Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaroslav Zhouf

Stejné mocniny v různých číselných soustavách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 4, 28–29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147010`

Stejné mocniny v různých číselných soustavách

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

Abstract. The article presents analogical expressions for the same powers in the numeral systems of different bases. The factorization formula for $z^{z+1}-1$ and $z^{z+1}+1$ is also derived.

V desítkové číselné soustavě má číslo $10^{10} = 10\,000\,000\,000$ ve svém ciferném zápisu za číslicí 1 dalších 10 nul. Můžeme to zapsat ve tvaru

$$10^{10} = 1\underbrace{0\ldots0}_{10\text{krát}}.$$

Číslo $z = 10$ je základ číselné soustavy. Po tomto označení můžeme psát

$$z^z = 1\underbrace{0\ldots0}_{z\text{-krát}}. \qquad (1)$$

Jak bude tato mocnina vypadat v jiných číselných soustavách?

V soustavě o základu $z = 2$ jsou postupně čísla 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, … Označme $10 = 2$, $11 = 3$, $100 = 4$, … [1, s. 37]. Potom můžeme psát

$$z^z = 2^2 = 4 = 1\underbrace{00}_{2\text{krát}}.$$

V soustavě o základu $z = 3$ jsou postupně čísla 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222, 1 000, 1 001, … Označme $10 = 3$, $11 = 4$, …, $100 = 9$, …, $1\,000 = 27$, … Potom můžeme psát

$$z^z = 3^3 = 27 = 1\underbrace{000}_{3\text{krát}}.$$

Vidíme, že v každé číselné soustavě o základu z platí vzorec (1).

Dokažme ještě vzorec

$$z^z + z^{z-1} + \cdots + z + 1 = \frac{z^{z+1}-1}{z-1},$$

kterému se říká vzorec pro součet prvních $z+1$ členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a zde s kvocientem rovným základu číselné soustavy z [2, s. 52–53]. Též se mu říká rozklad výrazu $z^{z+1}-1$ na součin, což je rovnost

$$z^{z+1}-1=(z-1)(z^z+z^{z-1}+\cdots+z+1). \tag{2}$$

V desítkové soustavě platí

$$\begin{aligned}10^{10}+10^9+\cdots+10+1&=11\,111\,111\,111=\\&=\frac{99\,999\,999\,999}{9}=\frac{99\,999\,999\,999+1-1}{9}=\frac{10^{11}-1}{10-1},\end{aligned}$$

což je onen dokazovaný vzorec.

A např. v soustavě o základu $z=3$ platí

$$\begin{aligned}3^3+3^2+3+1&=1\,000+100+10+1=1\,111=\\&=\frac{2\,222}{2}=\frac{2\,222+1-1}{2}=\frac{3^4-1}{3-1},\end{aligned}$$

což je opět onen dokazovaný vzorec.

Ještě se zmíníme o podobném vzorci ke vzorci (2), ale pro výraz $z^{z+1}+$ $+1$. Příslušná rovnost má tvar

$$z^{z+1}+1=(z+1)(z^z-z^{z-1}+\cdots-z+1),$$

neboli

$$z^z-z^{z-1}+\cdots-z+1=\frac{z^{z+1}+1}{z+1},$$

v němž se ve druhé závorce pravidelně střídají znaménka plus a mínus. Vzorec tedy platí jen v případě, kdy je číslo $z+1$ liché, neboli z je sudé.

Ověřme tento poslední vzorec pro několik konkrétních čísel z. Ve dvojkové a čtyřkové soustavě je z sudé, takže skutečně platí

$$2^3+1=(2+1)(2^2-2+1),$$
$$4^5+1=(4+1)(4^4-4^3+4^2-4+1).$$

Literatura

[1] Mikulčák, J.: *Přehled učiva matematiky základní školy.* SPN, Praha, 1993.

[2] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.