

Jan Šlégr; Filip Studnička

Problém ohnuté kolejnice a kouzlo numerické matematiky

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 62 (2017), No. 4, 275–282

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/147070>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Problém ohnuté kolejnice a kouzlo numerické matematiky

*Jan Šlégr, Filip Studnička, Hradec Králové*

Kolik numerických matematiků je potřeba k výměně žárovky?  
3,9987 (po prvních třech iteracích).

*Abstrakt.* S rozmachem systémů pro symbolickou matematiku, kde je derivování, řešení diferenciálních rovnic či obyčejné vyjádření proměnné z komplikované rovnice otázkou jednoho kliknutí, se poněkud vytrácí důraz na efektivní řešení nejen fyzikálních problémů. Na jedné straně je dobře, že se s pomocí jazyků pro symbolickou manipulaci (jako je např. webový nástroj Wolfram Alpha nebo symbolická sada v programu MATLAB) může řešitel soustředit na fyzikální podstatu problému, na druhou stranu je jistá obratnost při řešení těchto problémů velmi žádoucí. Předložený článek popisuje několik motivačních úloh, které mohou být použity ve výuce numerické matematiky nebo jako doplněk v základních kurzech fyziky na vysoké škole.

## 1. Úvod

V průmyslové praxi se často setkáváme s návrhy řešení, která velmi dobře fungují na stolním počítači, ovšem v okamžiku, kdy je zapotřebí přenést je do průmyslového mikropočítače, autor s hrůzou zjišťuje, že program buď nefunguje vůbec, protože došlo k přetečení paměti, nebo funguje nepoužitelně pomalu. První setkání s realitou, například přechod z funkčního řešení v MATLABu k použitelnému programu pro mikropočítač, který je o poznání skupější, co se týče systémových prostředků (stovky kilobajtů paměti RAM, násobně nižší frekvence procesoru), může být pro začátečníka šokující.

Právě z těchto důvodů bývá součástí vysokoškolských kurzů nejen pro budoucí inženýry, ale i pro fyziky a učitele přírodovědných předmětů kurz zaměřený na numerickou matematiku. Jeho struktura bývá standardní, pokrývající různé interpolační a integrační metody, metody řešení soustav rovnic, transcendentní rovnice a podobně. Tento rozsah přibližně odpovídá tomu, co se v 60. letech vyučovalo na odborných středních školách [10].

Do kurzů numerické matematiky pro výše uvedené skupiny studentů by proto bylo záhodno zahrnout úlohy, které jsou jasně svázány s fyzikální realitou a k jejichž řešení stačí jednoduchý program v jakémkoliv běžném programovacím jazyce, který nevyžaduje externí knihovny matematických funkcí. Několik takových úloh uvádíme v tomto článku.

---

RNDr. JAN ŠLÉGR, Ph.D., Mgr. et Mgr. FILIP STUDNIČKA, Ph.D., Katedra fyziky PřF UHK, Rokitanského 62, 50003 Hradec Králové, e-mail: [jan.slegr@uhk.cz](mailto:jan.slegr@uhk.cz), [filip.studnicka@uhk.cz](mailto:filip.studnicka@uhk.cz)

## 2. Řešení pohybové rovnice

Přestože v pokročilých kurzech numerické matematiky jsou studenti seznamováni s metodami numerického řešení diferenciálních rovnic, jako jsou např. Rungovy–Kuttovy metody, pro základní seznámení postačuje i jednoduchá Eulerova metoda, která má svůj původ ve fyzikální realitě. Vhodnou ilustrací může být řešení klasické pohybové rovnice  $ma = F$ , která popisuje pohyb tělesa při působení síly  $F$ . Jestliže  $r(t)$  značí polohu tělesa v čase  $t$ , pak jeho okamžitá rychlost a zrychlení jsou definovány vztahy

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$
$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}.$$

Ty lze nahradit přibližnými rovnicemi

$$a \cong \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$
$$v \cong \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t},$$

kde  $\Delta t$  je malé kladné číslo. Známe-li působící sílu  $F$  (která může být funkcí polohy, času a rychlosti), počáteční polohu  $r_0$  a rychlost  $v_0$  v čase  $t_0$ , můžeme z pohybové rovnice určit přibližné hodnoty  $a_1$ ,  $v_1$  a  $r_1$  v čase  $t = t_0 + \Delta t$ , hodnoty  $a_2$ ,  $v_2$  a  $r_2$  v čase  $t = t_0 + 2\Delta t$  atd. Tímto způsobem získáme přibližné řešení ve formě tabulky hodnot v ekvidistantních časech, které mohou být použity k vykreslení grafů závislosti zrychlení, rychlosti a polohy na čase.

Tato metoda je vhodná v případech, kdy je analytické řešení obtížné. Např. na webu [8] je uvedeno řešení pohybové rovnice při pohybu v prostředí, které klade odpor, a v článku [9] je popsáno řešení úlohy, která nemá analytické řešení — návratu kosmické lodi do zemské atmosféry (poloha je závislá na rychlosti, rychlost na zrychlení a zrychlení na síle, přičemž odporová síla závisí na hustotě atmosféry, která je funkcí polohy).

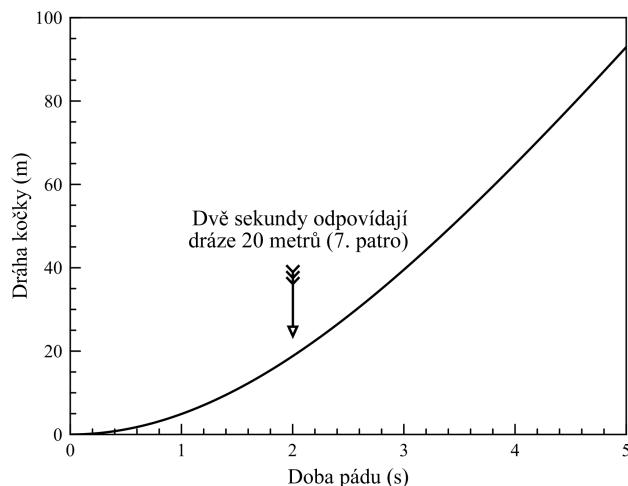
V tomto článku se zaměříme na úlohu, která má značný motivační potenciál — na popis pádu kočky v prostředí, které klade odpor. Podle záznamů newyorských veterinárních lékařů je při pádu z výškové budovy pro kočku kritické sedmé patro [11], [3]. Při pádu z menší, ale i z větší výšky, než odpovídá sedmému patru, je pravděpodobnost úmrtí kočky podstatně menší než při pádu právě ze sedmého patra.

Pohybovou rovnicí padající kočky zapíšeme ve tvaru

$$ma = mg - \frac{1}{2}C\rho S v^2,$$

neboť Reynoldsovo číslo padající kočky je větší než 1 000. Tato hodnota Reynoldsova čísla značí, že proudění vzduchu okolo kočky bude turbulentní a odporová síla je v takovém případě úměrná druhé mocnině rychlosti. Získáme diferenciální rovnici

$$\ddot{x}(t) = g - k\dot{x}(t)^2,$$



Obr. 1. Závislost dráhy padající kočky na čase

kde  $x(t)$  je poloha kočky v čase  $t$  a  $k = \frac{C\rho S}{2m}$ . Zde  $C$  je součinitel odporu vzduchu,  $\rho = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  hustota vzduchu,  $S$  čelní plocha (průmět kolmý na směr vektoru rychlosti) a  $m$  hmotnost kočky, kterou podle [5] odhadneme na  $m = 4,5 \text{ kg}$ . Tím se dostaneme k vyjádření

$$k \approx \left( \frac{1,23}{2 \cdot 4,5} \text{m}^{-3} \right) CS. \quad (1)$$

Když kočka dosáhne mezní rychlosti  $v_{\max}$ , její okamžitá rychlost se dále nezvyšuje a její zrychlení je nulové. Podle [13] je mezní rychlost koček  $v_{\max} \approx 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pak

$$0 = g - kv_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{g}{v_{\max}^2} \approx 0,01 \text{ m}^{-1}. \quad (2)$$

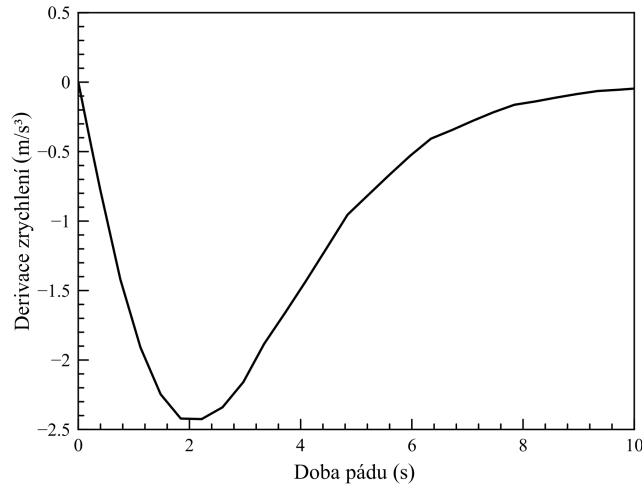
Porovnáním rovnic (1) a (2) dostaneme

$$CS \approx 0,07 \text{ m}^2.$$

Pokud budeme kočku modelovat jako desku kolmou ke směru rychlosti pohybující se ve směru rychlosti, jejíž součinitel odporu  $C = 1,3$ , získáme pro čelní plochu kočky hodnotu  $S \approx 0,05 \text{ m}^2$ . To odpovídá kruhu o průměru přibližně 24 cm, což je uvěřitelná hodnota.

Podobná úloha (např. pro parašutistu) bývá součástí kurzů teoretické mechaniky a bývá řešena analyticky, přičemž v jejím řešení se dříve nebo později objeví hyperbolické funkce. Výše uvedeným numerickým řešením získáme tabulku hodnot pro zrychlení, rychlost a polohu kočky. Závislost polohy kočky na čase s vyznačenou polohou sedmého patra je na obr. 1 (při výšce jednoho patra 2,8 metru odpovídá sedmé patro přibližně dvaceti metrům).

Závislosti rychlosti a zrychlení na čase jsou zcela standardní — zrychlení kočky se zmenšuje z hodnoty  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  na nulu a kočka dosáhne mezní rychlosti.



Obr. 2. Závislost derivace zrychlení padající kočky na čase

Vypočtené údaje neobsahují žádný náznak, proč by mělo být sedmé patro kritické. Je ovšem známo, že z hlediska fyziologie zvířata i lidé kromě zrychlení velmi výrazně vnímají i jeho změnu (rychlost lidé vnímají převážně vizuálně, zrychlení a jeho změny způsobují změny tlaku ve vestibulárním aparátu) [4], [2]. Proto byly získané hodnoty zrychlení zderivovány.

Numerickou derivaci hodnot v tabulce lze vypočítat poměrně snadno, např. pomocí centrální diference:

$$\dot{a}(t) = \frac{a(t + \Delta t) - a(t - \Delta t)}{2\Delta t}.$$

Výsledná závislost derivace zrychlení na čase je na obr. 2. Z grafu je zřejmé, že k největší změně zrychlení dochází v čase  $t = 2$  s. To vede autory k závěru, že sedmé patro je pro kočku kritické z toho důvodu, že přibližně v druhé sekundě pádu kočka cítí největší změnu zrychlení, což ji vyděsí a není připravena na dopad. Teoretické řešení bylo následně ověřováno experimentem popsáním v [6].

### 3. Maximální rychlost osobního automobilu

Pro okamžitý výkon osobního automobilu platí  $P = Fv$ , kde  $F$  je tahová síla motoru a  $v$  okamžitá rychlost. Maximálního výkonu  $P_{\max}$  dosáhne automobil při maximální rychlosti  $v_{\max}$  a maximální tahové síle  $F_{\max}$ . Pokud chceme odhadnout maximální rychlost, které může automobil dosáhnout, musíme tahovou sílu  $F_{\max}$  položit do rovnosti se silami odporu — aerodynamickou odporovou silou podle Newtonova vzorce a valivým odporem. Dostaneme rovnici

$$\frac{P_{\max}}{v_{\max}} = \frac{1}{2}C\rho S v_{\max}^2 + \frac{\xi}{r}F_n,$$

Vozidlo	$\frac{C}{l}$	$\frac{S}{m^2}$	$\frac{m}{kg}$	$\frac{r}{m}$	$\frac{P_{max}}{kW}$	$\frac{v_{max} \text{ vypočtená}}{km \cdot h^{-1}}$	$\frac{v_{max} \text{ výrobce}}{km \cdot h^{-1}}$
Škoda Fabia 1,4 MPi	0,32	2,00	1 180	0,195	59	169	164
VW Golf IV 1,9 TDi	0,31	2,03	1 380	0,216	66	176	180
Subaru Impreza 1993	0,36	1,94	1 220	0,213	161	230	216
Hummer H3	0,51	3,06	2 100	0,271	180	184	183
Mazda 3 MPS	0,32	2,35	1 431	0,261	193	241	250*
BMW 335i Coupe	0,30	2,11	1 535	0,238	225	268	250*
Tesla Model S P85	0,24	2,34	2 150	0,284	308	284	215*
Bugatti Veyron	0,39	1,91	1 888	0,354	883	408	407

Tab. 1. Parametry automobilů pro výpočet maximální rychlosti

kde  $C$  je součinitel odporu,  $\rho$  hustota vzduchu,  $S$  čelní plocha automobilu,  $\xi = 0,0016$  m rameno valivého odporu gumové pneumatiky na asfaltu,  $r$  poloměr kola a  $F_n$  tlaková síla na podložku, která je pro vodorovnou silnici rovna tíze automobilu:  $F_n = mg$ , kde  $m$  je hmotnost automobilu a  $g$  tíhové zrychlení. (Tíha automobilu se rozkládá na čtyři kola; proti pohybu každého z nich působí valivý odpor  $\frac{\xi}{r} \frac{m}{4} g$ , celkem tedy  $\frac{\xi}{r} mg$ .)

Označíme

$$f(v_{max}) = \frac{1}{2} C \rho S v_{max}^2 + \frac{\xi m g}{r} - \frac{P_{max}}{v_{max}}$$

a rovnici  $f(v_{max}) = 0$  vyřešíme numericky. Použijeme Newtonovu metodu tečen pro rovnice typu  $F(x) = 0$ , kde zvolíme počáteční odhad  $x_0$  a další iterace počítáme ze vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

který odpovídá tomu, že graf funkce  $F$  aproximujeme tečnou v bodě  $x_n$ . V našem případě dostáváme

$$v_{max,n+1} = v_{max,n} - \frac{f(v_{max,n})}{f'(v_{max,n})}.$$

Derivaci vypočteme snadno:

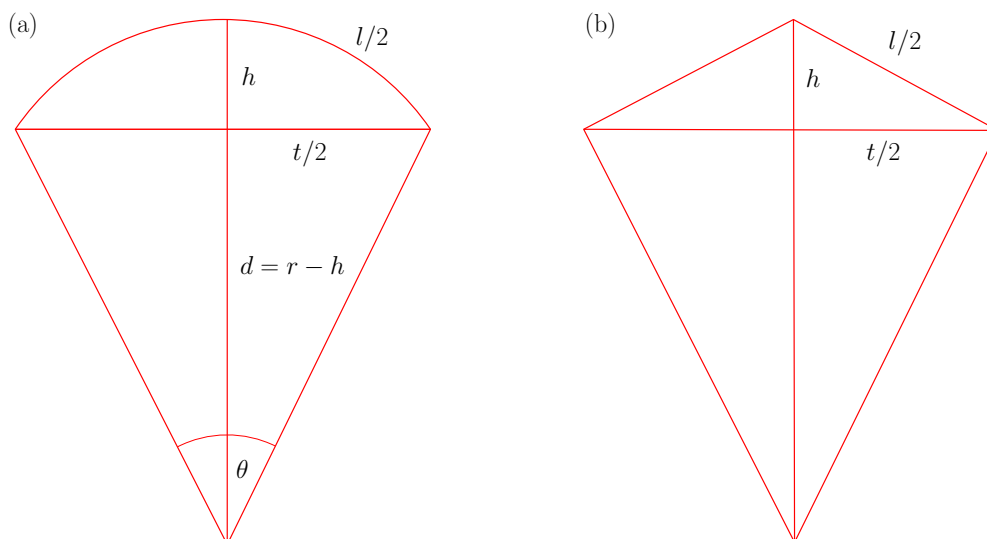
$$f'(v_{max}) = \frac{df}{dv_{max}}(v_{max}) = C \rho S v_{max} + \frac{P_{max}}{v_{max}^2}.$$

Tento jednoduchý postup dává uvěřitelné výsledky i pro tak odlišná auta, jako je Bugatti Veyron ( $C = 0,39$ , čelní plocha  $S = 1,91 \text{ m}^2$ ) a Hummer H3 ( $C = 0,51$ ,  $S = 3,06 \text{ m}^2$ ).

Výpočet je pro studenty zajímavý zejména u sportovních automobilů, které mají elektronický omezovač rychlosti na  $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Několik výsledků je uvedeno v tab. 1, hvězdičkou jsou označeny maximální rychlosti vozů s elektronickým omezovačem. Zdrojové kódy jednoduchého programu v jazyce Pascal jsou na webu autora [8].

#### 4. Problém ohnuté kolejnice

Následující úloha se v různých obměnách objevuje v zábavných přílohách amerických novin a našla si cestu i do učebnice numerické matematiky. Obvykle bývá zadána



Obr. 3. K problému ohnuté kolejnice: (a) geometrie problému; (b) zjednodušený předpoklad

takto: Přímá kolejnice o délce jedné míle je pevně ukotvena na obou koncích. Během horkého letního dne způsobí teplotní roztažnost, že se tato kolejnice prodlouží o jednu stopu z původní hodnoty 5 280 na 5 281 stop. Za předpokladu, že se kolejnice nemůže vybořit do stran, o kolik se posune nejvyšší bod kolejnice nad trať?

Situace je znázorněna na obr. 3a. Někdy jsou ještě uvedeny možnosti: a) jeden palec, b) jednu stopu, c) padesát stop. Je zajímavé, že úloha je fyzikálně správně. Koeficient teplotní délkové roztažnosti oceli je asi  $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , takže dané prodloužení odpovídá nárůstu teploty asi o  $15^\circ\text{C}$ , což je pro horký letní den naprosto uvěřitelná hodnota. Dodejme ještě, že v dnešní době se koleje pevně fixují k pražcům a toto spojení by mělo být stabilní v rozmezí teplot od  $-20^\circ\text{C}$  do  $+50^\circ\text{C}$  teploty kolejnice.

Popsaná úloha je uvedena v úvodu výborné učebnice numerických metod Formana S. Actona [1], kde je čtenář vyzván k tomu, aby si ji zkusil vyřešit dříve, než si její řešení přečte ve druhé kapitole, která je věnována řešení transcendentních rovnic.

Horní odhad maximální výšky kolejnice nad tratí můžeme získat tak, že místo oblouku kružnice budeme uvažovat „zlom“ podle obr. 3b. V takovém případě k výpočtu výšky stačí Pythagorova věta:

$$h_{\max} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2} = 51,38 \text{ stop.}$$

Dodejme, že jedna míle má v metrických jednotkách délku přibližně 1,6 km a náš výsledek odpovídá šestnácti metrům výšky. Tento výsledek je pro mnoho čtenářů nedělní přílohy velmi překvapivý, protože se vzpírá intuici a „zdravému selskému rozumu“.

Nás však v tomto případě bude zajímat přesný výsledek, který by měl být o něco menší než předchozí odhad. Profesor Acton nabádá čtenáře, aby se pokusili najít řešení s přesností alespoň na tři platné cifry, což by mělo být podle Actona možné pouze s tužkou, papírem a logaritmickým pravítkem.

Vrátíme se k obr. 3a. Pro výšku jistě platí

$$h = r - d = r - r \cos \frac{\theta}{2} = r \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (3)$$

Zadané veličiny splňují

$$\frac{t}{2} = r \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

$$l = r\theta. \quad (5)$$

Vydělením rovnice (4) rovnicí (5) obdržíme

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta} = \frac{t}{2l}.$$

Rovnici

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta} - \frac{t}{2l} = 0$$

vyřešíme Newtonovou metodou jednoduchým programem podobně jako v kapitole 2. Pro počáteční hodnotu  $\theta_0 = 0,25$  rad postačuje pět iterací, abychom dostali pět platných cifer a máme  $\theta_5 = 0,067\,415\,52\dots$ . Vyjádřením  $r$  z (4) nebo (5) a dosazením do (3) obdržíme  $h \cong 44,499$  stop.

Pro popsanou úlohu lze odvodit i přibližné algebraické řešení. Pokusíme se vyjádřit proměnné  $r$  a  $\theta$  z rovnic (5) a (4) a dosadíme je do rovnice (3). Sinus na pravé straně rovnice (4) rozvineme v řadu a využijeme jen první dva členy (úhel  $\theta$  bude podstatně menší než jedna, takže pátou a všechny vyšší mocniny můžeme s klidným svědomím zanedbat):

$$t = 2r \sin \frac{\theta}{2} \cong 2r \left( \frac{\theta}{2} - \frac{(\frac{\theta}{2})^3}{3!} \right).$$

Za  $\theta$  dosadíme z rovnice (5) a dostaneme

$$t \cong r \left( \frac{l}{r} - \frac{l^3}{24r^3} \right),$$

odkud po úpravách plyne

$$r \cong \sqrt{\frac{l^3}{24(l-t)}}. \quad (6)$$

Člen  $(l-t)$  můžeme buď vynechat, protože  $(l-t) = 1$  stopa, nebo můžeme pro obecnost označit např.  $(l-t) = \Delta l$ . V prvním případě s využitím rovnice (5) dostaneme

$$\theta = \frac{l}{r} \cong \sqrt{\frac{24}{l}}. \quad (7)$$

Rovnici (3) upravíme s využitím přibližného vztahu  $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2}$ :

$$h = r \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cong r \frac{\theta^2}{8}.$$



Dosažením za  $r$  a  $\theta$  z rovnic (6) a (7) obdržíme finální tvar

$$h \cong \sqrt{\frac{l^3}{24} \frac{24}{8l}} = \frac{1}{4} \sqrt{6l} = 44,501 \text{ stop,}$$

což je pěkná shoda. Tento tvar (navíc s členem  $\Delta l$  pod odmocninou) se nachází i v encyklopedickém hesle [12], kde je však výsledkem podstatně složitějších úvah.

## 5. Závěr

Článek si kládl za cíl ukázat jednoduché modelové úlohy, které mohou být použity ve výuce numerických metod. Tyto úlohy jsou řešitelné pomocí běžných programovacích jazyků nebo specializovanějších programů pro matematické výpočty.

Další náměty je možné najít např. v [7], kde jsou sice úlohy řešeny v prostředí Coach 5, které mělo nahradit program FAMULUS, nicméně uvedené algoritmy lze použít i v jiných programovacích jazycích.

**Poděkování.** Příspěvek vznikl za podpory specifického výzkumu PřF UHK 2104/2017.

## L i t e r a t u r a

- [1] ACTON, F. S.: *Numerical methods that work*. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.
- [2] ANGELAKI, D. R.: *Two-dimensional coding of linear acceleration and the angular velocity sensitivity of the otolith system*. *Biol. Cybernet.* 67 (1992), 511–521.
- [3] DIAMOND, J.: *How cats survive falls from New York skyscrapers*. *Nat. Hist.* 98 (1989), 20–26.
- [4] GRANT, P., HAYCOCK, B.: *Effect of jerk and acceleration on the perception of motion strength*. *J. Aircraft* 45 (2008), 1190–1197.
- [5] MATTERN, M. Y., MCLENNAN, D. A.: *Phylogeny and speciation of felids*. *Cladistics* 16 (2000), 232–253.
- [6] STUDNIČKA, F., ŠLÉGR, J., ŠTEGNER, D.: *Free fall of a cat — freshman physics exercise*. *Eur. J. Phys.* 37 (2016) [online], DOI: 10.1088/0143-0807/37/4/045002.
- [7] ŠEDIVÝ, P.: *Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami* [online]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/modelov.pdf>
- [8] ŠLÉGR, J.: *Numerické řešení úloh z dynamiky* [online]. Dostupné z: <http://black-hole.cz/ditech07/>
- [9] ŠLÉGR, J., KRAUS, I.: *Return trajectory of the SpaceShipTwo spacecraft—numerical solution*. *Phys. Educ.* 47 (2012), 309–312.
- [10] VLACH, M., KYNCL, Z.: *Numerické výpočty*. SPN, Praha, 1966.
- [11] VNUK D., et al.: *Feline high-rise syndrome: 119 cases*. *J. Feline Med. Surg.* 6 (2004), 305–312.
- [12] WEISSTEIN, E. W.: *Railroad track problem* [online]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/RailroadTrackProblem.html>
- [13] WHITNEY, W. O., MEHLHAFF, C. J.: *High-rise syndrome in cats*. *J. Amer. Vet. Med. Assoc.* 191 (1987), 1399–1403.