Vlastimil Dlab; Kateřina Fišerová

Surdická vyjádření přirozených čísel II

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 3, 1–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146884`

Surdická vyjádření přirozených čísel II

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu – Kateřina Fišerová, Praha

Abstract. This note describes expressions involving nested square and cube roots that can be simplified to natural numbers and clarifies their relationship to the solutions of cubic equations.

Čas od času se v matematické literatuře setkáváme s výrazy tvaru

$$\sqrt[3]{510\,650+\sqrt{260\,763\,780\,411}}+\sqrt[3]{510\,650-\sqrt{260\,763\,780\,411}}. \qquad (1)$$

Třetí odmocninu zde uvažujeme v oboru reálných čísel, jde tedy o zcela jednoznačnou hodnotu, tj. o jednoznačně určené reálné číslo. Běžná kalkulačka vyhodnotí výraz (1) jako ekvivalent čísla 100. Ale je to opravdu přesně 100, nebo jen přibližně 100?

Zde se rodí základní otázka, kterou si v této poznámce klademe. Je možné vyjádřit každé přirozené číslo n ve tvaru

$$n=\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}, \qquad (2)$$

kde a, b, c jsou nezáporná celá čísla, $a\neq 0$, a takové vyjádření je jednoznačné? Jak tyto otázky souvisejí s jinými oblastmi algebry, s řešením kubických rovnic a především Tartagliovou metodou? Následující úvaha nám poskytne několik vodítek. Připomeňme zde článek [3], týkající se kvadratických surdických výrazů.

Uvažujme libovolné přirozené číslo $n\geq 2$ a definujme přirozené číslo a jako

$$2a=n(n^2-3). \qquad (3)$$

To je možné díky tomu, že $n(n^2-3)$ je vždy číslo sudé. Potom

$$n=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}, \qquad (4)$$

což lehce ověříme umocněním obou stran této rovnosti na třetí. Rovnost (4) plyne též ihned z toho, že

$$a^2-1=\frac{1}{4}\left[n^2(n^2-3)^2-4\right]=\frac{1}{4}(n^6-6n^4+9n^2-4)=$$
$$=\frac{1}{4}(n^2-1)^2(n^2-4),$$

a tedy že

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right]} = \frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n^2-4}}{2}.$$

O tom se snadno přesvědčíme, neboť

$$\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(n+\sqrt{n^2-4}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{8}\left[n^3+3n^2\sqrt{n^2-4}+3n(n^2-4)+(n^2-4)\sqrt{n^2-4}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right].$$

Podobně dostáváme, že

$$\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[n^3-3n-(n^2-1)\sqrt{n^2-4}\right]} = \frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n^2-4}}{2}.$$

Povšimněme si, že zvolené číslo n je v důsledku (3) kořenem kubické rovnice

$$x^3-3x-2a=0$$

a že výraz (4) je známým Tartagliovým vzorcem pro jeho nalezení.[1)] Pro ilustraci tohoto postupu zvolme např. $n=11$. Pak $a=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 118=649$, a tedy

$$11 = \sqrt[3]{649+\sqrt{421\,200}}+\sqrt[3]{649-\sqrt{421\,200}} =$$
$$= \sqrt[3]{649+180\sqrt{13}}+\sqrt[3]{649-180\sqrt{13}}.$$

Ačkoli jsou odpovědi na naše úvodní otázky zcela jednoduché, můžeme pozorovat překvapivou odlišnost v chování lichých a sudých čísel. Uveďme nejprve základní výsledek.

Věta 1. *Všechna možná vyjádření přirozeného čísla n ve tvaru (2) jsou tato:*

[1)] Tartagliovy vzorce jsou známé také pod názvem Cardanovy vzorce.

Pro liché $n = 2k - 1$ je

$$n =$$
$$= \sqrt[3]{\left[k^3 - \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{9}{2}k - 2 + (6k-3)t\right] + \left(\tfrac{3}{2}k^2 - \tfrac{3}{2}k + 1 + t\right)\sqrt{5+8t}} +$$
$$+ \sqrt[3]{\left[k^3 - \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{9}{2}k - 2 + (6k-3)t\right] - \left(\tfrac{3}{2}k^2 - \tfrac{3}{2}k + 1 + t\right)\sqrt{5+8t}}$$

pro všechna celá $k \geq 1$, $t \geq 0$. Zde je navíc

$$\sqrt[3]{\left[k^3 - \tfrac{3}{2}k^2 + \tfrac{9}{2}k - 2 + (6k-3)t\right] \pm \left(\tfrac{3}{2}k^2 - \tfrac{3}{2}k + 1 + t\right)\sqrt{5+8t}} =$$
$$= \frac{1}{2}(2k - 1 \pm \sqrt{5+8t}).$$

Pro sudé $n = 2k$ je

$$n = \sqrt[3]{(k^3 + 3kt) + (3k^2 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{(k^3 + 3kt) - (3k^2 + t)\sqrt{t}}$$

pro všechna celá $k \geq 1$, $t \geq 0$. Zde je navíc

$$\sqrt[3]{(k^3 + 3kt) \pm (3k^2 + t)\sqrt{t}} = k \pm \sqrt{t}.$$

Mnohonásobné užití proměnných v právě vyslovené větě jí může ubírat na přehlednosti, a činit tak porozumění problematice obtížnějším. Několik následujících řádků snad tedy pomůže vytvořit konkrétnější představu o výrazech, s nimiž se zde setkáváme. Naše věta prostě tvrdí, že pro všechna $t \geq 0$ je

$$1 = \sqrt[3]{2 + 3t + (1+t)\sqrt{5+8t}} + \sqrt[3]{2 + 3t - (1+t)\sqrt{5+8t}},$$

$$2 = \sqrt[3]{1 + 3t + (3+t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{1 + 3t - (3+t)\sqrt{t}},$$

$$3 = \sqrt[3]{9 + 9t + (4+t)\sqrt{5+8t}} + \sqrt[3]{9 + 9t - (4+t)\sqrt{5+8t}},$$

$$4 = \sqrt[3]{8 + 6t + (12+t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{8 + 6t - (12+t)\sqrt{t}},$$

$$5 = \sqrt[3]{25 + 15t + (10+t)\sqrt{5+8t}} + \sqrt[3]{25 + 15t - (10+t)\sqrt{5+8t}},$$

$$6 = \sqrt[3]{27 + 9t + (27+t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{27 + 9t - (27+t)\sqrt{t}},$$

$$7 = \sqrt[3]{56 + 21t + (19 + t)\sqrt{5 + 8t}} + \sqrt[3]{56 + 21t - (19 + t)\sqrt{5 + 8t}},$$

$$8 = \sqrt[3]{64 + 12t + (48 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{64 + 12t - (48 + t)\sqrt{t}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$23 = \sqrt[3]{1\,564 + 69t + (199 + t)\sqrt{5 + 8t}} + \sqrt[3]{1\,564 + 69t - (199 + t)\sqrt{5 + 8t}},$$

$$24 = \sqrt[3]{1\,728 + 36t + (432 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{1\,728 + 36t - (432 + t)\sqrt{t}},$$

$$25 = \sqrt[3]{2\,000 + 75t + (235 + t)\sqrt{5 + 8t}} + \sqrt[3]{2\,000 + 75t - (235 + t)\sqrt{5 + 8t}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Věta 2. *Surdická vyjádření lichých čísel $n = 2k - 1$ popsaná ve větě 1 odpovídají celočíselným kořenům kubické rovnice*

$$x^3 = 3(k^2 - k - 1 - 2t)x + 2k^3 - 3k^2 + 9k - 4 + 6(2k - 1)t$$

pro $t \geq 0$. Získáme je užitím Tartagliova vzorce pro řešení kubických rovnic.

Surdická vyjádření sudých čísel $n = 2k$ popsaná ve větě 1 odpovídají podobně celočíselným kořenům kubické rovnice

$$x^3 = 3(k^2 - t)x + 2k(k^2 + 3t)$$

pro $t \geq 0$. Získáme je opět užitím Tartagliova vzorce pro řešení kubických rovnic.

Pro ilustraci zde ukažme několik kubických rovnic, jež mají kladný celočíselný kořen:

$x^3 = -57x + 58$ má kořen $1 = \sqrt[3]{29 + 10\sqrt{77}} + \sqrt[3]{29 - 10\sqrt{77}}$

$x^3 = -27x + 62$ má kořen $2 = \sqrt[3]{31 + 13\sqrt{10}} + \sqrt[3]{31 - 13\sqrt{10}}$

$x^3 = -57x + 198$ má kořen $3 = \sqrt[3]{99 + 14\sqrt{85}} + \sqrt[3]{99 - 14\sqrt{85}}$

$x^3 = -18x + 136$ má kořen $4 = \sqrt[3]{68 + 22\sqrt{10}} + \sqrt[3]{68 - 22\sqrt{10}}$

$x^3 = 3x + 110$ má kořen $5 = \sqrt[3]{55 + 12\sqrt{21}} + \sqrt[3]{55 - 12\sqrt{21}}$

$x^3 = -3x + 234$ má kořen $6 = \sqrt[3]{117 + 37\sqrt{10}} + \sqrt[3]{117 - 37\sqrt{10}}$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$x^3 = 402x + 4176$ má kořen $24 = \sqrt[3]{2\,088 + 442\sqrt{10}} + \sqrt[3]{2\,088 - 442\sqrt{10}}$

$x^3 = 459x + 4150$ má kořen $25 = \sqrt[3]{2\,075 + 236\sqrt{13}} + \sqrt[3]{2\,075 - 236\sqrt{13}}$

....

Dokažme nyní větu 1 a větu 2. Položme $h = b^2c$ a přepišme (2) do jednodušší podoby

$$n = \sqrt[3]{a + \sqrt{h}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{h}},$$

kde $a > 0$ a $h \geq 0$ jsou celá čísla. Umocněním této rovnosti na třetí dostáváme

$$n^3 = 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - h}\left(\sqrt[3]{a + \sqrt{h}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{h}}\right),$$

neboli

$$n^3 = 2a + 3n\sqrt[3]{a^2 - h}. \tag{5}$$

Rozlišme nyní dva případy, totiž případ, kdy n je liché číslo, a případ, kdy n je sudé číslo.

(i) Je-li n liché číslo, pak je podle (5) číslo a celočíselným násobkem čísla n, tedy $a = nx$. Odtud

$$2x + 3\sqrt[3]{n^2x^2 - h} = n^2$$

a označíme-li $\sqrt[3]{n^2x^2 - h}$ jako y, dostaneme jednoduchou diofantickou rovnici

$$2x + 3y = n^2.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $x = 3r - n^2$, $y = n^2 - 2r$ pro libovolnou hodnotu celočíselného parametru r. V důsledku toho pak

$$a = nx = n(3r - n^2),$$

$$y = n^2 - 2r = \sqrt[3]{n^2(3r - n^2)^2 - h},$$

což vede k rovnosti

$$h = r^2(8r - 3n^2).$$

Jelikož $h \geq 0$, musí číslo r vyhovovat nerovnosti $8r - 3n^2 \geq 0$, tj. celočíselný parametr je omezen podmínkou $r \geq \frac{3}{8}n^2$.

Dosadíme-li $n = 2k - 1$, $k \geq 1$, pak

$$r \geq \frac{3}{8}(2k-1)^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{3}{8}$$

a vzhledem k celočíselnosti r můžeme všechny akceptovatelné hodnoty r vyjádřit jako

$$r = t + \frac{3}{2}k(k-1) + 1, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

což nás dovede k prvnímu výrazu ve větě 1.

Kromě toho můžeme prostým umocněním obou stran na třetí dokázat rovnost

$$\sqrt[3]{n(3r - n^2) \pm r\sqrt{8r - 3n^2}} = \frac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{8r - 3n^2}\right).$$

Substitucí ze vztahu (6) tak nakonec dostáváme druhou rovnost z věty 1.

(ii) Je-li n sudé číslo, $n = 2k$, $k \geq 0$, postupujeme obdobným způsobem. Vztah (5) nabývá podoby

$$2a + 6k\sqrt[3]{a^2 - h} = 8k^3,$$

odkud vidíme, že $a = kx$, kde

$$x + 3\sqrt[3]{k^2x^2 - h} = 4k^2.$$

Označíme-li $y = \sqrt[3]{k^2x^2 - h}$, dostaneme jednoduchou diofantickou rovnici

$$x + 3y = 4k^2,$$

která má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $x = k^2 + 3t$, $y = k^2 - t$ pro libovolnou hodnotu celočíselného parametru t. Pak pro každé $t \geq 0$ je

$$a = kx = k(k^2 + 3t),$$
$$y = k^2 - t = \sqrt[3]{k^2(k^2 + 3t)^2 - h},$$

což vede k rovnosti $h = t(3k^2 + t)^2$. Analogicky jako v případě lichého n můžeme i zde prostým umocněním obou stran na třetí snadno dokázat rovnost

$$\sqrt[3]{k(k^2 + 3t) \pm (3k^2 + t)\sqrt{t}} = k \pm \sqrt{t}.$$

Tím je důkaz věty 1 dokončen.

Důkaz věty 2 spočívá v rutinní aplikaci Tartagliova vzorce pro řešení kubických rovnic. Vycházíme-li z kubické rovnice tvaru $x^3 = px + q$, přímým výpočtem určíme nejprve hodnotu q a posléze též p.

Nyní si povšimněme, že je-li m dělitelem n, tedy $n = md$, potom se d-násobek každého surdického vyjádření čísla

$$m = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}}$$

objevuje v seznamu surdických vyjádření n:

$$n = \sqrt[3]{ad^3 + bd^3\sqrt{c}} + \sqrt[3]{ad^3 - bd^3\sqrt{c}}$$

Z toho plyne, že všechna surdická vyjádření čísla m můžeme získat ze surdických vyjádření čísla n. Pro ilustraci této situace si uveďme seznam všech surdických vyjádření čísla 30:

$$30 = \sqrt[3]{3\,375 + 45t + (675 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{3\,375 + 45t + (675 + t)\sqrt{t}},\ t \geq 0 \tag{7}$$

Z něj můžeme získat seznamy všech surdických vyjádření jeho dělitelů:

15 jako $\frac{1}{2}$ ze (7) pro $t = 5 + 8s$, $s \geq 0$

10 jako $\frac{1}{3}$ ze (7) pro $t = 9s$, $s \geq 0$

6 jako $\frac{1}{5}$ ze (7) pro $t = 25s$, $s \geq 0$

5 jako $\frac{1}{6}$ ze (7) pro $t = 45 + 72s$, $s \geq 0$

3 jako $\frac{1}{10}$ ze (7) pro $t = 125 + 200s$, $s \geq 0$

2 jako $\frac{1}{15}$ ze (7) pro $t = 225s$, $s \geq 0$

1 jako $\frac{1}{30}$ ze (7) pro $t = 1\,125 + 1\,800s$, $s \geq 0$

Porovnáme-li výrazy ve větě 1, ihned vidíme, že pro lichá čísla n mají všechna surdická vyjádření formu

$$n = \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(n^3 + 3nt) + (3n^2 + t)\sqrt{t}} + \sqrt[3]{(n^3 + 3nt) - (3n^2 + t)\sqrt{t}}\right] \tag{8}$$

pro všechna $t = 5 + 8s$, $s \geq 0$. Užití této rovnosti umožňuje vhodnější způsob zaznamenání všech surdických vyjádření lichého čísla n než použití prvního vzorce ve větě 1.

Jak jsme už viděli, každé sudé číslo n připouští „degenerovaná" surdická vyjádření, tj. vyjádření (1), která degenerují na tvar

$$n = \sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{u-v}$$

s přirozenými čísly u, v. To se stane v případě, že t je čtvercem $(t = q^2)$ celého čísla $q \geq 0$. Pro všechna taková q dostáváme

$$\sqrt[3]{(k^3+3kq^2)+(3k^2+q^2)q} + \sqrt[3]{(k^3+3kq^2)-(3k^2+q^2)q} =$$
$$= \sqrt[3]{(k+q)^3} + \sqrt[3]{(k-q)^3} = (k+q)+(k-q) = 2k = n.$$

Například pro $n = 10$ máme pro $q = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots, 12,\ \ldots$ postupně:

$$\begin{aligned}
10 &= \sqrt[3]{125+0} + \sqrt[3]{125-0} = 5+5\\
10 &= \sqrt[3]{140+76} + \sqrt[3]{140-76} = 6+4\\
10 &= \sqrt[3]{185+158} + \sqrt[3]{185-158} = 7+3\\
10 &= \sqrt[3]{260+252} + \sqrt[3]{260-252} = 8+2\\
10 &= \sqrt[3]{365+364} + \sqrt[3]{365-364} = 9+1\\
10 &= \sqrt[3]{500+500} + \sqrt[3]{500-500} = 10+0\\
10 &= \sqrt[3]{665+666} + \sqrt[3]{665-666} = 11-1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
10 &= \sqrt[3]{2\,285+2\,628} + \sqrt[3]{2\,285-2\,628} = 17-7,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pro lichá čísla n tato degenerovaná vyjádření neexistují. To vyplývá ihned z toho, že celé číslo tvaru $5+8s$ nemůže být čtvercem. Přesvědčme se o tom. Předpokládejme, že $5+8s = q^2$ pro nějaká celá čísla s a q. Potom q musí být liché, tedy $q = 2k+1$ pro nějaké přirozené číslo k. Pak ale

$$5+8s = 4k^2+4k+1 \quad \text{a} \quad 1+2s = k(k+1).$$

Protože $k(k+1)$ je vždy číslo sudé, dochází ke sporu.

Na závěr poukažme na to, že vzorce ve větě 1 mohou být užity i pro záporné hodnoty parametru t. Samozřejmě v takovém případě se budeme zabývat surdickými vyjádřeními přirozených čísel n pomocí Gaussových (celých) čísel, tj. komplexních čísel, jejichž reálná i imaginární část jsou celá čísla. Zdůrazněme a ilustrujme stručně na následujících třech příkladech zcela nové důležité vlastnosti takových vyjádření.

Každé takové vyjádření přirozeného čísla obsahuje dvě třetí odmocniny z komplexního čísla, a je tedy důležité určit, které dvě ze tří hodnot takových třetích odmocnin zvolíme.

(a) Typické (a historicky významné) je vyjádření, které obdržíme v kontextu věty 1 pro $n = 4$ a $t = -1$:

$$4 = \sqrt[3]{2 + 11\,\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 11\,\mathrm{i}} \tag{9}$$

V tomto surdickém vyjádření rozpoznáváme Tartagliův tvar řešení kubické rovnice

$$x^3 = 15x + 4 \tag{10}$$

tak, jak je prezentován G. Cardanem v [2]. Rovnosti

$$\sqrt[3]{2 \pm 11\,\mathrm{i}} = 2 \pm \mathrm{i}$$

vyvozené z věty 1 nás vedou k formuli brilantního Rafaela Bombelliho, který s komplexními čísly průkopnicky v [1] pracoval. Některé ze současných učebnic opomíjejí zdůraznit to, že každý ze dvou symbolických zápisů $\sqrt[3]{2 \pm 11\,\mathrm{i}}$ má vlastně tři různé hodnoty, totiž

$$2 \pm \mathrm{i}, \quad \frac{1}{2}\left[(-2 + \sqrt{3}) \mp (1 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{i}\right], \quad \frac{1}{2}\left[(-2 - \sqrt{3}) \mp (1 - 2\sqrt{3})\,\mathrm{i}\right].$$

Proto surdické vyjádření (9) vlastně popisuje všechna tři řešení rovnice (10):

$$4, \quad -2 + \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{3}$$

(b) Vraťme se znovu k větě 1 a uvažujme případ $n = 1$ a $t = -1$, tj. symbolickou rovnost

$$1 = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1}. \tag{11}$$

Zde je nyní klíčové vzít v úvahu, co bylo řečeno výše o hodnotách komplexních třetích odmocnin. Třetí odmocnina z čísla -1 nabývá hodnot

$$-1, \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}), \quad \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}).$$

Zvolme za první výraz $\sqrt[3]{-1}$ v symbolické rovnosti (11) postupně hodnoty

$$-1, \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}), \quad \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})$$

a za druhý výraz $\sqrt[3]{-1}$ v (11) odpovídající trojici hodnot

$$-1, \quad \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}), \quad \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}).$$

Volba těchto tří párů třetích odmocnin z -1 určuje v surdickém vyjádření rovnosti (11) kořen -2 a dvojnásobný kořen 1 příslušné kubické rovnice $x^3 = 3x-2$. Vysvětlení rovnosti (11) je už samozřejmě vyjádřeno větou 1.

(c) Naše třetí surdické vyjádření

$$1 = \sqrt[3]{-13-4\sqrt{35}\,\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-13+4\sqrt{35}\,\mathrm{i}} \tag{12}$$

představuje jeden ze tří kořenů kubické rovnice

$$x^3 = 27x - 26 \tag{13}$$

(odpovídající v našem značení ve větě 1 případu $n = 1$, $t = -5$). Opět nezapomeňme, že zde figurují tři hodnoty třetí odmocniny z komplexního čísla $-13 \mp 4\sqrt{35}\,\mathrm{i}$, tedy

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{35}\,\mathrm{i}\right),\\ \frac{1}{4}\left[\left(-1+\sqrt{105}\right) \mp \left(\sqrt{35}+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right],\\ \frac{1}{4}\left[\left(-1-\sqrt{105}\right) \mp \left(\sqrt{35}-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right],\end{gathered}$$

které vedou podobně jako v případě (b) ke třem kořenům kubické rovnice (13), totiž k číslům

$$1, \quad \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{105}\right), \quad \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{105}\right).$$

L i t e r a t u r a

[1] Bombelli, R.: *Algebra,* 1572. *L'Algebra. Prima edizione integrale.* Feltrinelli Editore, Milano, 1966.

[2] Cardano, G.: *Ars Magna,* 1545. *Ars Magna or The Rules of Algebra.* Dover, New York, 1993.

[3] Dlab, V., Fišerová, K.: *Surdická vyjádření přirozených čísel I. Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 2, s. 1–9.