_1X, B_2A_2C a A_2B_2Z shodné. Proto jsou pětiúhelníky C_2C_1XCY a ABA_1ZB_1 shodné. Odtud snadno vyplývá platnost Pýthagorovy věty.



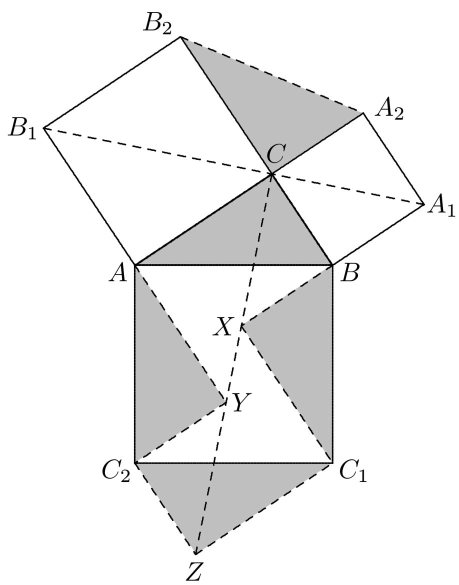
Obr. 1



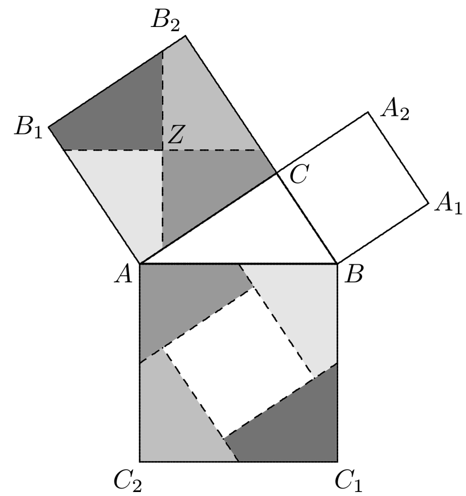
Obr. 2

Připomeňme ještě důkaz, jehož autorem je Leonardo da Vinci (viz obrázek 3). Trojúhelníky ABC, C_1C_2Z, C_1BX, AC_2Y a B_2A_2C jsou shodné. Proto jsou čtyřúhelníky CAC_2Z a B_1ABA_1 shodné (rotace o 90° kolem bodu A). Stejně tak jsou čtyřúhelníky $A_1A_2B_2B_1$ a CBC_1Z shodné (osová souměrnost podle osy A_1B_1 a rotace o 90° kolem bodu B). Obsahy šestiúhelníků AC_2ZC_1BC a $B_1ABA_1A_2B_2$ se tedy rovnají, a odtud tvrzení Pýthagorovy věty ihned vyplývá.

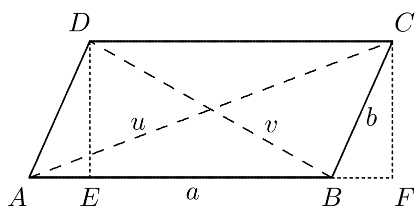
Připojme ještě neformální důkaz Pýthagorovy věty založený na dělení obrazců, který byl patrně známý již ve staré Číně (viz obrázek 4). Označme písmenem Z střed čtverce ACB_2B_1, který je co do velikosti obsahu „prostřední“, a rozdělme jej na čtyři shodné čtyřúhelníky — jedna dělící úsečka je rovnoběžná s přeponou AB, druhá je na ni kolmá. Ostatní je jasné z obrázku.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

V článku [5] je ukázáno, že z Pýthagorovy věty snadno plyne následující věta[2]:

Věta 2 (rovnoběžníková rovnost). *Nechť $ABCD$ je rovnoběžník o stranách a, b a úhlopříčkách u, v. Potom je $2a^2 + 2b^2 = u^2 + v^2$.*

Důkaz. Zřejmě je (viz obrázek 5)

$$b^2 = |BF|^2 + |CF|^2, \quad u^2 = (a + |BF|)^2 + |CF|^2, \quad v^2 = (a - |BF|)^2 + |CF|^2,$$

a tedy $u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2$. $\square$

Rovněž větu 2 můžeme formulovat jako ekvivalenci: *Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = u^2 + v^2$.*

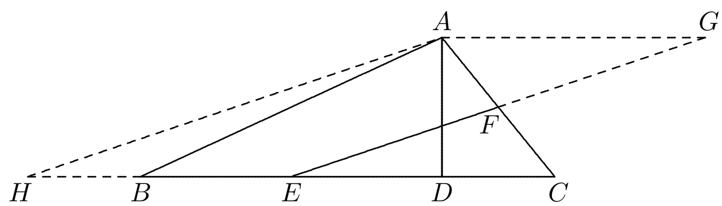
[2] Tato věta se za starých časů objevovala v učebnicích pro základní a střední školy. Dnes ji spíše najdeme ve vysokoškolských učebnicích lineární algebry či funkcionální analýzy (*parallelogram law*). Viz např. [1, s. 364], resp. [14, s. 7].

Výše zmíněný článek [5] navíc ukazuje, že z Pýthagorovy věty snadno plyne i věta Al-Kashiho, známá jako věta kosinová.[3] Z kosinové věty a stejně tak i z věty 2 triviálně vyplývá věta Pýthagorova, proto jsou tyto tři věty ekvivalentní.[4] K tvrzením, která jsou ekvivalentní s Pýthagorovou větou, patří i tzv. Apollóniova věta.

Věta 3 (Apollóniova věta). *Pro těžnici t_c z vrcholu C trojúhelníku ABC je*

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2t_c^2.$$

Dalším tvrzením, které můžeme zahrnout mezi pýthagorejská tvrzení, je následující vztah pro výšku v obecném trojúhelníku.



Obr. 6

Věta 4. *V trojúhelníku ABC označme písmenem D patu výšky spuštěné z vrcholu A na přímku BC. Nechť E je střed úsečky BD a F střed úsečky AC. Potom platí rovnost $|AD|^2 = 4|EF|^2 - |BC|^2$.*

Důkaz. Důkaz lze snadno vyčíst z obrázku 6. Zřejmě je $|HD| = |BC|$, $|EF| = |FG| =$ $= 1/2|AH|$. Nyní stačí užít Pýthagorovu větu pro trojúhelník ADH.[5] □

V pýthagorejských tvrzeních můžeme pokračovat. Uveďme ještě obrázek 7, na němž jsou dva podobné obdélníky s rovnoběžnými stranami. Podle věty 3 je

$$|AV|^2 + |CV|^2 = |BV|^2 + |DV|^2, \quad \text{a tedy} \quad |AA_1|^2 + |CC_1|^2 = |BB_1|^2 + |DD_1|^2.$$

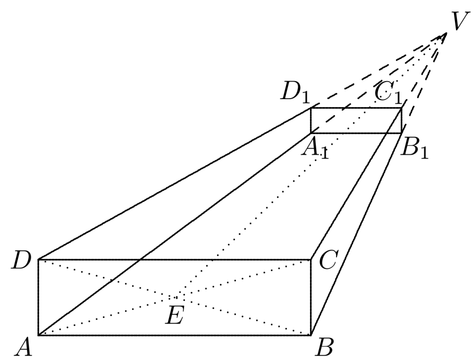
Nyní již přistoupíme k hlavnímu tématu našeho příspěvku, jehož cílem je hlubší porozumění problematice Pýthagorovy věty. Domníváme se, že přirozeným zobecněním klasické formulace je následující tvrzení týkající se libovolného trojúhelníku, které je ilustrované obrázkem 8.

Je těžko pochopitelné, že takový obrázek nelze najít v žádné učebnici, ani v žádné publikaci týkající se Pýthagorovy věty (viz např. [13]). A přitom je to právě takováto formulace, která osvětluje podstatu, tj. jádro pýthagorejských tvrzení.

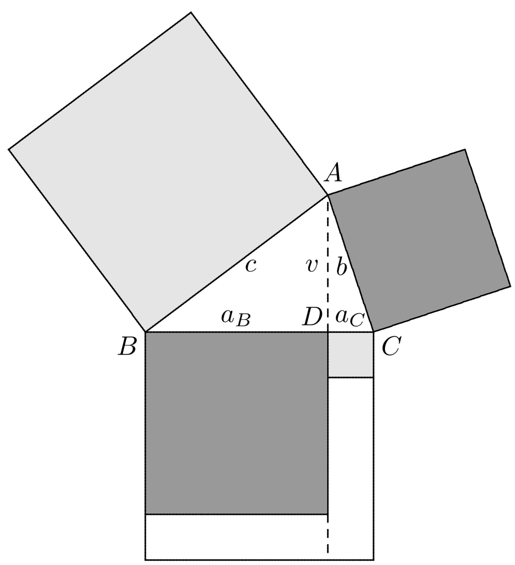
[3] Článek [5] byl publikován jako odpověď na příspěvek [8], jehož autor nepochopil, že užití věty, která obsahuje poměrně náročné pojmy (úhel a goniometrická funkce), nejen že není vhodné, ale dokonce zakrývá podstatu řešené úlohy.

[4] Některé z těchto ekvivalencí mohou překvapit, či dokonce zaskočit a zmást. Například autor příspěvku [11], který se nejprve pokusil s článkem [5] polemizovat, vzápětí přiznal svůj omyl (viz [12]). Autor článku [9] naproti tomu ekvivalenci Pýthagorovy věty a kosinové věty „odsouhlasil“, současně však prokázal neporozumění jednomu z nejdůležitějších matematických pojmů, pojmu *ekvivalence*, což následujícím příspěvkem [10] ještě potvrdil. Příspěvky [9] a [10] byly kritizovány v článku [2] a v neotištěném článku [3].

[5] Laskavý čtenář nechť si rozmyslí, jak se změní obrázek 6 (a důkaz), když je úhel ACB tupý a bod E leží na úsečce BC, resp. mimo ni.



Obr. 7



Obr. 8

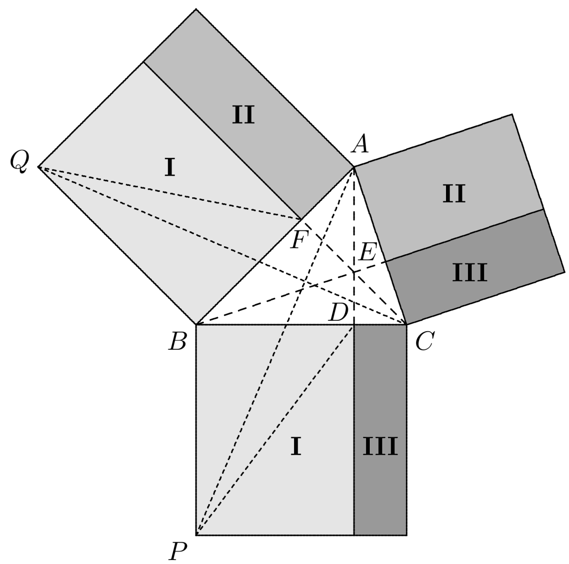
Věta 5 (**Pýthagorova věta pro libovolný trojúhelník**). *Nechť ABC je libovolný trojúhelník, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$. Jestliže je D patou výšky spuštěné z bodu A, $|BD| = a_B$, $|CD| = a_C$, potom je*

$$c^2 + a_C^2 = b^2 + a_B^2.$$

Důkaz. Podle Pýthagorovy věty pro trojúhelníky ABD a ACD na obrázku 8 je

$$c^2 = a_B^2 + v^2 = a_B^2 + b^2 - a_C^2, \quad \text{a tedy} \quad c^2 + a_C^2 = b^2 + a_B^2.$$

(Přičteme-li k oběma stranám $a_B \cdot a_C$, dostaneme rovnost $c^2 + a \cdot a_C = b^2 + a \cdot a_B$, která je názorně vidět na obrázku 8.)



Obr. 9

Pokud by byl úhel BCA tupý, změní se předchozí postup jen nepatrně:

$$c^2 = a_B^2 + v^2 = a_B^2 + b^2 - a_C^2, \quad \text{a tedy} \quad c^2 + a_C^2 = b^2 + a_B^2.$$

(Odečteme-li od obou stran $a_B \cdot a_C$, dostaneme rovnost $c^2 - a \cdot a_C = b^2 + a \cdot a_B$.) $\square$

Uvědomme si, že pokud body C a D splynou, dostaneme klasickou Pýthagorovu větu, neboť $a_C = 0$ a $a_B = a$. Věta 5 je tedy rovněž ekvivalentní s Pýthagorovou větou.

Poznamenejme, že důkaz rovnosti $c^2 + a \cdot a_C = b^2 + a \cdot a_B$ lze v případě, že úhel BCA je ostrý, snadno nahlédnout pomocí obrázku 9. Na něm mají obdélníky značené **I** stejný obsah, totéž platí pro obdélníky **II** a pro obdélníky **III**. Důkaz je založen na skutečnosti, že obsahy trojúhelníků BPD, BPA, BQC a BQF jsou stejné. Myšlenka tohoto důkazu je převzata z důkazu Pýthagorovy věty v Eukleidových *Základech* [7], viz 47. věta první knihy. Pokud je úhel BCA tupý, lze obdobným způsobem dokázat rovnost $c^2 - a \cdot a_C = b^2 + a \cdot a_B$.

Nyní přicházíme k samému jádru tohoto článku, totiž k větě o čtyřúhelníku, která zahrnuje všechny výše uvedené pýthagorejské formulace jako speciální případy. Současně nás tím opravňuje nazývat ji *Pýthagorova věta pro čtyřúhelník*. Je pouhou geometrickou interpretací následující rovnosti mezi komplexními čísly α, β, γ, δ a příslušnými čísly sdruženými:

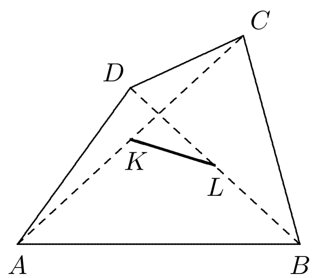
$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}) + (\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma}) + (\gamma-\delta)(\overline{\gamma}-\overline{\delta}) + (\delta-\alpha)(\overline{\delta}-\overline{\alpha}) = \\ &= (\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}) + (\beta-\delta)(\overline{\beta}-\overline{\delta}) + (\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}+\overline{\gamma}-\overline{\delta}).\end{aligned}$$

Interpretace elementární rovinné eukleidovské geometrie pomocí komplexních čísel je účinným nástrojem (viz např. [6]), který bohužel není ve středoškolské matematice dostatečně zdůrazňován a využíván. Interpretujeme-li v předchozí rovnosti komplexní čísla α, β, γ, δ jako body Argandovy–Gaussovy roviny, dostáváme ihned následující větu.

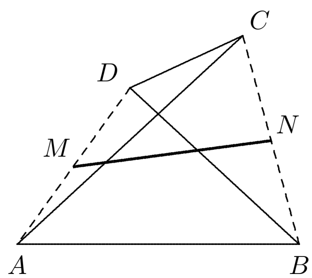
Věta 6 (**Pýthagorova věta pro obecný čtyřúhelník**). *Nechť A, B, C, D jsou čtyři (ne nutně různé) body v rovině. Nechť K je střed úsečky AC a L střed úsečky BD. Potom je*

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|KL|^2.$$

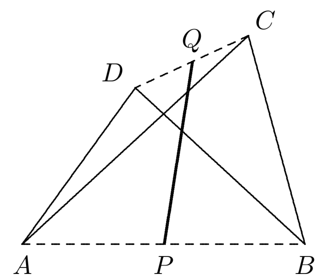
Poznamenejme, že věta 6 pokrývá tři různé situace zachycené na následujících obrázcích.



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Tvrzení věty 6 se týká obrázku 10, rovnost

$$|AB|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 + 4|MN|^2$$

odpovídá obrázku 11 a rovnost

$$|AC|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 + 4|PQ|^2$$

se týká obrázku 12. Kombinací těchto rovností dostáváme nové identity. Například sečtením posledních dvou obdržíme rovnost

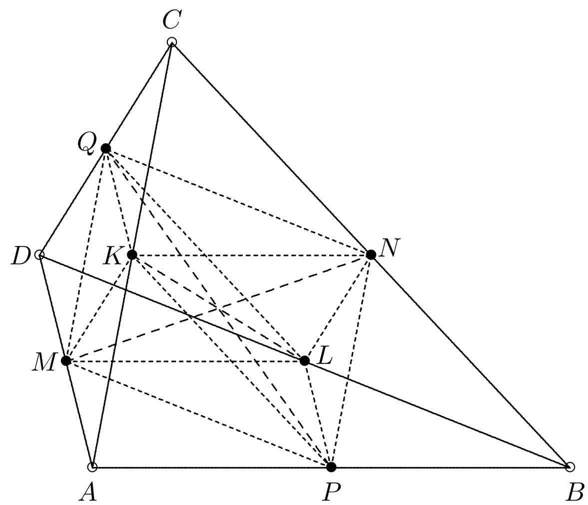
$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot \big(|MN|^2 + |PQ|^2\big).$$

To vše je znázorněno na obrázku 13, který ilustruje vzájemně jednoznačný vztah mezi čtyřúhelníky a „jehlany“ s rovnoběžníkovou podstavou.[6]

V daném čtyřúhelníku $ABCD$ tvoří středy úseček AD, BD, BC, AC a CD „jehlan“ s rovnoběžníkovou podstavou $MLNK$ a vrcholem Q. Snadno se přesvědčíme, že se jedná o vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi čtyřúhelníky na jedné straně a „jehlany“ s rovnoběžníkovou podstavou na straně druhé. Tento vztah (zachycený na obrázku 13) poskytuje transparentní návod, jak z výše uvedených rovností týkajících se obrázků 10, 11, 12 odvozovat další. Bezprostředně nahlédneme, že například podle věty 6 užité na čtyřúhelník $ABCD$ a rovnoběžník $MPNQ$

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 &= 2\big(|MN|^2 + |PQ|^2\big) + 4|KL|^2 = \\ &= 4\big(|MP|^2 + |PN|^2 + |KL|^2\big).\end{aligned}$$

[6] S jistou nadsázkou hovoříme o „jehlanu“, i když všechny jeho vrcholy leží v rovině.



Obr. 13

Obrázek 13 též naznačuje alternativní důkaz věty 6 užitím Apollóniovy věty pro trojúhelníky ABC, ACD a BDK, kdy se jen sečtou příslušné rovnosti.

Podotkněme ještě, že všechny tyto rovnosti jsou ekvivalentní s Pýthagorovou větou a že v případě, kdy je v obrázku 13 úhel ACB pravý a body D a Q splývají s bodem C (a tedy $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$), dostáváme užitím rovnosti

$$|AC|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |AD|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 + 4|PQ|^2$$

klasický vztah

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2.$$

Rovnost uvedená ve větě 6 byla ověřena pomocí komplexních čísel. Uvědomme si, že ji bylo možno dokázat dosazením vzdáleností bodů A, B, C, D, K a L vyjádřených kartézskými souřadnicemi v eukleidovské rovině. Jedná se o rovnost reálných čísel

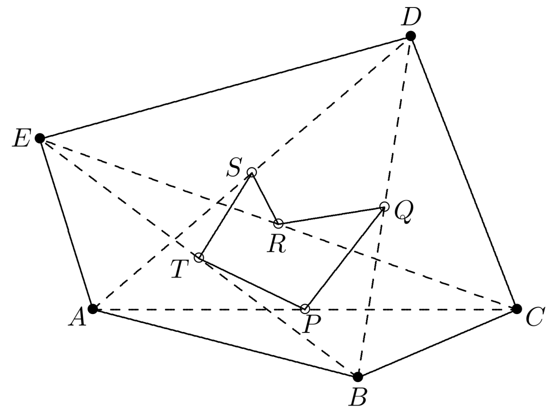
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 + (a-b+c-d)^2,$$

kterou užijeme dvakrát — pro první i druhé souřadnice uvažovaných bodů. Odtud vyplývá, že rovnost uvedená ve větě 6 platí v libovolném konečnědimenzionálním eukleidovském prostoru.

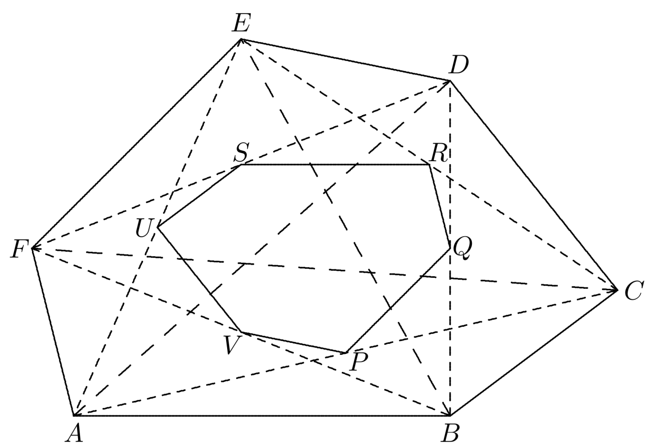
Věta 7 (Pýthagorova věta pro čtyři body v eukleidovském prostoru). *Nechť A, B, C, D jsou (ne nutně různé) body v konečnědimenzionálním eukleidovském prostoru a K, L jsou středy úseček AC a BD. Potom je*

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|KL|^2.$$

Je zjevné, že platí rovněž všechny rovnosti uvedené za větou 6. Formulace věty 7 dává ihned možnost rozšířit pýthagorejské vztahy pro libovolný počet bodů. Uvedeme příslušná tvrzení pro pět a šest bodů s příslušnými obrázky (obrázky 14 a 15).



Obr. 14



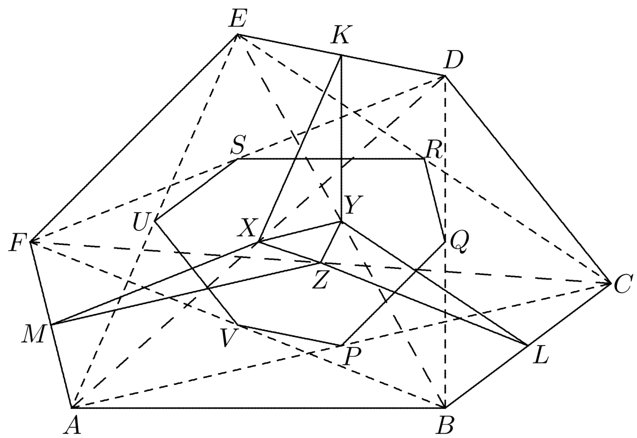
Obr. 15

Věta 8 (Pýthagorova věta pro pět bodů v eukleidovském prostoru). *Nechť A, B, C, D, E jsou (ne nutně různé) body konečnědimenzionálního eukleidovského prostoru. Nechť P, Q, R, S, T jsou po řadě středy úseček AC, BD, CE, DA, EB. Potom je*

$$3\big(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DE|^2+|EA|^2\big)=|AC|^2+|BD|^2+|CE|^2+ \\ +|DA|^2+|EB|^2+4\big(|PQ|^2+|QR|^2+|RS|^2+|ST|^2+|TP|^2\big).$$

Tuto rovnost získáme bezprostředním užitím věty 7 na „čtyřúhelníky“ $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ a $BCDE$: sečteme příslušné rovnosti vyplývající z věty 7.

Stejně jako dříve můžeme vyjádřit rovnost z věty 8 v různých variacích. Například součet čtverců délek úhlopříček, tj. součet $|AC|^2+|BD|^2+|CE|^2+|DA|^2+|EB|^2$, lze snadno nahradit čtyřnásobkem součtu $|GH|^2+|HK|^2+|KL|^2+|LM|^2+|MG|^2$, kde body G, H, K, L, M jsou středy úseček AB, BC, CD, DE, EA. Tedy trojnásobek



Obr. 16

součtu čtverců nad stranami „pětiúhelníku“ $ABCDE$ je roven čtyřnásobku součtu čtverců nad stranami „pětiúhelníků“ $PQRST$ a $GKLMN$.[7]

Formulace pýthagorejského tvrzení pro šest bodů je podobná. Jestliže v daném „šestiúhelníku“ $ABCDEF$ (viz obrázek 15) užijeme větu 7 pro „čtyřúhelníky“ $ABCD$, $ABCF$, $ABEF$, $ADEF$, $BCDE$ a $CDEF$, dostaneme ihned následující větu.

Věta 9 (Pýthagorova věta pro šest bodů v eukleidovském prostoru). *Nechť A, B, C, D, E, F jsou (ne nutně různé) body konečnědimenzionálního eukleidovského prostoru. Nechť P, Q, R, S, U, V jsou po řadě středy úseček AC, BD, CE, DF, EA, FB. Potom je*

$$\begin{aligned}3\big(|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DE|^2+|EF|^2+|FA|^2\big)+2\big(|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2\big) &=\\ = 2\big(|AC|^2+|BD|^2+|CE|^2+|DF|^2+|EA|^2+|FB|^2\big)&+\\ +4\big(|PQ|^2+|QR|^2+|RS|^2+|SU|^2+|UV|^2+|VP|^2\big)&.\end{aligned}$$

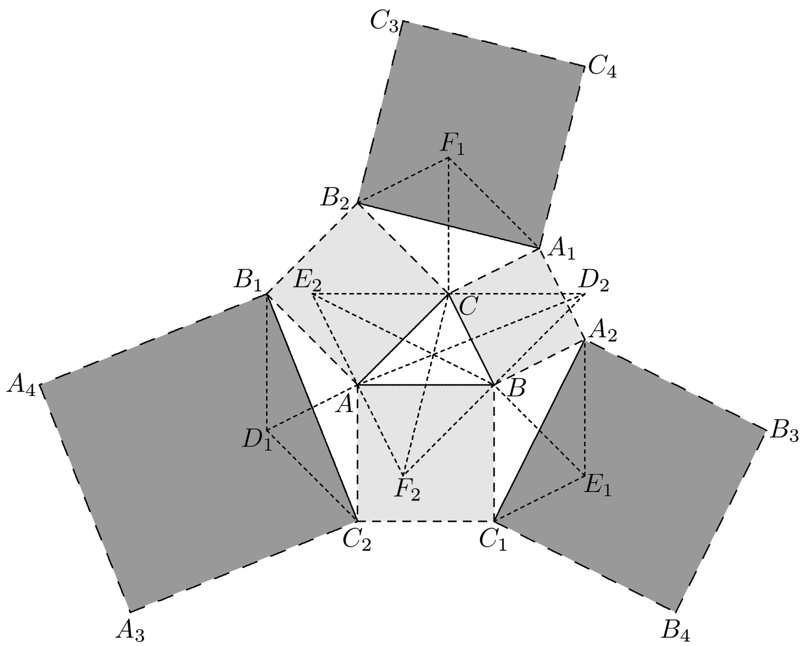
Rovnost uvedenou ve větě 9 můžeme opět nejrůznějším způsobem modifikovat. Poměrně zajímavou rovnost ukazuje obrázek 16: *Součet čtverců nad stranami „šestiúhelníku“ $ABCDEF$ je roven součtu čtverců nad stranami „šestiúhelníku“ $PQRSUV$ a trojúhelníků XYK, YZL a ZXM.* Přitom jsou body X, Y, Z, K, L, M středy úseček AD, BE, CF, DE, BC, FA.

Odvození řady dalších ekvivalentních rovností přenecháváme laskavému čtenáři, který — v případě, že se jedná o rovinný pětiúhelník či šestiúhelník — může tyto rovnosti přeložit do řeči komplexních čísel.

Závěrem si nemůžeme odpustit uvést krásný důsledek věty 2 (viz obrázek 17) poukazující jednak na význam blízkého vztahu mezi trojúhelníky a rovnoběžníky, jednak na zbytečné používání kosinové věty, které často zakrývá podstatu problému a brání plnému porozumění (viz [4] a [8]).

---

[7] Opět zde s jistou nadsázkou hovoříme o čtyřúhelnících, pětiúhelnících a šestiúhelnících, i když jejich vrcholy nemusí ležet v rovině.



Obr. 17

Věta 10. *Nechť ABC je libovolný trojúhelník a ABC_1C_2, BCA_1A_2 a CAB_1B_2 čtverce nad jeho stranami. Potom*

$$|A_1B_2|^2 + |B_1C_2|^2 + |C_1A_2|^2 = 3(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

Důkaz. Protože je (viz obrázek 17)

$$\angle A_1CB_2 + \angle ACB = \angle B_1AC_2 + \angle BAC = \angle C_1BA_2 + \angle CBA = 180^\circ,$$

jsou rovnoběžníky AF_2BC a $CA_1F_1B_2$ shodné. Shodné jsou i rovnoběžníky BD_2CA a $AB_1D_1C_2$ a rovněž rovnoběžníky CE_2AB a $BC_1E_1A_2$. Podle věty 2 je

$$\begin{aligned}
|BC|^2 + |B_1C_2|^2 &= 2\big(|AB|^2 + |AC|^2\big),\\
|AC|^2 + |C_1A_2|^2 &= 2\big(|AB|^2 + |BC|^2\big),\\
|AB|^2 + |A_1B_2|^2 &= 2\big(|AC|^2 + |BC|^2\big).
\end{aligned}$$

Sečtením dostáváme výsledek. Všimněme si, že trojúhelníky A_1B_2C, B_1C_2A a C_1A_2B mají stejný obsah jako trojúhelník ABC. □

L i t e r a t u r a

[1] Bečvář, J.: *Lineární algebra*. Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] Bečvář, J.: *Několik poznámek o ekvivalenci matematických vět*. Učitel matematiky *19* (2011), 165–171.

[3] Bečvář, J.: *Eristické ekvivalence F. Kuřiny* [online], [cit. 19. 10. 2017]. Dostupné z: `http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?ClanekID=200`

[4] Dlab, V.: *Důkladné porozumění elementární matematice*. Učitel matematiky *17* (2009), 169–182.

[5] Dlab, V.: *Důkladné porozumění pojmu ekvivalence*. Učitel matematiky *19* (2010), 9–13.

[6] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. Serifa, Praha, 2016.

[7] Eukleidovy Základy (Elementa). Přeložil František Servít. Jednota českých mathematiků, Praha, 1907.

[8] Kuřina, F.: *Chvála „biflování“*. Učitel matematiky 18 (2009), 49–52.

[9] Kuřina, F.: *O vyjadřování v matematice*. Učitel matematiky *19* (2011), 95–98.

[10] Kuřina, F.: *Ekvivalence (č. j.) nebo ekvivalence (č. mn.)?* Učitel matematiky *20* (2011), 30–32.

[11] Leischner, P.: *Silvestrovské rozjímání o ekvivalenci geometrických vět*. Učitel matematiky *19* (2011), 89–94.

[12] Leischner, P.: *Omluva*. Učitel matematiky *19* (2011), 163–164.

[13] Maor, E.: *The Pythagorean theorem*. Princeton University Press, Princeton, 2007.

[14] Saxe, K.: *Beginning functional analysis*. Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 2002.