Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 3, 57–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146893

Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2017* na adresu redakce.

Úloha 65 V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^4 + y^4 &= 7 \end{aligned}$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 66 *Rozjíždění automobilu*

Automobil se rozjížděl z klidu působením stálé síly po vodorovné silnici tak, že na konci rozjezdové dráhy byla jeho rychlost v. Vypočtěte

a) průměrnou rychlost v_{p1} automobilu ve druhé polovině doby tohoto pohybu,

b) průměrnou rychlost v_{p2} automobilu ve druhé polovině dráhy tohoto pohybu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $v = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 4/2016

Úloha 59 Pro nezáporné celé n definujeme $f(n)$ jako číslo, jehož binární zápis vznikne tak, že nejprve zapíšeme binárně číslo n, a poté v něm nahradíme cifry 0 ciframi 1 a opačně (případně vzniklé cifry 0 na začátku ignorujeme). Například $n = 23$ má binární zápis 10111, takže binární zápis $f(n)$ je 1000, neboli $f(23) = 8$. Určete

$$\sum_{j=1}^{n} f^j(j),$$

kde $f^n(k)$ značí n-násobnou aplikaci funkce f na číslo k.

(*Martin Panák*)

Řešení: Ukážeme, že $f^n(n) = 0$ pro libovolné kladné n.

Označme pro libovolné n jako $k(n)$ nejmenší přirozené číslo, pro které je $f^{k(n)} = 0$. Ukážeme indukcí pomocné tvrzení, totiž že $k(n)$ je liché číslo pro lichá n a sudé číslo pro n sudá. V obou případech pak je $k(n) \leq n$.

Snadno ověříme, že $k(1) = 1$ a $k(2) = 2$. Nyní nechť $n > 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $m < n$. Všimněme si, že $f(n)$ je liché pro sudá n a naopak (předpis pro $f(n)$ mění poslední bit čísla n). Dále evidentně $f(n) < n$, tudíž

$$f^n(n) = f^{n-1}\left(f(n)\right),$$

a tedy $k(n) = k\left(f(n)\right) + 1$, a pro n lichá je $f(n)$ sudé, tedy podle indukčního předpokladu je $k(f(n))$ sudé, tedy $k(f(n)) + 1$ je liché. Analogicky pro sudá n. Pomocné tvrzení je tedy dokázáno.

Nyní si stačí povšimnout, že $f^l(0) = 0$ pro l sudá a $n - k(n)$ je sudé. Tudíž

$$f^n(n) = f^{n-k(n)}(f^{k(n)}(n)) = f^{n-k(n)}(0) = 0.$$

Každý člen uvažovaného součtu je tedy nulový, tedy i celá suma.

Úloha 60 *Ledová kra*

Ledová kra má tvar desky všude stejné tloušťky. Kra plave na vodní hladině jezera, její tloušťka je $h = 0{,}3$ m, plošný obsah jedné vodorovné stěny je 5 m^2. Hustota vody je $\varrho_1 = 1\,000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, hustota ledu je $\varrho_2 = 920\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

a) Určete, v jaké vzdálenosti x_1 od vodní hladiny je horní plocha kry.
b) Na kru položíme těleso o hmotnosti $M_1 = 50$ kg tak, aby kra zůstala ve vodorovné poloze. Jak se v tomto případě změní vzdálenost horní plochy kry od vodní hladiny?
c) Určete maximální hmotnost M_2 tělesa, které by kra ještě unesla.

(*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

a) Je-li x_1 vzdálenost horní plochy kry od hladiny, pak ponořená část kry má výšku $h - x_1$. Objem ponořené části kry pak je $V_1 = S(h - x_1)$. Na kru bude ve vodě působit vztlaková síla

$$F_{\mathrm{vz1}} = V_1 \varrho_1 g = S(h - x_1)\varrho_1 g.$$

Kra má objem $V = Sh$ a působí na ni tíhová síla $F_{\mathrm{G1}} = V \varrho_2 g = Sh\varrho_2 g$.

Protože $F_{\mathrm{vz1}} = F_{\mathrm{G1}}$, platí $S(h - x_1)\varrho_1 g = Sh\varrho_2 g$, z čehož

$$x_1 = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) h = 0{,}024\ \mathrm{m} = 2{,}4\ \mathrm{cm}.$$

b) Označme x_2 hledanou vzdálenost, $F_{\mathrm{G2}} = M_1 g$ tíhovou sílu tělesa, $F_{\mathrm{vz2}} = S(h - x_2)\varrho_1 g$ vztlakovou sílu působící na kru. Potom platí

$$F_{\mathrm{vz2}} = F_{\mathrm{G1}} + F_{\mathrm{G2}}.$$

Po dosazení

$$S(h - x_2)\varrho_1 g = Sh\varrho_2 g + M_1 g,$$

z čehož

$$x_2 = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) h - \frac{M_1}{S\varrho_1} = x_1 - \frac{M_1}{S\varrho_1} = 0{,}014\ \mathrm{m} = 1{,}4\ \mathrm{cm}.$$

c) Obdobně jako v části b) platí

$$F_{\mathrm{vz3}} = F_{\mathrm{G1}} + F_{\mathrm{G3}},$$

kde $F_{\mathrm{G3}} = M_2 g$, $x_2 = 0$. Po dosazení

$$Sh\varrho_1 g = Sh\varrho_2 g + M_2 g,$$

z čehož

$$M_2 = Sh(\varrho_1 - \varrho_2) = 120\ \mathrm{kg}.$$

Stav soutěže po 60 soutěžních úlohách

Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 45,5 b., Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 b., Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 b., Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 b., Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 b., Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 b., Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 b., Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 b., Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 b., Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 b., Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 b., Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 b., Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 b., Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 b., Marian Poljak (GJŠ, Přerov) – 15 b., Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 b., Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 b., Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 b., Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 b., Matouš Bílek (GJŠ, Přerov) – 10 b., Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 b., Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 b., Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 b., Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 b., Libor Drozek (G, Holešov) – 9 b., Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 b., Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 b., Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 b., Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 b., Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 b., Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 b., Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 b., Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 b., Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 b., Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 b., Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 b., Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 b., Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 b., Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 b., Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 b., Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 b., Martina Chamrová (G Oty Pavla, Radotín, Praha 5) – 4,5 b., Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 b., Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 b., Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 b., Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b., Václav Skála (G, Klatovy) – 1 b., Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 b., Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b.