František Jáchim

Hraní s kuličkami – úkol pro velké fyziky (Vzpomínka na Christiana Huygense)

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 3, 11–20

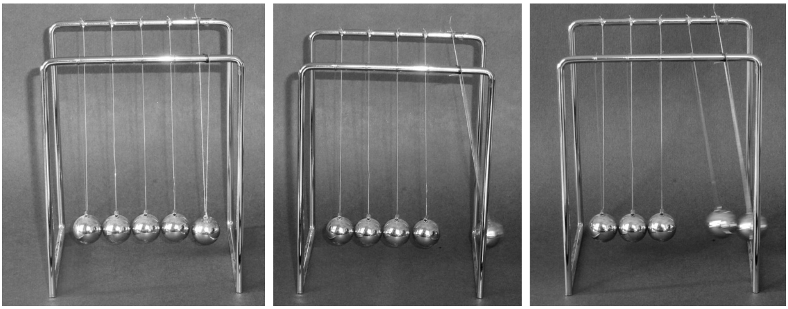
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146886

Hraní s kuličkami – úkol pro velké fyziky (Vzpomínka na Christiana Huygense)

František Jáchim, ZŠ Dukelská, Strakonice

Abstract. The article summarizes the development of solutions of the problem of the impact of elastic bodies. It focuses on the approach of a Dutch mathematician, physicist and astronomer Christian Huygens, referring to his work On the Impact of Bodies, published in 1954. The approaches of René Descartes and a Czech physicist Jan Mark Marci are also mentioned. Finally, the problem is briefly analysed on secondary school level.

Na obr. 1 je docela zajímavá věcička. Je především dekorativní, ale v rámci odpočinku si s ní můžeme na pracovním stole i pohrát. Pokud vychýlíme jednu kouli a necháme ji dopadnout na ostatní, odrazí se na konci řady opět jedna koule a děj se dost dlouho opakuje. Pokud ťuknutí provedeme dvěma vychýlenými koulemi, odrazí se také dvě. Někomu je to divné, těm, kteří se trochu vyznají ve fyzice, nikoli. Jde o jev, který se nazývá ráz těles.



Obr. 1

Jeho zkoumání zaujalo v 17. století Galilea Galilei, René Descarta, našeho Jana Marka Marciho, Christiana Huygense a nakonec i celou londýnskou Royal Society. Podívejme se, co je na takovém obyčejném cvrnkání kuliček tak zajímavého.

Především připomeňme, že kuličky na obr. 1 jsou tvrdé, nějak tak jako kuličky v ložisku. Jejich poskakování se nazývá ráz pružných těles. Kdybychom je nahradili např. kuličkami z plastelíny, jejich pohyb by velmi rychle zanikl – proběhl by ráz nepružných těles. Dále se budeme věnovat výhradně středovému rázu dokonale pružných těles, tedy takových, která se při rázu ani v nejmenším nedeformují.

René Descartes

Francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650) shrnul pravidla o rázu těles do sedmi vět, které nalezneme v jeho spise *Principy filosofie* z roku 1644. Jeho řešení rázu, které je pouze kvalitativní, se opírá o axiom „zachování množství pohybu“, což můžeme vnímat velmi blízko zákonu zachování hybnosti. Ne všechna Descartova tvrzení ale odpovídají skutečnosti. Např. ve druhém pravidle píše: „Kdyby jedno z těles bylo trochu větší než druhé a obě by se pohybovala stejnou rychlostí proti sobě, menší těleso by se odrazilo a obě by se pak pohybovala ve směru původního pohybu většího tělesa touž rychlostí.“ Znamenalo by to, že lehčí těleso nijak neovlivní pohyb těžšího tělesa. Bylo-li by těžší těleso v klidu, lehčí těleso by při rázu nikdy jeho pohyb nevyvolalo. Je zřejmé, že toto odporuje jednoduchému experimentu.

V rozporu s druhým pravidlem je v dalším jeho pravidlo páté: „Kdyby jedno z těles bylo v klidu a bylo menší než druhé, mohlo by se větší těleso pohybovat k němu sebepomaleji a vždy by ho uvedlo do pohybu tak, že by mu předalo tolik ze svého pohybu, aby se po srážce obě tělesa pohybovala touž rychlostí.“[1] Na tento vnitřní rozpor upozornil právě holandský matematik, fyzik a astronom Christian Huygens (1629–1695). Roku 1652 tehdy třiadvacetiletý Huygens vyslovil pochybnosti o správnosti některých Descartových pravidel o rázu, přičemž bezvýhradně uznával pravidlo první: „Kdyby se dvě úplně stejná tělesa pohybovala proti sobě stejnými rychlostmi, po srážce by se od sebe odrazila a neztratila by nic ze své rychlosti.“ Toto pravidlo bylo Huygensovi východiskem pro další zkoumání problému rázu a řadu situací se snažil na ně převést. Jak, uvedeme dále.

Jan Marek Marci

Český fyzik Jan Marek Marci (1595–1667) na ráz nahlížel také pouze kvalitativně. Jím formulovaná pravidla v díle *O úměrnosti pohybu* (*De proportione motus*, Praha, 1639) jsou přehledně uvedena např. v [1]:

1. Narazí-li koule na stejnou, odrazí ji a zastaví se.

[1] Velikostí tělesa (např. menší, stejná, větší koule) je vždy myšlena hmotnost tělesa (koule menší, stejné, větší hmotnosti).

2. Narazí-li větší koule na menší nehybnou, odrazí ji a pokračuje v pohybu.
3. Narazí-li menší koule na větší nehybnou, přičemž její impuls převáží poměr hmotností, odrazí ji a sama se odrazí, nebo zůstane v klidu.
4. Narazí-li menší koule na větší nehybnou, přičemž poměr hmotností převáží její impuls, zůstane větší koule v klidu a menší se odrazí.
5. Narazí-li na sebe v pohybu dvě stejně těžké koule, obě se odrazí.
6. Narazí-li větší koule v pohybu na menší, přičemž impuls menší koule převáží poměr hmotností, obě se odrazí.
7. Narazí-li větší koule v pohybu na menší, přičemž poměr hmotností převáží impuls menší koule, odrazí se a pohybuje se dále.
8. Narazí-li větší koule v pohybu na menší, přičemž impuls menší koule vyrovnává poměr hmotností, menší se odrazí a větší zůstane stát.

Markova tvrzení jsou správná až na podtržené části u vět 3 a 4 – žádná z koulí nemůže po srážce zůstat v klidu.

Huygensův přístup

V roce 1652 vyslovil Huygens své první pochybnosti o Descartových pravidlech. Jelikož si Descarta velmi vážil a považoval ho za autoritu, váhal, zda se mu má o svých pochybnostech zmínit. „Zpočátku jsem o Descartových pravidlech pochyboval vida, že nesouhlasí se všemi pokusy... Mám teď určitá pravidla a nic mi nebylo tak příjemné než zjistit, že souhlasí dokonale s pokusy. Ukázal jsem, že jakkoli veliké nehybné těleso je uvedeno do pohybu nárazem jakkoli malého tělesa," psal svému příteli de Slusovi.

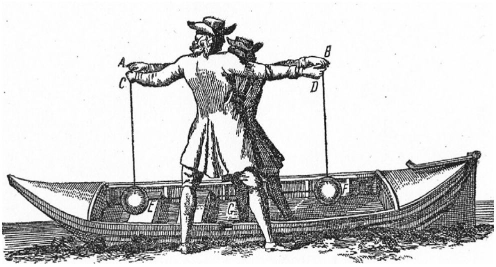
Christian Huygens formuloval svoji teorii rázu pomocí následujících vět, které uvedl v traktátu *O rázu těles* (*Traité sur le choc des corps*), vydaném v roce 1654:

1. Jestliže s klidným tělesem se srazí stejné těleso (tj. $m_1 = m_2$), narážející těleso se zastaví a klidné těleso je uvedeno do pohybu s rychlostí dopadajícího tělesa.
2. Jestliže se dvě stejná tělesa pohybují proti sobě různými rychlostmi, při rázu si rychlosti vymění.
3. Jakkoli velké těleso je uvedeno v pohyb jakýmkoli malým tělesem při libovolné rychlosti malého tělesa.

4. Jestliže se dvě tělesa střetávají, jejich relativní rychlost vzdalování po rázu je táž jako relativní rychlost přibližování před rázem.
5. Jestliže se dvě tělesa srazí, obrátí se pro nový úder s těmi rychlostmi, které měla po prvním rázu, po druhém rázu každé z nich se odrazí s rychlostí, kterou mělo před prvním rázem.
6. Srazí-li se dvě tělesa, ne vždy se zachovává množství pohybu před rázem, ale může být větší nebo menší.
7. Jestliže větší těleso naráží do klidného menšího, udělí mu vždy menší rychlost než dvojnásobek vlastní.
8. Jestliže se srážejí dvě tělesa pohybující se proti sobě rychlostmi nepřímo úměrnými jejich hmotnostem, každé těleso se odrazí takovou rychlostí, jakou mělo při rázu.
9. Jsou dvě nestejná tělesa srážející se středovým rázem, z nichž se pohybují obě nebo jedno, a to kterékoli, a jsou dány rychlosti těles před rázem, nebo jednoho, je-li druhé v klidu. Najděte rychlosti obou těles po rázu.
10. Rychlost, kterou větší těleso uděluje menšímu tělesu nacházejícímu se v klidu, má se k rychlosti, kterou menší těleso pohybující se stejnou rychlostí uděluje nepohyblivému většímu, jako velikost většího tělesa k velikosti menšího tělesa.
11. Součet součinů hmotností těles a čtverců jejich rychlosti zůstává nezměněn před rázem i po něm.
12. Jestliže se jedno těleso A pohybuje směrem k druhému tělesu B, menšímu či většímu, které se nachází v klidu, předá mu velkou rychlost, jestliže při nepřímém úderu je mezi oběma tělesy vloženo další těleso C střední velikosti, nacházející se v klidu. Největší rychlost těleso předá, je-li velikost tělesa C aritmetickým průměrem mezi tělesy A a B.
13. Klidné těleso dostane od pohybujícího se tělesa tím více pohybu, čím více je vložených těles mezi dvěma danými.

Huygens vycházel z prvního axiomu Descartova, tj. ze zkušenosti, že při rázu dvou dokonale pružných těles o stejné hmotnosti ($m_1 = m_2$) pohybujících se proti sobě stejně velkými rychlostmi ($v_1 = v_2$) se tělesa odrazí a pohybují se zpět opět stejně velkými rychlostmi ($u_1 = -v_1$, $u_2 = -v_2$).

Pokud budou rychlosti před rázem různě velké, např. $v_1 > v_2$, pro převedení na výchozí axiom uvažoval pokus prováděný na pohybující se loďce podél břehu (obr. 2) se dvěma pozorovateli – jedním na loďce a druhým na břehu. Jev posuzoval z hlediska dvou souřadných soustav, jejichž vzájemný pohyb byl přímočarý rovnoměrný.



Obr. 2

Pokud je $v_1 > v_2$ vzhledem k palubě loďky, zvolíme rychlost loďky $w = -(v_1 + v_2)/2$ a pozorovatel na břehu bude pak vnímat rychlosti těles před rázem jako stejně velké (označme je V_1 a V_2). Pro tyto rychlosti platí

$$V_1 = v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_2}{2},$$
$$V_2 = v_2 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_2 - v_1}{2},$$

tudíž $V_1 = -V_2$. Vůči pozorovateli na břehu jsou rychlosti těles před rázem opačné a stejně velké. Rychlosti po rázu (U_1, U_2) jsou pro stejného pozorovatele rovny

$$U_1 = \frac{v_2 - v_1}{2}, \qquad U_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Přitom pro pozorovatele na loďce jsou rychlosti po rázu (u_1, u_2) rovny

$$u_1 = U_1 - w = \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} = v_2,$$
$$u_2 = U_2 - w = \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} = v_1.$$

Tělesa si tedy vyměnila rychlosti.

Roku 1666 se problém rázu těles dostal až před londýnskou Royal Society. Ta vypsala na řešení problému konkurs, který byl nakonec obeslán matematikem Johnem Wallisem (1616–1703), architektem Christopherem Wrenem (1632–1723) a Christianem Huygensem. Wallis přednesl své sdělení 26. listopadu 1668, přičemž správně objasnil pouze ráz nepružných těles, Wren předstoupil před akademiky 17. prosince téhož roku, Huygensovo pojednání bylo předloženo na počátku 1669, nebylo však v Anglii publikováno. Jeho úplná redakce byla provedena ve Francii až v roce 1695 a vyšlo v posmrtném vydání roku 1703 pod názvem *De motu corporum ex percussione* (*O pohybu těles vlivem rázu*). Mimo konkurs pracoval na teorii rázu Francouz Edme Mariotte (1620–1684) a roku 1678 výsledky otiskl pod názvem *Pojednání o rázu čili střetnutí těles*, v němž uvádí řadu experimentů potvrzujících mj. všechny závěry Huygensovy.

Několik životopisných poznámek

Christian Huygens se narodil v Haagu. Oba jeho rodiče byli velmi vzdělaní a rodina přicházela do styku s mnoha významnými lidmi. Na odpolední posezení k nim chodil např. filozof Spinoza, mladý Rembrandt van Rhijn, jehož malířský talent prý rozpoznal právě Christianův otec, a mnoho dalších vzdělaných lidí. Kolem toho pobíhaly Huygensovy děti – tři kluci a dvě děvčata. Jak se zdá, zejména chlapcům ledacos ze slyšeného utkvělo bezděčně v paměti. Zdrojem poučení pro všechny hosty byla rozsáhlá domácí knihovna. Obsahovala mj. díla antických učenců Apollónia, Archimeda, Ptolemaiův *Almagest*, *Úvod do nové astronomie* napsaný Tychonem Brahe, nabízely se spisy Descartovy, Komenského, Spinozy. O pravidelném styku s předními učenci Evropy svědčí otcova bohatá korespondence, která čítala na 8 500 dopisů.

Christian si nejvíce rozuměl se starším Constantijnem, s nímž rozvíjel svoji manuální zručnost při výrobě rozličných zařízení. Významnou dovednost a trpělivost chlapci získali zejména při výrobě a broušení čoček.

Také intelektuální stránka Christianovy osobnosti se rozvíjela téměř překotně. V osmi letech uměl francouzsky, brzy přibyla latina, řečtina, italština a později i angličtina. Rodiče pro chlapce nalezli domácího učitele Hendricha Bruna, tehdy studenta, později profesora na latinské škole. Ten hochy uvedl do základů geografie a astronomie a nezapomínal ani na logiku a obory, jakými byla etika a dialektika. Po takto všestranné průpravě zůstávalo otázkou, kterým směrem se v dalším období zájem chlapců bude rozvíjet.

Odpověď dala studia na univerzitě v Leidenu, kam otec oba syny poslal. Na této mimořádně kvalitní univerzitě, založené roku 1575 Vilémem Oranžským, se vzdělávali lékaři, právníci, státní úředníci i inženýři. V květnu 1645 se zde – 29 let po svém otci – Christian a Constantijn zapsali ke studiu práv. Tu Christian hlouběji pronikl do Descartovy filozofie (se zájmem četl zejména jeho *Principy filosofie*), jíž byl po většinu života silně ovlivněn. Roku 1655 zpracoval disertaci a stal se doktorem práv. Rodiče předpokládali, že bude diplomatem. Jako člen diplomatické mise procestoval velkou část Evropy, ale po návratu roku 1650 pro nemoc již další cesty na čas nepřicházely v úvahu a patrně se během uzdravování rozhodl plně věnovat matematice a fyzice. Práva ho nezaujala a od té doby o něm jako o právníkovi zmínky nenalézáme.[2] V roce 1649 se vrátil domů do Haagu (obr. 3). Jeho další životní cesta již šla mimo záměry rodičů a díky svéhlavému rozhodnutí přispěl k rozvoji exaktních věd.

Obr. 3: Christian Huygens na holandské poštovní známce z roku 1995

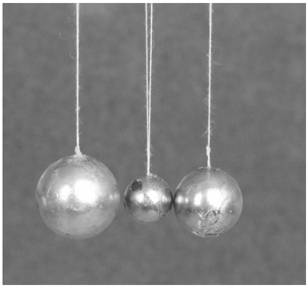
Protože tento článek je jen o jednom tématu Huygensovy práce, ostatní určitě významnější výsledky jeho práce uveďme jen přehledně:

- Objev vztahu pro odstředivou sílu. Elementární vztah, dnes zapisovaný vzorcem $F = m \cdot \frac{v^2}{r}$, významně napomohl formulaci zákona všeobecné gravitace I. Newtonem.
- *Huygensův princip.* Podpora vlnového pojetí světla formulací tvaru vlnoploch.
- Objev Saturnova prstence. Několik desetiletí trvající záhada podivného tvaru této planety. Objev Titanu, měsíce Saturnu.
- Zkvalitnění astronomické optiky. Sestrojení tzv. Huygensova okuláru složeného ze dvou spojných čoček.
- Sestrojení přesných kyvadlových hodin.

Vraťme se ale k základnímu tématu článku, a to rázu těles. V další – závěrečné části – vybídneme studenta, aby si s rázem alespoň trochu

[2] Obdobné právní vzdělání získal na univerzitě v Toulouse i Huygensův současník Pierre de Fermat. Ten sice nějaký čas pracoval jako soudní rada tamtéž, avšak znám je především svým vědeckým vkladem jako matematik a fyzik.

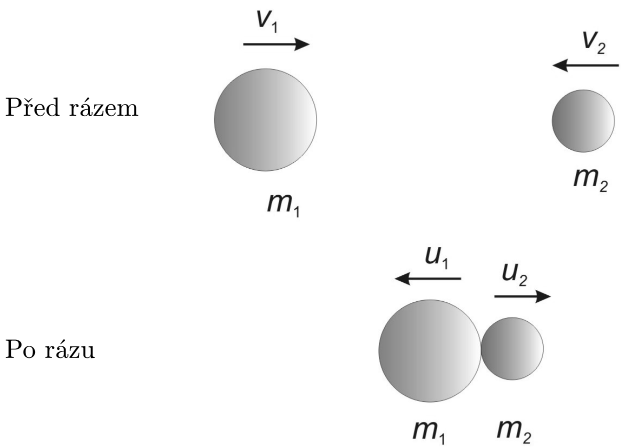
teoreticky pohrál, a bude-li mít zájem, může si zacvrnkat kuličkami např. podle obr. 4.



Obr. 4

Co k tomu může říci středoškolská fyzika

Budeme uvažovat středový ráz dvou dokonale pružných těles o hmotnostech m_1 a m_2 pohybujících se rychlostmi v_1 a v_2 po vodorovné podložce bez tření (obr. 5) a budeme hledat odpověď na otázku, kterým směrem a jak velkými rychlostmi u_1 a u_2 se tělesa budou pohybovat po rázu. Pro následující text uvažujme rychlosti těles směrem doprava jako kladné, rychlosti ve směru opačném jako záporné.



Obr. 5

Pro děj platí dva zákony – zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \tag{2}$$

Převedeme-li členy s indexem 1 na levou stranu a členy s indexem 2 na pravou stranu, dostáváme:

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{4}$$

Vydělíme-li rovnici (4) rovnicí (3), dostáváme vztah pro rychlosti před rázem a po rázu

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

Vyjádříme-li z této rovnice např. u_2 a dosadíme-li do (1), můžeme vyjádřit rychlost tělesa o hmotnosti m_1 po rázu ve tvaru

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Obdobně po vyjádření u_1 a dosazení do (1) získáme vztah pro výpočet rychlosti tělesa o hmotnosti m_2 po rázu ve tvaru

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

S využitím vztahů (5) a (6) pak lze řešit celou řadu případů. Např.:

1) Je-li $m_1 = m_2$ a $v_2 = 0$, jsou rychlosti těles po rázu podle vztahů (5) a (6) rovny $u_1 = 0$ a $u_2 = v_1$. Dopadající těleso se po rázu zastaví a druhé těleso je odraženo stejnou rychlostí.

2) Jestliže $m_1 = m_2$ a $v_1 = -v_2$, tělesa se pohybují rychlostmi $u_1 = -v_1$ a $u_2 = -v_2$, odrazí se stejnými rychlostmi zpět.

3) Podle vztahů (5) a (6) lze řešit i extrémní případ nárazu tělesa na stěnu ($m_2 = \infty$, $v_2 = 0$). Pak je vhodné vztah (5) upravit na tvar

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) v_1 + 2 v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1},$$

z něhož po dosazení dostáváme $u_1 = -v_1$, tj. těleso dopadající na stěnu se odrazí zpět se stejně velkou rychlostí.

4) Huygensovo pravidlo sedmé možná studenta překvapí, neboť může očekávat, že dostatečně silný úder tělesa o hmotnosti $m_1 \gg m_2$ tělesu klidnému, udělí libovolně velkou rychlost. Uvažujme ale např., že první těleso má n-krát větší hmotnost než druhé, $m_1 = n \cdot m_2$ a druhé těleso je před rázem v klidu ($v_2 = 0$). Pak podle vztahu (6) je

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{(m_2 - n \cdot m_2) \cdot 0 + 2n \cdot m_2v_1}{n \cdot m_2 + m_2} = \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot v_1 < 2v_1.$$

Nelze tedy dosáhnout dvojnásobné rychlosti lehčího tělesa.

Obr. 6: Socha Christiana Huygense před budovou TU Delft

Literatura

[1] Štoll, I.: *Jan Marek Marci.* Prometheus, Praha, 1996.

[2] Huygens, Ch.: *O dviženii tel pod vlijaniem udara (O pohybu těles vlivem rázu).* In: *Tri memuara po mechanike*, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1951, (in Russian).

[3] Grigorjan, A. T.: Počátky klasické mechaniky. *Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky*, roč. 9 (1964), s. 21–69.

[4] Jáchim, F.: Christian Huygens. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 73 (1996), s. 23–30.