Emil Calda

Úloha o šachovnici

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 3, 21–22

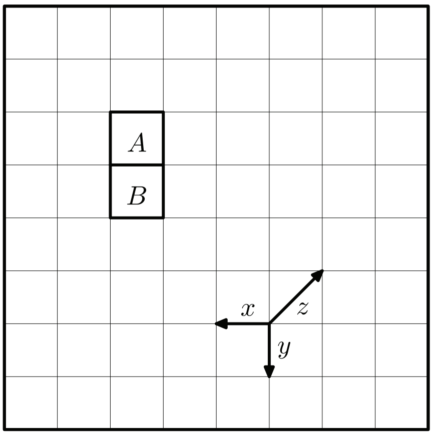
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146887

Úloha o šachovnici

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with a problem of $n \times n$ chessboard which leads to the integer solution of the equation $3x + 2 = n^2$.

Na šachovnici 8×8 jsou zvolena políčka A, B tak, že A leží nad B ve stejném sloupci a mají společnou jednu stranu. Máme za úkol zjistit, zda je možné z políčka A přejít na políčko B tak, že každým ze zbývajících políček projdeme právě jednou a jdeme přitom vždy jen doleva, nebo dolů, nebo šikmo vpravo nahoru.



Předpokládejme, že je možné tímto způsobem z políčka A na políčko B přejít, a zaveďme tato označení:

x – počet přemístění o jedno políčko doleva

y – počet přemístění o jedno políčko dolů

z – počet přemístění o jedno políčko šikmo vpravo nahoru

Snadno usoudíme, že platí:

$x = z$, neboť políčka A, B leží ve stejném sloupci

$z = y - 1$, neboť políčko B leží o řádek níže pod políčkem A

$63 = x + y + z$, neboť počet přemístění je o jednu menší než celkový počet políček

Vyjádříme-li z prvních dvou rovnic neznámé y a z pomocí x, dostaneme dosazením do třetí rovnice rovnici

$$63 = x + (x + 1) + x,$$

neboli

$$3x = 62,$$

které žádné přirozené číslo x nevyhovuje. Znamená to, že na šachovnici 8×8 není možné za daných podmínek přejít z políčka A na políčko B.

Po úspěšném vyřešení tohoto „problému" vás možná napadne zjistit, zda nějaká šachovnice, na které by byl tento přechod možný, vůbec existuje. Uvažujme proto šachovnici $n \times n$ se stejnou polohou políček A, B, stejným způsobem přemisťování a stejným významem neznámých x, y, z. Podobně jako v předešlém případě dojdeme k rovnici

$$n^2 - 1 = x + (x + 1) + x,$$

neboli

$$3x + 2 = n^2.$$

Hledat zkusmo, zda pro nějaké přirozené číslo n existuje přirozené číslo x tak, že tato rovnice je splněna, by bylo velmi pracné; navíc bychom neměli jistotu, že jsme našli všechna řešení. Zvolíme proto jiný postup. Vyjdeme z toho, že každé přirozené číslo dává při dělení třemi zbytek nula, jedna nebo dvě. Číslo n můžeme tedy vyjádřit ve tvaru $n = 3k$, nebo $n = 3k+1$, nebo $n = 3k+2$, kde k je celé číslo. Pro druhou mocninu čísla n tak dostaneme:

je-li $n = 3k$, je $n^2 = 3(3k^2) + 0$
je-li $n = 3k + 1$, je $n^2 = (3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
je-li $n = 3k + 2$, je $n^2 = (3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

Vidíme odtud, že druhá mocnina každého přirozeného čísla dává při dělení třemi vždycky zbytek rovný nule, nebo jedné. Nemůže tedy nastat, že by druhá mocnina nějakého přirozeného čísla dala při dělení třemi zbytek rovný dvěma. Z toho plyne, že přirozená čísla n a x taková, že $n^2 = 3x+2$, nalézt nejde, takže žádná šachovnice $n \times n$, na které by bylo možné uvedeným způsobem přejít z políčka A na políčko B, neexistuje.

Literatura

[1] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia.* Prometheus, Praha, 2004.